ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1,1995 Естественные науки

Математика

УДК 517. 518. 862

Г. В. БАДАЛЯН, В. М. ЕДИГАРЯН

ОБ ОЦЕНКАХ НЕКОТОРЫХ СУММ ИЗ КОЭФФИЦИЕНТОВ КВАЗИПОЛИНОМОВ ПО СИСТЕМЕ МЮНТЦА В $L^2(0,1)$

В работе для некоторых классов P_n многочленов $p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^{\gamma_k}$, где $0=\gamma_0<\gamma_1<\cdots,\gamma_{k+1}-\gamma_k\ge 1$, решается задача оценки величин вида

$$\sup_{p_n\in P_n}\left|\sum_{1}^{l} a_{s_k} b_{s_k}(l,n)\right|,\quad 1\le l\le n$$

где $\left\{s_k\right\}_l^l\subset\left\{k\right\}_0^n, b_{s_k}(l,n)$ - наперед заданные, но не произвольные числа. Приведен явный вид экстремального многочлена из P_n . Рассмотрена связь с классическими задачами.

§ 1. Введение

В настоящей работе рассматриваются последовательности чисел

$$0=\gamma_0<\gamma_1<\gamma_2<\cdots<\gamma_n<\cdots,\gamma_{n+1}-\gamma_n\ge 1 \tag{1}$$

и квазиполиномы

$$p_n(x)=a_0+a_1x^{\gamma_1}+\cdots+a_nx^{\gamma_n}, \tag{2}$$

т. е. полиномы по мюнтцевской системе степеней $\left\{x^{\gamma_k}\right\}$.

Решаются две задачи, описания которых приводятся ниже.

Определение 1. Квазиполиномы (2) принадлежат семейству P_n , если они удовлетворяют условию

$$\|p_n\|_{L^2}=\left(\int_0^1\left|p_n(x)\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\le 1. \tag{3}$$

Суть первой задачи заключается в том, что в отличие от задачи менделеевского типа, где ищется $\sup\limits_{p_n\in P_n}\left|a_k\right|$ (см. [1-4]), здесь ищется

$$\sup_{p_n\in P_n}\left|\sum_{k=1}^{l} a_{s_k} b_{s_k}(l,n)\right|,\quad 1\le l\le n, \tag{4}$$

где $\left\{s_k\right\}_l^l$ - произвольно выбранные числа из 0,1, 2, ..., n, т. е. $\left\{s_k\right\}_1^l\subset\left\{\nu\right\}_0^n$, числа же $b_{s_k}(l,n)$ - заранее заданные, но не произвольные.

Выбор чисел $\left\{b_{s_k}(l,n)\right\}$ (конечно, для всего семейства P_n) обусловлен не только заботой получения точных результатов, но и охватом классических постановок.

Вторая задача - это задача типа первой, но только при дополнительном ограничении.

Определение 1′. Квазиполиномы (2) принадлежат семейству $P_n^*\left(s_1',s_2',\cdots s_{l'}'\right)$, если они удовлетворяют условию (3) и существует набор чисел $\left\{s_k'\right\}_1^{l'}\subset\{\nu\}_0^n$, для которых

$$a_{s_1'}=a_{s_2'}=\cdots=a_{s_{l'}'}=0,\left\{s_j\right\}_1^{l'}\cap\left\{s_j'\right\}_1^{l'}=\varnothing \tag{5}$$

Ставится та же задача нахождения

$$\sup_{p_n\in P_n^*}\left|\sum a_{s_k}\hat{b}_{s_k}^*(l,n\setminus l')\right|, \tag{4'}$$

где, как видно из (4′), заранее заданные числа $\hat{b}_{s_k}^*(l,n\setminus l')$ здесь другие. Их выбор также обусловлен тем, что, во-первых, и здесь получаются точные оценки с указанием экстремальных квазиполиномов и, во-вторых, что немаловажно, - как частное следствие при l=1 ,- получается обобщение результата Л. Шварца на случай с дополнительным ограничением (5).

Более конкретно указанные задачи будут сформулированы перед началом их решения.

Общим в решениях поставленных выше задач является то, что строятся экстремальные квазиполиномы из системы Мюнтца, для которых достигаются (4) и (4') с (5).

Для первой задачи экстремальный квазиполином имеет представление

$$\hat{X}_n\left(x,\left\{s_j\right\}_1^l\right)=\hat{X}_n\left(x,s_1,s_2,\cdots,s_l\right)=\frac{\hat{\kappa}_n(l)}{2\pi i}\int_C\prod_{\nu=0}^n\frac{\zeta-\gamma_\nu'}{\zeta+\gamma_\nu}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod_{j=1}^l\left(\zeta-\gamma_{s_j}'\right)}, \tag{6}$$

где $\gamma_\nu'=\gamma_\nu+1,\nu=1,2,\cdots,n$; простой контур C здесь и впредь охватывает окрестности точек $\left\{-\gamma_\nu\right\}_{\nu=0}^n$, но оставляет вне ограниченной им замкнутой области D точки γ_ν' , где C=∂D. Оказывается, что число $\hat{\kappa}_n(l)$ зависит только от $\left\{s_j\right\}_1^l$ и выбрано так, чтобы имело место

$$\left\|\hat{X}_n\right\|_{L^2}=\left\|\hat{X}_n\left(x,\left\{s_j\right\}_1^l\right)\right\|_{L^2(01)}=1. \tag{3'}$$

Отметим, что ввиду того, что $x\in[0,1]$, мы в качестве контура можем взять бесконечную прямую $(\sigma-i\infty,\sigma+i\infty)$, где $0<\sigma<1$.

Построение $\hat{X}_n\left(x,\left\{s_j\right\}_1^l\right)$, нахождение других компонентов задач 1 и 2 начнем с нахождения $\hat{\kappa}_n(l)$.

Обозначим

$$A_{l,\mu}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod_{j=1}^l\left(\zeta+\gamma_{s_j}\right)\prod_{j=1}^{\mu}\left(-\zeta+\gamma_{s_j}'\right)},\ x\in[0,1]\quad 0<\sigma<1, \tag{7}$$

где $l\geq 1,0\leq\mu,\gamma_\nu'=\gamma_\nu+1,\left\{\gamma_\nu\right\}$ определена в (1), и докажем предложение.

Теорема 1. Для определенной в (7) функции $A_{l,\mu}(x)$ справедливы утверждения

1) $A_{l,\mu}(x) > 0,\ x \in [0\ ,1]$,

2) при фиксированном $x \in [0,1]$ с увеличением l и μ функция $A_{l,\mu}(x)$ уменьшается.

Заметим сперва, что в (7) целые числа s_j принадлежат промежутку [$0,n$], и не будет ограничением считать, что в (7) они расположены по возрастанию.Рас—смотрим теперь функцию

$$\omega_l(x) = \omega_{l,1}(x, s_1, s_2, \cdots s_l) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{j=1}^{l} \left(\zeta + \gamma_{s_j}\right)},\ x \in [0,1]\ 0 < \sigma < 1. \quad (8)$$

Известно, что в промежутке $x \in [01], \omega_l(x) > 0$ (см. [5]), поэтому в силу условий $\gamma_{\nu+1} - \gamma_\nu \geq 1$ имеем $\gamma_{s_{j+1}} - \gamma_{s_j} - 1 \geq 0$, поэтому

$$\omega_{l-1}(x) - \omega_l(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\zeta + \gamma_{s_l} - 1}{\prod_{j=1}^{l} \left(\zeta + \gamma_{s_j}\right)} x^{-\zeta} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\zeta + \gamma_{s_1} + \gamma_{s_l} - \gamma_{s_1} - 1}{\prod_{j=1}^{l} \left(\zeta + \gamma_{s_j}\right)} x^{-\zeta} d\zeta = \quad (9)$$

$$= \omega_{l,2}(x, s_2, s_3, \cdots, s_l) + \delta\omega_{l,1}(x, s_1, s_2, \cdots, s_l) > 0,$$

где $\delta = \gamma_{s_l} - \gamma_{s_1} - 1 \geq 0$.

Из последнего равенства согласно (8)получаем, что при $x \in [0,1]$ $\omega_{l-1}(x) - \omega_l(x) > 0$.

Возвращаясь к доказательству теоремы 1, заметим, что при $x \in [0,1]$

$$0 < \int_0^1 \omega_l(t) t^{\gamma_{s_1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{x^{-\zeta + \gamma'_{s_1}}}{\prod_{j=1}^{l} \left(\zeta + \gamma_{s_j}\right)\left(-\zeta + \gamma'_{s_1}\right)} = x^{\gamma'_{s_1}} A_{l,1}(x) > 0. \quad (10)$$

Допустим, что $A_{l,\mu}(x) > 0, x \in [0,1]$, тогда

$$\int_0^1 A_{l,\mu}(t) t^{\gamma_{s_{\mu+1}}} dt = \frac{x^{\gamma'_{s_\mu}}}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{j=1}^{l} \left(\zeta + \gamma_{s_j}\right) \prod_{j=1}^{\mu+1} \left(-\zeta + \gamma'_{s_j}\right)} = x^{\gamma'_{s_{\mu+1}}} A_{l,\mu}(x) > 0. \quad (10')$$

Этим доказано, что в $x \in [01]$ $A_{l,\mu+1}(x) > 0$.

Очевидно, что $A_{l,1}(1)$ также больше нуля, а поэтому и $A_{l,\mu}(x)$ $x \in [0,1]$ согласно (10) также строго больше нуля в $x \in [0,1]$ для любого μ, если только

$$\gamma_{s_1}, \gamma_{s_2}, \cdots, \gamma_{s_\mu} \subset \{\gamma_\nu\}_0^n.$$

Первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения теоремы 1 легко заметить, что

$$A_{l,\mu}(x)-A_{l,\mu+1}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{-\zeta+\gamma'_{s_{\mu+1}}-1}{\prod\limits_{j=1}^{l}\left(\zeta+\gamma_{s_j}\right)\prod\limits_{j=1}^{\mu+1}\left(-\zeta+\gamma'_{s_j}\right)}x^{-\zeta}d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{-\zeta+\gamma'_{s_1}+\left(\gamma'_{s_{\mu+1}}-\gamma'_{s_1}\right)-1}{\prod\limits_{j=1}^{l}\left(\zeta+\gamma_{s_j}\right)\prod\limits_{j=1}^{\mu+1}\left(-\zeta+\gamma'_{s_j}\right)}x^{-\zeta}d\zeta=A'_{l,\mu+1}(x)+\delta A_{l,\mu+1}(x),$$

где $\delta=\gamma'_{s,\mu+1}-\gamma'_{s_1}-1>0,$

$$A'_{l,\mu+1}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{j=1}^{l}\left(\zeta+\gamma_{s_j}\right)\prod\limits_{j=1}^{\mu+1}\left(-\zeta+\gamma'_{s_j}\right)}>0. \qquad (10'')$$

Этим доказано, что в $x\in[0,1]$

$$A_{l,\mu}(x)-A_{l,\mu+1}(x)>0. \qquad (11)$$

Нетрудно заметить, что аналогичное неравенство получится и для

$$A_{l-1,\mu}(x)-A_{l,\mu}(x),\ \ x\in[0,1]. \qquad (11')$$

Второе утверждение теоремы 1 следует из (11) и (11').

Условимся теперь, число $\hat{\kappa}$, входящее в функцию $\hat{\chi}_n\left(x,\{s_j\}_1^l\right)$ (см.(6)), определить из равенства

$$\hat{\kappa}_n^2(l)=\left[A_{l,l}(1)\right]^{-1},\ l\geq 1\ , \qquad (12)$$

т. е. из равенства

$$\left[\hat{\kappa}_n(l)\right]^{-2}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{d\zeta}{\prod\limits_{j=1}^{l}\left(\zeta+\gamma_{s_j}\right)\left(-\zeta+\gamma'_{s_j}\right)},\ \ 0<\sigma<1. \qquad (12')$$

Как уже сказано, $b_{s_i}(l,n)$ определяются естественным образом по ходу изложения, но целесообразно их задавать заранее.

Обозначим

$$b_{s_i}(l,n)=\frac{\hat{\kappa}_n(l)\cdot R_{l,n}\left(\gamma'_{s_l}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{l}\left(\gamma'_{s_i}+\gamma_{s_j}\right)}\ , \qquad (13)$$

где

$$R_{l,n}(\zeta)=\prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\notin\{s_j\}_1^l}}^{n}\frac{\zeta-\gamma'_\nu}{\zeta+\gamma_\nu} \qquad (14)$$

Впредь будем считать, что числа $\hat{\kappa}_n(l)$ и $b_{s_i}(l,n)$, $i=1,2,\cdots,l$, определены соответственно в (12), (12') и (13), (14).

§2. Решение первой задачи. Основная теорема

Теорема 2. Для определенной в (6) функции $\hat{\chi}_{\cdot}\left(x,\{s_i\}_1^l\right)$ справедливы равенства

$$\int_0^1 x^{\gamma_k}\hat{\chi}_n\left(x,\{s_j\}_1^l\right)dx=\begin{cases}0 & ,\text{если } k\notin\{s_j\}_1^l, \quad (15)\\ b_{s_i}(l,n), & \text{если } k=s_i, i=1,2,\cdots,l, \quad (15')\end{cases}$$

если только $\hat{\kappa}_n(l)$ и $b_{s_i}(l,n)$ определены соответственно из (12') и (13) с (14).

Доказательство. Разберем отдельно два возможных случая:

$$1)\ k\notin\{s_j\}_1^l,\quad 2)\ k=s_i\in\{s_j\}_1^l$$

Начнем с первого случая. Имеем

$$\int_0^1 x^{\gamma_k}\hat{\chi}_n\left(x,\{s_j\}_1^l\right)dx=\frac{\hat{\kappa}_n}{2\pi i}\int_C\prod_{\nu=0}^n\frac{\zeta-\gamma'_\nu}{\zeta+\gamma_\nu}\cdot\frac{x^{-\zeta+\gamma'_k}\Big|_{x=0}^1}{\prod_{j=1}^l\left(-\zeta-\gamma'_{s_j}\right)\left(-\zeta+\gamma'_k\right)}, \tag{16}$$

где контур C=∂D оставляет вне D точки $\gamma'_k=\gamma_k+1,\ k=0,1,\cdots,n$, но охватывает окрестности точек $-\gamma_\nu,\ \nu=0,1,\cdots,n$, поэтому мы его можем выбрать так, чтобы имели $\operatorname{Re}\zeta<1$, $\zeta\in C$, и тогда $\lim\limits_{x\to o+}x^{-\zeta+\gamma'_k}=0,\ \lim\limits_{x\to 1}x^{-\zeta+\gamma'_k}=1.$

Следовательно, в правой части (15) под знаком контурного интеграла $x^{-\zeta+\gamma'_k}\Big|_{x=0}^1$ заменится на единицу. С другой стороны, нетрудно заметить, что там же произведение $\prod_{\nu=0}^n(\zeta-\gamma'_\nu)$ при $k\in\{s_j\}_1^l$ полностью сокращается с находящимся в знаменателе произведением $\prod_{j=1}^l\left(\zeta-\gamma_{s_j}\right)\left(-\zeta+\gamma'_k\right)$, и поэтому под знаком контурного интеграла останется отношение двух полиномов от ζ, где степень знаменателя, по крайней мере, на два выше степени числителя, и , кроме того, вне области $\overline{D}$ с C=∂D знаменатель указанного выше отношения полиномов от ζ в нуль не обращается. В результате под контурным интегралом останется рациональная функция, которая в бесконечности стремится к нулю со скоростью не менее $0\left(\frac{1}{|\zeta|^2}\right)$, $\zeta\to\infty$ и имеет полюсы только в точках $0,-\gamma_1,-\gamma_2,\cdots,-\gamma_n$ области D, и поэтому этот контурный интеграл равен нулю.

Этим равенство (13) теоремы 2 доказано.

Разберем теперь второй случай, т. е. случай, когда $k=s_i,\ s_i\in\{s_i\}_1^l$. Нетрудно заметить, что на этот раз после произведения возможных сокращений под интегралом будем иметь

$$\prod_{\nu=0}^n\frac{\zeta-\gamma'_\nu}{\zeta+\gamma_\nu}\cdot\frac{1}{\prod_{j=1}^l\left(\zeta-\gamma'_{s_j}\right)\left(-\zeta+\gamma'_{s_i}\right)}=R_{l,n}(\zeta)\frac{1}{\prod_{j=1}^l\left(\zeta+\gamma_{s_i}\right)\left(-\zeta+\gamma'_{s_i}\right)}\ , \tag{17}$$

где

$$R_{l,n}(\zeta)=\prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\notin\{s_j\}_1^l}}^n\frac{\zeta-\gamma'_\nu}{\zeta+\gamma_\nu}\ . \tag{14'}$$

По этой причине из (14) следует, что

$$\int_0^1 x^{\gamma_{s_i}} \hat{\chi}_n\left(x,\{s_j\}_1^l\right)dx = \hat{\kappa}_n(l) \operatorname*{Res}_{\zeta=\gamma'_{s_i}} \prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu\notin\{s_j\}_1^l}}^{n} \frac{\zeta-\gamma'_\nu}{\zeta+\gamma_\nu} \frac{1}{\left(-\zeta+\gamma'_{s_i}\right)\prod_{j=1}^{l}\left(\zeta+\gamma_{s_j}\right)} =$$

$$= \hat{\kappa}_n \prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu\notin\{s_j\}_1^l}}^{n} \frac{\gamma'_{s_i}-\gamma'_\nu}{\gamma'_{s_i}+\gamma_\nu} \frac{1}{\prod_{j=1}^{l}\left(\gamma^{\bullet}_{s_i}+\gamma_{s_j}\right)} = b_{s_i}(l,n)$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Определенная в (16) функция $\hat{\chi}_n\left(x,\{s_j\}_1^l\right)$, где число $\hat{\kappa}_n(l)$ определено по (12) - (12"), - квазиполином из семейства ρ_n

Доказательство. То, что $\hat{\chi}_n\left(x,\{s_j\}_1^l\right)$ квазиполином из степеней $\left\{x^{\gamma_\nu}\right\}$, $\nu = 0,1,2,\cdots$, следует из простого вычисления этой функции как сумма вычетов подынтегральной функции контурного интеграла (6).

Поэтому нам следует доказать только то, что она удовлетворяет также условию (3),т. е.

$$\left\|\hat{\chi}_n\right\|^2 = \left\|\hat{\chi}_n\{s_j\}_1^l\right\|^2 = \int_0^1\left|\hat{\chi}_n\left(x,\{s_j\}_1^l\right)\right|^2 dx = 1,$$

если только $\hat{\kappa}_n(l)$ определено по (12').

Имеем

$$\left\|\hat{\chi}_n\right\|^2 = \int_0^1 \hat{\chi}_n\left(x,\{s_j\}_1^l\right)\hat{\chi}_n\left(x,\{s_j\}_1^l\right)dx = \tag{18}$$

$$\frac{\hat{\kappa}_n^2(l)}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} R_{l,n}(\zeta)\frac{d\zeta}{\prod_{j=1}^{l}\left(\zeta+\gamma_{s_j}\right)}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} R_{l,n}(z)\frac{x^{-\zeta+z+1}\Big|_{x=0}^{1}}{\prod_{j=1}^{l}\left(\zeta+\gamma_{s_j}\right)\left(-\zeta-z+1\right)}dz$$

Согласно $0<\sigma<\sigma'<\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0} x^{-\zeta-z+1} = 0$, и из (17) получим

$$\left\|\hat{\chi}_n\left(x,\{s_j\}_1^l\right)\right\|^2 = \frac{\hat{\kappa}_n^2(l)}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} R_{l,n}(\zeta)\frac{d\zeta}{\prod_{j=1}^{l}\left(\zeta+\gamma_{s_j}\right)}\times$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} R_{l,n}(z)\frac{dz}{\prod_{j=1}^{l}\left(z+\gamma_{s_j}\right)\left(-\zeta-z+1\right)}, \tag{18'}$$

где $0<\sigma<\sigma'<\dfrac{1}{2}$, $R_{l,n}(\zeta)$ определена в (14).

Это потому, что здесь также проходят примененные в теореме 2 доводы и выкладки.

Ввиду того, что во внутреннем интеграле первой части (18') $\operatorname{Re}(-\zeta-z+1)>0$, поэтому $\operatorname{Re} z < 1-\operatorname{Re}\zeta$ и поэтому особая точка $z=1-\zeta$ находится справа от линии интегрирования $(\sigma' - i\infty, \sigma' + i\infty)$, этот интеграл, очевидно, равняется вычету подынтегральной рациональной функции в точке $z = 1 - \zeta$, т. е.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma' - i\infty}^{\sigma' + i\infty} R_{l,n}(z)\frac{dz}{\prod_{j=1}^{l}\left(z+\gamma_{s_j}\right)\left(-z+(1-\zeta)\right)} =$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1-\zeta} \frac{R_{l,n}(z)}{\prod_{j=1}^{l}\left(z+\gamma_{s_j}\right)\left[z-(1-\zeta)\right]} = \frac{R_{l,n}(1-\zeta)}{\prod_{j=1}^{l}\left(-\zeta+\gamma'_{s_j}\right)} \qquad (19)$$

Очевидно также, что

$$R_{l,n}(1-\zeta) = \prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu\notin\{s_j\}_1^l}}^{n} \frac{1-\zeta-\gamma'_\nu}{1-\zeta+\gamma_\nu} = \prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu\notin\{s_j\}_1^l}}^{n} \frac{-\zeta-\gamma_\nu}{-\zeta+\gamma'_\nu} = \frac{1}{R_{l,n}(\zeta)} \qquad (20)$$

Поэтому из (18) согласно (19) и (20) получаем

$$\int_0^1 \left|\hat{\chi}_n\left(x,\{s_j\}_1^l\right)\right|^2 dx = \frac{\hat{\kappa}_n^2(l)}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{R_{l,n}(\zeta)}{\prod_{j=1}^{l}\left(\zeta+\gamma_{s_j}\right)} \frac{d\zeta}{R_{l,n}(\zeta)\prod_{j=1}^{l}\left(-\zeta+\gamma'_{s_j}\right)} =$$

$$= \frac{\hat{\kappa}_n^2(l)}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{d\zeta}{\prod_{j=1}^{l}\left(\zeta+\gamma_{s_j}\right)\left(-\zeta+\gamma'_{s_j}\right)} \qquad (18^{\prime\prime})$$

Из (17") согласно (II") получаем, что

$$\|\hat{\chi}_n\|^2 = \int_0^1 \left|\hat{\chi}_n\left(x,\{s_j\}_1^l\right)\right|^2 dx = 1 \qquad (18^{\prime\prime})$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Для любого квазиполинома $p_n(x)$ из семейства P_n справедливо равенство

$$\int_0^1 p_n(x)\hat{\chi}_n\left(x,\{s_j\}_1^l\right)dx = \sum_{j=1}^{l} a_{s_j} b_{s_j}(l,n) \ . \qquad (21)$$

где числа $b_{s_j}(l,n)$ определены в (13) с (14).

На самом деле согласно теореме 2 имеем

$$\int_0^1 p_n(x)\hat{\chi}_n\left(x,\{s_j\}_1^l\right)dx = \sum_{j=1}^{l} a_{s_j}\int_0^1 x^{\gamma_{s_j}}\hat{\chi}_n\left(x,\{s_j\}_1^l\right)dx = \sum_{j=1}^{l} a_{s_j} b_{s_j}(l,n). \qquad (21')$$

Теорема 4 доказана.

Из теорем 3 и 4 следует

Теорема 5 (основная). Для любого определенного в (2) квазиполинома $p_n(x)$ из семейства P_n справедливо неравенство

$$\left|\sum_{j=1}^{l} a_{s_j} b_{s_j}(l,n)\right| \le \|p_n\| \, \|\hat{\chi}_n\| \le 1 \qquad (22)$$

Неравенство (22) превращается в равенство для

$$p_n(x) = \hat{\chi}_n\left(x,\{s_j\}_1^l\right) \in L^2(01) \text{ и } \|\hat{\chi}_n\| = 1 \qquad (23)$$

То, что утверждение теоремы 5 следует из теорем 3 и 4, очевидно. Однако интересно последнее утверждение теоремы проверить непосредственным вычислением значений нужных коэффициентов квазиполинома $\hat{\chi}_n\left(x,\left\{s_j\right\}_1^l\right)$

Их обозначим через a'_{s_i}, $i = 1,2,\cdots,l$.

Имеем

$$\hat{\chi}_n\left(x,\left\{s_j\right\}_1^l\right) = \hat{\kappa}_n(l)\sum_{k=0}^{n}\operatorname*{Res}_{\zeta=-\gamma_k}\frac{\zeta-\gamma'_\nu}{\zeta+\gamma_\nu}\frac{x^{-\zeta}}{\prod\limits_{j=1}^{l}\left(\zeta-\gamma'_{s_j}\right)} =$$

$$\hat{\kappa}_n\sum_{k=0}^{n}\operatorname*{Res}_{\zeta=-\gamma_k} R_{l,n}(\zeta)\frac{x^{-\zeta}}{\prod\limits_{j=1}^{l}\left(\zeta+\gamma_{s_j}\right)} = \sum_{k=0}^{n}a'_k\, x^{\gamma_k}$$

где $R_{l,n}(\zeta)$ определена в (14).

Это значит, что

$$a'_{s_i} = \hat{\kappa}_n(l)\operatorname*{Res}_{\zeta=-\gamma_{s_i}}\frac{R_{l,n}(\zeta)}{\prod\limits_{j=1}^{l}\left(\zeta+\gamma_{s_j}\right)} = \hat{\kappa}_n(l)\frac{R_{l,n}\left(-\gamma_{s_i}\right)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{l}\left(-\gamma_{s_i}+\gamma_{s_j}\right)} \tag{24}$$

Убедимся, что тогда $\left|\sum\limits_{j=1}^{l}a'_{s_j}b_{s_j}(l,n)\right| = 1$.

На самом деле согласно (13) и (24)

$$a'_{s_i}b_{s_i}(l,n) = \hat{\kappa}_n^2(l)\frac{R_{l,n}\left(-\gamma_{s_i}\right)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{l}\left(-\gamma_{s_i}+\gamma_{s_j}\right)}\frac{R_{l,n}\left(\gamma'_{s_i}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{l}\left(\gamma'_{s_i}+\gamma_{s_i}\right)}.$$

Заметим теперь, что

$$R_{l,n}\left(-\gamma_{s_i}\right)R_{l,n}\left(\gamma'_{s_i}\right) = \prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\notin\{s_i\}_1^l}}^{n}\frac{-\gamma'_{s_i}-\gamma'_\nu}{\gamma'_{s_i}+\gamma_\nu}\cdot\prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\notin\{s\}_1^l}}^{n}\frac{\gamma'_{s_i}-\gamma'_\nu}{\gamma'_{s_i}+\gamma_\nu} = 1,$$

поэтому

$$a'_{s_i}b_{s_i}(l,n) = \frac{\hat{\kappa}_n^2(l)}{\prod\limits_{j=1}^{l}\left(-\gamma_{s_i}+\gamma'_{s_j}\right)\prod\limits_{j=1}^{l}\left(\gamma_{s_i}+\gamma'_{s_j}\right)} =$$

$$= \hat{\kappa}_n^2(l)\operatorname*{Res}_{\zeta=-\gamma_{s_i}}\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{l}\left(\zeta+\gamma_{s_j}\right)\left(-\zeta+\gamma'_{s_j}\right)}. \tag{25}$$

Из равенства (25) следует, что

$$\sum_{j=1}^{l}a'_{s_j}b_{s_j}(l,n) = \hat{\kappa}_n^2(l)\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{l}\left(\zeta+\gamma_{s_i}\right)\left(-\zeta+\gamma'_{s_j}\right)}, 0<\sigma<1.$$

Следовательно, согласно (12^*) получаем

$$\sum_{i=1}^{l}a'_{s_i}b_{s_i}(l,n) = 1. \tag{26}$$

Этим доказана не только достижимость равенства (22), но и указан экспериментальный квазиполином.

Приведем два простых следствия теоремы 5.

Следствие 5.1. Из теоремы 5 при $l=1$, $\{s_i\}_1^l = s_1$ следует справедливость равенства

$$\sup_{p_n \in P_n} |a_{s_1}| = \sqrt{\gamma_{s_1} + \gamma'_{s_1}} \prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq s_1}}^{n} \frac{\gamma'_{s_1} + \gamma_\nu}{|\gamma_{s_1} - \gamma_\nu|}. \tag{27}$$

На самом деле, в силу $l=1$ из (12) имеем

$$\left[\hat{\kappa}_n(1)\right]^{-2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{d\zeta}{(\zeta + \gamma_{s_1})(-\zeta + \gamma'_{s_1})}, \quad 0 < \sigma < 1,$$

поэтому

$$\hat{\kappa}_n(1) = \sqrt{\gamma_{s_1} + \gamma'_{s_1}}. \tag{28}$$

Далее из (13) и (14) имеем

$$b_{s_1}(1,n) = \frac{\hat{\kappa}_n(1)}{\gamma'_{s_1} + \gamma_{s_1}} \prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq s_1}}^{n} \frac{\gamma_{s_1} - \gamma_\nu}{\gamma'_{s_1} + \gamma_\nu}. \tag{29}$$

Из (26) при $l=1$, $\{s_i\}_1^l = s_1$ согласно (29) следует справедливость равенства (27)

Следствие 5.1 совпадает с ранее известным результатом Л. Шварца (см.[3]).

Следствие 5.2. Пусть P'_n – подкласс P_n, когда коэффициент a_{s_2} при $x^{\gamma_{s_2}}$ любого квазиполинома этого подкласса равняется нулю. Тогда справедливо неравенство

$$\sup_{p_n \in P'_n} |a_{s_1}| \leq \sqrt{2(\gamma_{s_1} + \gamma'_{s_1})(\gamma_{s_1} + \gamma'_{s_2})(\gamma_{s_2} + \gamma'_{s_2})} \prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq s_1, s_2}}^{n} \frac{\gamma'_{s_1} + \gamma_\nu}{|\gamma_{s_1} - \gamma_\nu|} \tag{30}$$

На самом деле, согласно теореме 5 нам здесь следует исходить из неравенства

$$|a_{s_1} b_{s_1}(2,n) + a_{s_2} b_{s_2}(2,n)| = |a_{s_1} b_{s_1}(2,n)| \leq 1 \tag{31}$$

где

$$b_{s_1}(2,n) = \hat{\kappa}_n(2) \prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq s_1, s_2}}^{n} \frac{\gamma_{s_1} - \gamma_\nu}{\gamma'_{s_1} + \gamma_\nu}, \tag{32}$$

$$\hat{\kappa}_n(2) = \sqrt{2(\gamma_{s_1} + \gamma'_{s_1})(\gamma_{s_1} + \gamma'_{s_2})(\gamma_{s_2} + \gamma'_{s_2})} \tag{33}$$

В отличие от (27) неравенство, как это будет видно из приведенного в следующем параграфе решения второй задачи, где класс функций P^*_n определяется по определению 1', не обязано превратиться в равенство, хотя бы поэтому, что $P^*_n \subset P_n$ строго.

Именно этим и обусловлена правомерность постановки приведенной в начале статьи второй задачи, к точному решению которой мы и приходим.

§3. Решение второй задачи

Очевидно, что здесь также, как и в решении первой задачи, мы должны определить аналог $\hat{\kappa}_n(l)$ и $b_{s_i}(l,n)$, следовательно, и экстремальный квазиполином из класса P^*_n.

Проследив ход решения первой задачи убеждаемся, что искомый экстремальный квазиполином здесь имеет вид

$$\hat{\chi}_n\left(x,\{s_j\}_1^l,\{s'_j\}_1^{l'}\right)=\frac{\hat{\kappa}_n(l,l')}{2\pi i}\int_C \prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\notin\{s'_k\}_1^{l'}}}^{n} \frac{\zeta-\gamma_\nu}{\zeta+\gamma_\nu}\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\prod_{j=1}^{l}\left(\zeta-\gamma'_{s_j}\right)}, \tag{34}$$

где

$$\{s_i\}_1^l,\{s'_i\}_1^{l'}\subset\{\nu\}_0^n,\ \{s_i\}_1^l\cap\{s'_i\}_1^{l'}=\varnothing \tag{35}$$

1. Это значит, что основное различие заключается в том, что рациональные функции под знаком контурных интегралов (6) и (34) определяются соответственно как

$$R_{n,l}(\zeta)=\prod_{\nu=0}^{n}\frac{\zeta-\gamma'_\nu}{\zeta+\gamma_\nu}\frac{1}{\prod_{j=1}^{l}(\zeta-\gamma'_\nu)} \quad \text{и} \quad R^*_{n,l'}(\zeta)=\prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq\{s'_j\}_1^{l'}}}^{n}\frac{\zeta-\gamma'_\nu}{\zeta+\gamma_\nu}\frac{1}{\prod_{j=1}^{l'}\left(\zeta-\gamma'_{s_j}\right)} \tag{36}$$

и равны $R^*_{n,l'}(\zeta),\ \nu\notin\{s'_j\}$.

2. $\hat{\kappa}_n(l)$ в (6) определяются согласно теореме 1 из равенства (12') и очевидно, что оно зависит только от $\{s_j\}_1^l$, т. е. не зависит от $\{\gamma_j\}_0^n$ из (6) и $\{\gamma_\nu\}_0^n\setminus\{s'_j\}_1^{l'}$ из (34).

Это значит, что есть основание полагать

$$\hat{\kappa}_n(l,l')=\hat{\kappa}_n(l)=\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{d\zeta}{\prod_{j=1}^{l}\left(\zeta+\gamma_{s_j}\right)\left(-\zeta+\gamma'_{s_j}\right)}\right)^{-1},\quad 0<\sigma<1 \tag{12''}$$

Далее, проследив ход доказательства теоремы 2, убеждаемся, что она останется в силе, если определенные в (13) числа $b_{s_j}(l,n)$ заменить на $b^*_{s_j}(l,l',n)$, где

$$b^*_{s_j}(l,l',n)=\hat{\kappa}_n(l)\left.\prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\notin\{s'_j\}_1^{l'}\cup\{s_j\}_1^{l}}}^{n}\frac{\zeta-\gamma'_\nu}{\zeta+\gamma_\nu}\frac{1}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{l}\left(\zeta+\gamma'_{s_j}\right)}\right|_{\zeta=\gamma'_{s_i}} \tag{13'}$$

Ниже приводим аналоги теорем 2-5 на случай второй задачи.

Очевидно, что они доказываются повторением всего хода доказательств теорем 2-5, и поэтому мы ограничимся только их формулировками.

Теорема 2'. Для определенного в (34) квазиполинома $\hat{\chi}_n\left(x,\{s_j\}_1^l,\{s'_j\}_1^{l'}\right)$ справедливы равенства

$$\int_0^1 x^{\gamma_k}\hat{\chi}_n\left(x,\{s_j\}_1^l,\{s'_j\}_1^{l'}\right)dx=\begin{cases}0,\ \text{если}\ k\in\{\nu\}_0^n\setminus\{s_j\}_1^l\cup\{s'_j\}_1^{l'},\\ b^*_{s_j}(l,l',n),\ \text{если}\ k=s_i\in\{s_i\}_1^l,\end{cases} \tag{37}$$

где $\hat{\kappa}_n(l,l')=\hat{\kappa}_n(l)$ и $b^*_{s_i}(l,l',n)$ определены соответственно в (12'') и (13').

Теорема 3'. Определенный в (34) $\hat{\chi}_n\left(x,\{s_j\}_1^l\{s_j'\}_l^{l'}\right)$, где число $\hat{\kappa}_n(l,l')=\hat{\kappa}_n(l)$ определено в (12"), является квазиполиномом из семейства P_n^* (определение 1').

Теорема 4'. Для любого квазиполинома p_n из семейства P_n^* справедливо равенство

$$\int_0^1 p_n(x)\hat{\chi}_n\left(x,\{s_j\}_1^l,\{s_j'\}_1^{l'}\right)dx=\sum_{j=1}^l a_{s_j}b_{s_j}^*(l,l',n),$$

где $b_{s_j}^*(l,l',n)$ определено в (13').

Теорема 5'. Для любого квазиполинома из семейства P_n^* справедливо неравенство

$$\left|\sum_{j=1}^l a_{s_j}b_{s_j}^*(l,l',n)\right|\le\left\|P_n^*\right\|\left\|\hat{\chi}_n\left(x,\{s_j\}_1^l,\{s_j'\}_1^{l'}\right)\right\|\le 1. \tag{22'}$$

Неравенство (22') превращается в равенство, когда

$$P_n^*(x)=\hat{\chi}_n\left(x,\{s_j\}_1^l,\{s_j'\}_1^{l'}\right).$$

Приведем одно следствие теоремы 5', которое обобщает первое следствие и уточняет второе следствие теоремы 5.

Следствие 5'.1. Пусть квазиполином $p_n^*(x)\in P_n^*$, где $a_{s_1'}=a_{s_2'}=\cdots=a_{s_{l'}'}=0$, тогда для любого $s_i\notin\{s_j'\}_1^{l'}$ справедливо достижимое неравенство

$$\left|a_{s_i}b_{s_i}^*\left(s_i,\{s_j'\}_1^{l'},n\right)\right|\le 1,$$

где $b_{s_i}^*\left(l=1,\{s_j'\}_1^{l'},n\right)$ определено в (13').

Легко заметить, что при пустоте $\{s_j'\}_1^{l'}$ согласно (22') неравенство (27') совпадает с неравенством (27), поэтому обобщает первое следствие теоремы 5. С другой стороны, неравенство (22) уточняет второе следствие той же теоремы 5, если заменить s_2 из второго следствия теоремы 5 на $s_1'=\{s_j'\}_1^{l'}=\{s_j'\}_1^1$.

ЕГУ, ЕрПИ *Поступила 21.03.1994*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Markoff A.** Sur une queston posee por Mendeleeff. - Bull Acad. de Saint-Peterburg, 1890, v. 52, p. 1-24.
2. **Bernstein S.** Lecons sur les properties extremalies et la meilleure approximation des fonctions analitiques d'une variable reele, Paris, Guathier-Villars, 1926.
3. **Schwartz L.** Etude des sommes dexponentielies. Paris, Hermann, 1959.
4. **Бадалян Г. В., Едигарян В. М.** Обобщение одной задачи Менделеева.- Уч. записки ЕГУ,1988, № 1(167), с. 3-10.
5. **Бадалян Г. В.** Квазистепенной ряд и квазианалитические классы функций. М: Наука, 1990.

$L^2(0,1)$ ՆՈՐՄԱՅՈՎ ՄՅՈՒՆՑԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՔՎԱԶԻԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ԳՈՒՄԱՐՆԵՐԻ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Աշխատանքում $p_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{\gamma_\nu}$ բազմանդամների որոշակի P_n դասերի համար, որտեղ $0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \cdots, \gamma_{k+1} - \gamma_k \geq 1$, դրվում և լուծվում է $\sup\limits_{p_n \in P_n} \left| \sum_{k=1}^{l} a_{s_k} b_{s_k}(l,n) \right|$ $(1 \leq l \leq n)$ գումարների գնահատման խնդիրը, որտեղ $\{s_k\}_1^l \subset \{\nu\}_0^n, b_{s_k}(l,n)$ նախօրոք տրված, սակայն ոչ կամայական թվեր են: Բերվում է էքստրեմալ բազմանդամի տեսքը:

Ցույց է տրվում կապը դասական խնդիրների հետ: