ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2,1999 Естественные науки

Математика

УДК 519.217

М.Ю.МОВСИСЯН, С. М. НАРИМАНЯН

РАВНОМЕРНАЯ РАСПРЕДЕЛЕННОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ НА СЧЕТНЫХ ГРУППАХ

В работе получен ряд достаточных условий, обеспечивающих равномерную распределенность случайных блужданий как на произвольных, так и на некоторых конкретных счетных группах.

1. Пусть X_n – однородная марковская цепь со счетным фазовым пространством E и n-шаговыми переходными вероятностями $p(n,x,y)$, $x,y\in E$. Везде в дальнейшем предполагается, что рассматриваемые цепи неприводимы и непериодичны. Тогда известно (см. , напр. , [1]), что существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p(n,x,y)}$ и не зависит от x и y. Обратную величину этого предела обозначим через ρ и назовем спектральным радиусом цепи X_n. Если $\mathscr{B}$ – класс всех подмножеств пространства E, то оператор сдвига P, связанный с цепью X_n, действует в пространстве $\mathscr{B}$-измеримых функций по формуле

$$Pf(x)=\sum_{y\in E}p(x,y)f(y)\ ;\ p(x,y)=p(1,x,y).$$

Функция $f\geq 0$ называется α-гармонической для X_n, если $\alpha Pf=f$, и α-эксцессивной, если $\alpha Pf\leq f$, где $\alpha>0$. Множество α-гармонических функций образует выпуклый конус, крайние точки которого называются α-минимальными гармоническими функциями.

Приведем два известных и необходимых нам результата из граничной теории Мартина [2].

а) Разложение Рисса. Каждая α-эксцессивная функция f единственным образом представляется в виде

$$f(x)=G_\alpha\left[f(x)-\alpha Pf(x)\right]+h_\alpha(x), \tag{1}$$

где h_α – α-гармоническая функция, а $G_\alpha\varphi$ – потенциал функции $\varphi\geq 0$, т. е.

$$G_\alpha\varphi(x)=\sum_{y\in E}g_\alpha(x,y)\varphi(y),\ \ g_\alpha(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\alpha^m p(m,x,y). \tag{2}$$

б) Представление Шоке. Всякая α-гармоническая функция f допускает единственное интегральное представление через α-минимальные гармонические функции:

$$f(x)=\int_B f_\beta(x)\upsilon(d\beta), \tag{3}$$

где $B=\{\beta\}$ – граница Мартина цепи X_n, находящаяся во взаимно-однозначном соответствии с множеством α-минимальных гармонических функций, а υ – вероятностная спектральная мера Мартина.

Замечание 1. Если $\alpha > \rho$, то не существует α-гармоническая функция, кроме тождественно равной нулю.

Действительно, пусть $f \not\equiv 0$ – некоторая α-гармоническая функция для X_n, причем $\alpha > \rho$. Выберем β так, чтобы $\rho < \beta < \alpha$. Ясно, что $f - \beta$-эксцессивная функция и в силу (1):

$$f(x) = G_\beta\left[f(x) - \beta Pf(x)\right] + h_\beta(x).$$

Но поскольку $\beta > \rho$, то из (2) получаем, что функция Грина $g_\beta(x,y) = \infty$, т. е. $G_\beta \equiv \infty$. Следовательно, $\beta Pf = f$. Сопоставляя это с равенством $\alpha Pf = f$, получим $f \equiv 0$.

2. Начиная с этого момента будем считать, что множество состояний E цепи X_n является группой с единицей e. Если переходные вероятности удовлетворяют условию $p(x,y) = p(e,x^{-1}y)$ (тогда, конечно, $p(gx,gy) = p(x,y)$ для любого $g \in E$), то говорят, что цепь X_n инвариантна слева. Инвариантные марковские цепи в E будем называть случайными блужданиями на группе E. Случайное блуждание на E называется симметричным, если $p(e,x) = p(e,x^{-1})$ для любого $x \in E$.

Наша цель изучить вопрос о существовании и виде предела

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n-s,e,x)}{p(n,e,y)} \; ; \quad x,y \in E, \quad s \ge 0.$$

Разумеется, этот предел существует далеко не всегда, и задача нетривиальна лишь тогда, когда и числитель и знаменатель стремятся к нулю. Особенно важен случай, когда этот предел равен 1.

Определение. Скажем, что случайное блуждание X_n на группе E равномерно распределено, если для любых $x,y \in E$ и $s \ge 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n-s,e,x)}{p(n,e,y)} = 1.$$

Известен следующий результат [3].

Лемма 1. Пусть X_n – финитное случайное блуждание на группе E со спектральным радиусом $\rho = 1$. Тогда для любого $x \in E$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n-1,e,x)}{p(n,e,x)} = 1.$$

Здесь финитность блуждания X_n означает, что для любого $x \in E$ лишь для конечного числа y-ов $p(x,y) > 0$.

Для доказательства основного результата (теорема 1) нам нужна еще одна вспомогательная

Лемма 2. Если X_n – финитное случайное блуждание на группе E со спектральным радиусом $\rho = 1$, то семейство функций

$$\varphi_n(x,s) = \frac{p(n-s,x,e)}{p(n,e,e)}, \quad s < n,$$

для достаточно больших n равномерно ограничено.

В самом деле,

$$\varphi_n(x,s) \le \frac{1}{c} \cdot \frac{p(n-s+M,e,e)}{p(n,e,e)},$$

где M выбран так, что $p(M,e,x)>0$, а $c=\min_{z\in E} p(M,e,z)$. Осталось применить лемму I.

Теорема 1. Пусть X_n – финитное случайное блуждание на группе E со спектральным радиусом $\rho=1$. Если для X_n единственной гармонической функцией является константа, то X_n равномерно распределено на E.

Доказательство. Имеем очевидное представление

$$\varphi_n(x,s)=\sum_{y\in E} p(x,y)\varphi_n(y,s+1), \qquad (4)$$

которое означает, что функции $\varphi_n(x,s)$ при $s\le n$ гармоничны для пространственно-временного процесса $X\times T$. Здесь T – детерминированное движение на множестве $\{0, 1, 2, ...\}$. В силу леммы 2 множество предельных точек семейства $\{\varphi_n\}$ не пусто. Пусть $\varphi(x,s)$ – некоторая предельная точка этого семейства: $\varphi(x,s)=\lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k}(x,s)$. Записав (4) для φ_{n_k} и переходя к пределу, получаем, что

$$\varphi(x,s)=\sum_{y\in E} p(x,y)\varphi(y,s+1), \qquad (5)$$

при этом существенно используя финитность блуждания X_n. Получили, что функция $\varphi(x,s)$ – гармоническая для процесса $X\times T$. Известно [4], что такая функция представляется в виде $\varphi(x,s)=\alpha^s f(x)$, где f – α-гармоническая функция для X_n. Теперь из (3) и замечания 1 имеем представление

$$\varphi(x,s)=\int_{B_1} f_\beta(x)\upsilon(d\beta)+\int_{\bigcup_{\alpha<1} B_\alpha} f_\beta(x)\alpha^s\upsilon(d\beta\times d\alpha), \qquad (6)$$

где B_α – множество α-минимальных гармонических функций для X_n при $\alpha=1$ с нормировкой $f(e)=1$. Покажем, что второе слагаемое в правой части (6) равно 0. В самом деле, по лемме 1 $\varphi(e,s)=1$, и поэтому

$$1-\int_{B_1} f_\beta(e)\upsilon(d\beta)=\int_{\bigcup_{\alpha<1} B_\alpha} f_\beta(e)\alpha^s\upsilon(d\beta\times d_\alpha). \qquad (7)$$

В (7), устремив $s\to\infty$, получим $\upsilon(B_1)=1$, т. е. мера Мартина полностью сосредоточена на множестве гармонических (1-гармонических) функций. Итак,

$$\varphi(x,s)=\int_{B_1} f_\beta(x)\upsilon(d\beta),$$

откуда, поскольку единственная гармоническая функция для X_n есть константа, а $\varphi(e,s)=1$, следует, что $\varphi(x,s)\equiv 1$. Таким образом, для компактного семейства $\{\varphi_n\}$ единственной предельной точкой является функция $\varphi(x,s)\equiv 1$. Осталось учитывать инвариантность переходных вероятностей. Теорема доказана.

Следствие. Пусть E – нильпотентная группа, X_n – финитное случайное блуждание на E. Если его спектральный радиус $\rho=1$, то X_n равномерно распределено на E. Действительно известно [5], что для произвольного блуждания на нильпотентной группе только при условии $\rho = 1$ все гармонические функции постоянны. Остается применить теорему 1.

Замечание 2. Аналогичный следствию результат верен и для абелевых групп. Однако в [1] совершенно другим методом доказывается, что лишь условие $\rho = 1$ (финитности от X_n не требуется) обеспечивает равномерную распределенность блуждания X_n на абелевой группе.

3. Здесь коротко обсудим вопрос о равномерной распределенности для симметричных случайных блужданий на счетных группах.

Определение. Группа E называется аменабельной, если для любого симметричного случайного блуждания на E его спектральный радиус $\rho = 1$.

Лемма 3. Пусть $E = \{x_1, x_2, ...\}$ – счетная группа. Если всякая подгруппа E_n, порожденная множеством $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, аменабельна, то и группа E аменабельна.

В самом деле, пусть $p(e,x)$ – переходные вероятности некоторого симметричного блуждания X_n на E и пусть $\varepsilon > 0$. Применим метод урезания: выберем $x_1, x_2, ..., x_n$ таким образом, чтобы

$$\sum_{i=1}^{n} p(e, x_i^{\pm 1}) = 1 - \varepsilon_1 > 1 - \varepsilon ,$$

и рассмотрим на E_n случайное блуждание Y_n с переходными вероятностями $q(e, x_i^{\pm 1}) = (1-\varepsilon_1)^{-1} p(e, x_i^{\pm 1})$. Очевидно, что $p(n,e,e) \geq (1-\varepsilon_1)^n q(n,e,e)$. Отсюда, учитывая, что Y_n – симметричное блуждание на аменабельной группе E_n, немедленно получим $\rho = 1$ для блуждания X_n на группе E.

Лемма 4. Если для любого финитного симметричного блуждания на группе E его спектральный радиус равен 1, то это верно и для любого (не обязательно финитного) симметричного блуждания на E.

Доказательство можно провести методом урезания, подобно лемме 3. Так как разрешимые, в частности, и нильпотентные группы аменабельны [3], то в силу последних двух лемм и следствия теоремы 1 можем сформулировать такой результат.

Теорема 2. Если E – счетная нильпотентная группа, то любое симметричное случайное блуждание на E равномерно распределено.

Отметим, что аналогичный теореме 2 результат совершенно другими методами был получен в [6].

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

Поступила 08.04.1999

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нариманян С.М.** Предельная теорема об отношениях для случайного блуждания на группах. – Вестник МГУ, Мат., Мех., 1975, №6, с. 17-24
2. **Дынкин Е.Б.**, **Юшкевич А.А.** Теоремы и задачи о процессе Маркова. М.: Наука, 1967.
3. **Нариманян С.М.** Некоторые эргодические теоремы для цепей Маркова: Автореф. дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук, М.: МГУ, 1980.
4. **Молчанов С.А.** Граница Мартина прямого произведения марковских процессов. – Сиб. матем. журн., 1970, т. XI, №2, с. 370-380.
5. **Нариманян С.М.** О единственности гармонических функций для случайных блужданий на счетных группах. – Уч. записки ЕГУ, 1997, №2 (187), с. 3-7.
6. **Aves A.** Limite de quotients paur des marches aleatories sur des groups. – Comptes Rendus, 1973, v. 276, №4, p. 317-320.

Մ.ՅՈՒ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ, Ս. Մ. ՆԱՐԻՄԱՆՅԱՆ

ՀԱՇՎԵԼԻ ԽՄԲԵՐԻ ՎՐԱ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ԹԱՓԱՌՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԲԱՇԽՎԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում ստացված են մի շարք բավարար պայմաններ, որոնք ապահովում են ինչպես կամայական, այնպես էլ որոշ հայտնի հաշվելի խմբերի վրա պատահական թափառումների հավասարաչափ բաշխվածությունը: