ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Բնական գիտություններ 2, 1989 Естественные науки

Математика

УДК 517.5

Б.А.СААКЯН

О РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

В работе рассматриваются уравнения вида $D_{\infty}^{1/\rho}+\lambda y=f(x)$, где $\lambda>0,\rho\geqslant 1, D_{\infty}^{1/\rho}$ —дифференциальный оператор Вейля. Для функции некоторых классов рассматриваются задачи типа Коши и решаются эти задачи.

§1. Предварительные леммы

В этой работе рассматриваются дифференциальные уравнения вида

$$D_{\infty}^{\frac{1}{\rho}}y+\lambda y=f(x), \tag{1}$$

где $\lambda>0,\ \rho\geqslant 1,\ 1-\alpha=\frac{1}{\rho},\ D_{\infty}^{\frac{1}{\rho}}=\frac{d}{dx}D_{\infty}^{-\alpha}$,

$D_{\infty}^{-\alpha}$— интегральный оператор Вейля.

Известно [1], что если $f(x)\equiv 0$, то функция $y(x)=e^{-\lambda^{\rho}x}$ является решением уравнения (1). Известно также [2], что если $\lambda<0, x^{-\alpha}|f(x)|\in L(0,\infty),(0<\alpha<1)$, то функция

$$y(x,\lambda)=-\int_{x}^{\infty}E_{\rho}[\lambda(t-x)^{\frac{1}{\rho}};\frac{1}{\rho}]\,(t-x)^{\frac{1}{\rho}-1}f(t)\,dt \tag{2}$$

является решением уравнения (1).

Здесь нас интересует тот случай, когда $\lambda>0$. С этой целью приведем следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $\rho\geqslant 1\,(1-\alpha=\frac{1}{\rho}),\gamma>0$.

Тогда имеют место формулы

а) $D_{\infty}^{-\alpha}\{x^{k}e^{-\gamma^{\rho}x}\}=$

$$=\sum_{j=0}^{k}c_{k}^{j}\gamma^{-\rho(k+\alpha-j)}\frac{\Gamma(k+\alpha-j)}{\Gamma(\alpha)}x^{j}e^{-\gamma^{\rho}x},x\in(0,+\infty),\ k\geqslant 0; \tag{3}$$

б) $D_{\infty}^{\frac{1}{\rho}}\{x^{k}e^{-\gamma^{\rho}x}\}=$

$$=\sum_{j=0}^{k-1}b_{j}^{(k)}x^{j}e^{-\gamma^{\rho}x}-\gamma\,x^{k}e^{-\gamma^{\rho}x},\quad x\in(0,+\infty),\ k\geqslant 1, \tag{4}$$

а при $k=0$ $D_{\infty}^{\frac{1}{\rho}}\{e^{-\gamma^{\rho}x}\}=-\gamma e^{-\gamma^{\rho}x}$, где

$$b_j^{(k)}=\frac{\gamma^{1-\rho(k-j)}}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(k+\alpha-j-1)\,[c_k^{j+1}(j+1)-c_k^j(k+\alpha-j-1)];$$

в) $\dfrac{d}{d(\gamma^\rho)}D_\infty^{\frac{1}{\rho}}(x^k e^{-\gamma^\rho x})=$

$$=D_\infty^{\frac{1}{\rho}}\frac{d}{d(\gamma^\rho)}\{x^k e^{-\gamma^\rho x}\},\quad x\in(0,+\infty),k\geqslant 0. \tag{5}$$

Доказательства не приводим, поскольку оно связано с нетрудными вычислениями.

Лемма 2. Пусть $\rho\geqslant 1,\lambda>0,\gamma>0(\gamma\neq\lambda)$.

Тогда для любого $n\geqslant 0$ имеет место равенство

$$\frac{d}{d(\gamma^\rho)}D_\infty^{\frac{1}{\rho}}\left\{\frac{d^n}{d(\gamma^\rho)^n}\left[\frac{e^{-\gamma^\rho x}-e^{-\lambda^\rho x}}{\gamma-\lambda}\right]\right\}=$$

$$=D_\infty^{\frac{1}{\rho}}\left\{\frac{d^{n+1}}{d(\gamma^\rho)^{n+1}}\left[\frac{e^{-\gamma^\rho x}-e^{\lambda^\rho x}}{\gamma-\lambda}\right]\right\}. \tag{6}$$

Доказательство. Применяя формулу Лейбница для производных высших порядков и пользуясь леммой 1, будем иметь

$$\frac{d}{d(\gamma^\rho)}D_\infty^{\frac{1}{\rho}}\left\{\frac{d^n}{d(\gamma^\rho)^n}\left[\frac{e^{-\gamma^\rho x}-e^{-\lambda^\rho x}}{\gamma-\lambda}\right]\right\}=$$

$$=\sum_{j=0}^{n}C_n^j\frac{d^{n+1-j}}{d(\gamma^\rho)^{n+1-j}}\{(\gamma-\lambda)^{-1}\}D_\infty^{\frac{1}{\rho}}\left\{\frac{d^j}{d(\gamma^\rho)^j}(e^{-\gamma^\rho x}-e^{-\lambda^\rho x})\right\}+$$

$$+\sum_{j=0}^{n}C_n^j\frac{d^{n-j}}{d(\gamma^\rho)^{n-j}}\{(\gamma-\lambda)^{-1}\}D_\infty^{\frac{1}{\rho}}\left\{\frac{d^{j+1}}{d(\gamma^\rho)^{j+1}}(e^{-\gamma^\rho x}-e^{-\lambda^\rho x})\right\}=$$

$$=D_\infty^{\frac{1}{\rho}}\Big[C_n^0\frac{d^{n+1}}{d(\gamma^\rho)^{n+1}}\{(\gamma-\lambda)^{-1}\}(e^{-\gamma^\rho x}-e^{-\lambda^\rho x})+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(C_n^j+C_n^{j-1})\frac{d^{n+1-j}}{d(\gamma^\rho)^{n+1-j}}\{(\gamma-\lambda)^{-1}\}\frac{d^j}{d(\gamma^\rho)^j}\{e^{-\gamma^\rho x}-e^{-\lambda^\rho x}\}+$$

$$+C_n^n(\gamma-\lambda)^{-1}\frac{d^{n+1}}{d(\gamma^\rho)^{n+1}}(e^{-\gamma^\rho x}-e^{-\lambda^\rho x})=$$

$$=D_\infty^{\frac{1}{\rho}}\Big(\sum_{j=0}^{n+1}C_{n+1}^j\frac{d^{n+1-j}}{d(\gamma^\rho)^{n+1-j}}\{(\gamma-\lambda)^{-1}\}\frac{d^j}{d(\gamma^\rho)^j}\{e^{-\gamma^\rho x}-e^{-\lambda^\rho x}\}\Big)=$$

$$=D_\infty^{\frac{1}{\rho}}\left[\frac{d^{n+1}}{d(\gamma^\rho)^{n+1}}\left(\frac{e^{-\gamma^\rho x}-e^{-\lambda^\rho x}}{\gamma-\lambda}\right)\right],(C_n^j+C_n^{j-1}=C_{n+1}^j).$$

Лемма доказана.

§2. Основной результат

Обозначим через $C_{\rho,\lambda}^{(1)}[0,+\infty)$ класс функций $f(x)$, удовлетворяющих условиям

1. $f^{(j)}(x)\in C(0,+\infty),j=0,1;$

2. $e^{\lambda^\rho x}|f^{(j)}(x)|\in L(0,+\infty), j=0,1.$

Легко видеть, что каждая функция вида

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j e^{-\gamma^\rho x} (\gamma>\lambda)$$

принадлежит классу $C^{(1)}_{\rho,\lambda}[0,+\infty)$.

Теорема 1. Пусть $\rho\geqslant 1$, $\lambda>0$, $e^{\lambda^\rho x}|f(x)|\in L(0,+\infty)$. Тогда следующая задача типа Коши

$$D_{\infty}^{\frac{1}{\rho}} y+\lambda y=f(x), \tag{7}$$

$$y(+\infty)=0, \tag{8}$$

имеет решение $y(x,\lambda)$, представимое в виде

$$y(x,\lambda)=-\int_x^\infty E_\rho\left[\lambda(t-x)^{\frac{1}{\rho}};\frac{1}{\rho}\right](t-x)^{\frac{1}{\rho}-1} f(t)\,dt. \tag{9}$$

Доказательство. Доказательство приводится способом проверки, но сначала покажем, что интеграл в правой части (3) сходится абсолютно.

Из известного неравенства (см. [3], гл.III, (2.31)), в частности, следует оценка

$$\left|E_\rho(\lambda x^{\frac{1}{\rho}};\frac{1}{\rho})\right|\leqslant M_1(1+\lambda x^{\frac{1}{\rho}})^{\rho-1}e^{\lambda^\rho x}+\frac{M_2}{1+\lambda x^{\frac{1}{\rho}}},\quad x\in(0,+\infty),$$

где M_1, M_2 — постоянные числа, согласно которой будем иметь

$$\left|E_\rho(\lambda x^{\frac{1}{\rho}};\frac{1}{\rho})x^{\frac{1}{\rho}-1}f(x)\right|\leqslant M_1(1+\lambda x^{\frac{1}{\rho}})x^{\frac{1}{\rho}-1}e^{\lambda^\rho x}|f(x)|+$$

$$+M_2\frac{x^{\frac{1}{\rho}-1}}{1+\lambda x^{\frac{1}{\rho}}}|f(x)|. \tag{10}$$

Поскольку $e^{\lambda^\rho x}|f(x)|\in L|0,\infty)$, то из (10) следует, что интеграл в правой части (9) сходится абсолютно.

По определению оператора $D_\infty^{-\alpha}$ имеем

$$D_\infty^{-\alpha}y(x,\lambda)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1}dt\int_t^\infty E_\rho[\lambda(\tau-t)^{\frac{1}{\rho}};\frac{1}{\rho}](\tau-t)^{\frac{1}{\rho}-1}f(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда, поменяв порядок интегрирования, что законно по теореме Фубини, и, пользуясь известной формулой (см. [3], гл.III, (1.16)), будем иметь

$$D_\infty^{-\alpha}y(x,\lambda)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty f(\tau)\,d\tau\int_x^\tau (t-x)^{\alpha-1}E_\rho[\lambda(\tau-t)^{\frac{1}{\rho}};\frac{1}{\rho}](\tau-t)^{\frac{1}{\rho}-1}dt=$$

$$=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty f(\tau)\,d\tau\int_0^{\tau-x}[(\tau-x)-\nu]^{\alpha-1}E_\rho(\lambda\nu^{\frac{1}{\rho}};\frac{1}{\rho})\nu^{\frac{1}{\rho}-1}d\nu=$$

$$=-\int_x^\infty E_\rho[\lambda(\tau-x)^{\frac{1}{\rho}};1]f(\tau)\,d\tau. \tag{11}$$

Заметив, что

$$\frac{d}{dx}\left\{E_\rho[\lambda(\tau-x)^{\frac{1}{\rho}};1]\right\}=-\lambda E_\rho[\lambda(\tau-x)^{\frac{1}{\rho}};\frac{1}{\rho}](t-x)^{\frac{1}{\rho}-1},$$

ввиду определения оператора $D_\infty^{\frac{1}{\rho}}$, пользуясь формулой (5), получим

$$D_\infty^{\frac{1}{\rho}}y(x,\lambda)=\frac{d}{dx}D_\infty^{-\alpha}y(x,\lambda)=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(-\int_x^\infty E_\rho[\lambda(\tau-x)^{\frac{1}{\rho}};1]f(\tau)d\tau\right)=$$

$$=f(x)-\int_x^\infty f(\tau)\frac{d}{dx}\left\{E_\rho[\lambda(\tau-x)^{\frac{1}{\rho}};1]\right\}d\tau=$$

$$=f(x)+\lambda\int_x^\infty E_\rho[\lambda(\tau-x)^{\frac{1}{\rho}};\frac{1}{\rho}](\tau-x)^{\frac{1}{\rho}-1}f(\tau)d\tau=$$

$$=f(x)-\lambda y(x,\lambda),$$

т.е. $D_\infty^{\frac{1}{\rho}}y(x,\lambda)+\lambda y(x,\lambda)\equiv f(x)$. Легко видеть, что $y(x,\lambda)|_{x=+\infty}=0$.

Теорема 2. Пусть $\rho\geqslant 1$, $\lambda>0$, $f(x)\in C^{(1)}_{\rho,\lambda}[0,+\infty)$.

Тогда следующая задача типа Коши

$$D_\infty^{\frac{1}{\rho}}y+\lambda y=f(x), \tag{12}$$

$$y(0)=0, \tag{13}$$

имеет решение $y(x,\lambda)$, представимое в виде

$$y(x,\lambda)=\int_0^x e^{-\lambda^\rho(x-t)}F_\lambda^{(\rho)}[f](t)dt, \tag{14}$$

где

$$F_\lambda^{(\rho)}[f](t)\equiv-\left(\frac{d}{dt}+\lambda^\rho\right)\left(\int_t^\infty E_\rho[\lambda(\tau-t)^{\frac{1}{\rho}};\frac{1}{\rho}](\tau-t)^{\frac{1}{\rho}-1}f(\tau)d\tau\right). \tag{15}$$

Доказательство. Обозначив

$$\varphi(t)\equiv-\int_t^\infty E_\rho[\lambda(\tau-t)^{\frac{1}{\rho}};\frac{1}{\rho}](\tau-t)^{\frac{1}{\rho}-1}f(\tau)d\tau, \tag{16}$$

легко можно убедиться в том, что существует $\varphi'(t)$, и функция $\varphi(t)$, согласно теореме 1, является решением задачи (7) — (8).

Покажем, что функция $y(x,\lambda)$ является решением задачи (12) — (13).

В самом деле,

$$y(x,\lambda)=\int_0^x e^{-\lambda^\rho(x-t)}\left(\frac{d}{dt}+\lambda^\rho\right)\{\varphi(t)\}dt=$$

$$=\int_0^x e^{-\lambda^\rho(x-t)}\frac{d}{dt}\{\varphi(t)\}dt+\lambda^\rho\int_0^x e^{-\lambda^\rho(x-t)}\varphi(t)dt=$$

$$=\varphi(t)e^{-\lambda^\rho(x-t)}\Big|_0^x-\lambda^\rho\int_0^x e^{-\lambda^\rho(x-t)}\varphi(t)dt+$$

$$+\lambda^{\rho}\int_{0}^{x} e^{-\lambda^{\rho}(x-t)}\varphi(t)\,dt=\varphi(x)-\varphi(0)e^{-\lambda^{\rho}x}.$$

Поскольку $(D_{\infty}^{\frac{1}{\rho}}+\lambda)\{e^{-\lambda^{\rho}x}\}\equiv 0$ и

$$(D_{\infty}^{\frac{1}{\rho}}+\lambda)\{\varphi(x)\}\equiv f(x), \tag{17}$$

то $D_{\infty}^{\frac{1}{\rho}}y(x,\lambda)+\lambda y(x,\lambda)\equiv f(x)$.

Из (17) следует, что $y(x,\lambda)\,|\,|_{x=0}=0$.

Отметим, что вопрос о единственности решения в классе функций L $(0,+\infty)$ остается открытым.

Теорема 3. Пусть $\rho\geqslant 1$, $\lambda>0$, $\gamma>0$ $(\gamma\neq\lambda)$.

Тогда следующая задача типа Коши

$$D_{\infty}^{\frac{1}{\rho}}y+\lambda y=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j e^{-\gamma^{\rho}x}, \tag{18}$$

$$y(0)=0, \tag{19}$$

имеет решение

$$y(x,\lambda)=\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+1}a_j\frac{d^j}{d(\gamma^{\rho})^j}\left[\frac{e^{-\gamma^{\rho}x}-e^{-\lambda^{\rho}x}}{\gamma-\lambda}\right], \tag{20}$$

где $a_j(j=0,1,\ldots,n)$ —действительные постоянные.

Доказательство. Сначала же заметим: поскольку оператор $D_{\infty}^{\frac{1}{\rho}}$ линейный, то достаточно доказать теорему в случае, когда правая часть уравнения (18) имеет вид $f(x)=x^je^{-\gamma^{\rho}x}$. Тогда покажем, что задача (18)—(19) имеет решения

$$y(x,\lambda)=(-1)^{j+1}\frac{d^j}{d(\gamma^{\rho})^j}\left[\frac{e^{-\gamma^{\rho}x}-e^{-\lambda^{\rho}x}}{\gamma-\lambda}\right]. \tag{21}$$

Заметим, что если $\gamma>\lambda$, то функция $f(x)=x^je^{-\gamma^{\rho}x}$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и, следовательно, задача типа Коши имеет решение

$$y(x,\lambda)=\int_{0}^{x} e^{-\lambda^{\rho}(x-t)}F_{\lambda}^{(\rho)}[t^je^{-\gamma^{\rho}t}]\,dt, \tag{22}$$

где

$$F_{\lambda}^{(\rho)}[t^je^{-\gamma^{\rho}t}]\equiv-\left(\frac{d}{dt}+\lambda^{\rho}\right)\left(\int_{t}^{\infty}E_{\rho}[\lambda(\tau-t)^{\frac{1}{\rho}};\frac{1}{\rho}](\tau-t)^{\frac{1}{\rho}-1}\tau^je^{-\gamma^{\rho}\tau}d\tau\right). \tag{23}$$

Вычислим интеграл

$$\int_{t}^{\infty}E_{\rho}[\lambda(\tau-t)^{\frac{1}{\rho}};\frac{1}{\rho}](\tau-t)^{\frac{1}{\rho}-1}\tau^je^{-\gamma^{\rho}\tau}d\tau=$$

$$=\int_{0}^{\infty}(\nu+t)^je^{-\gamma^{\rho}(\nu+t)}E_{\rho}[\lambda\nu^{\frac{1}{\rho}};\frac{1}{\rho}]\nu^{\frac{1}{\rho}-1}d\nu.$$

Из известной формулы (см. [3], гл. III(3.7)), в частности, при $\gamma>\lambda$ следует

$$\int_{0}^{+\infty}e^{-\gamma^{\rho}(\nu+t)}E_{\rho}(\lambda\nu^{\frac{1}{\rho}};\frac{1}{\rho})\nu^{\frac{1}{\rho}-1}d\nu=\frac{e^{-\gamma^{\rho}t}}{\gamma-\lambda}.$$

Отсюда после j-кратного дифференцирования по параметру γ^ρ получим

$$\int_0^{+\infty} (\nu+t)^j e^{-\gamma^\rho(\nu+t)} E_\rho = (\lambda\nu^{\frac{1}{\rho}};\frac{1}{\rho})\nu^{\frac{1}{\rho}-1} d\nu =$$

$$(-1)^j \frac{d^j}{d(\gamma^\rho)^j}[\frac{e^{-\gamma^\rho t}}{\gamma-\lambda}], \tag{24}$$

тогда (23) принимает вид

$$F_\lambda^{(\rho)}[t^j e^{-\gamma^\rho t}] = (-1)^{j+1}(\frac{d}{dt}+\lambda^\rho)\left\{\frac{d^j}{d(\gamma^\rho)^j}\left[\frac{e^{-\gamma^\rho t}}{\gamma-\lambda}\right]\right\},$$

согласно чему будем иметь

$$y(x,\lambda) = (-1)^{j+1}\int_0^x e^{-\lambda^\rho(x-t)}(\frac{d}{dt}+\lambda^\rho)\left\{\frac{d^j}{d(\gamma^\rho)^j}[\frac{e^{-\gamma^\rho t}}{\gamma-\lambda}]\right\}dt =$$

$$= (-1)^{j+1}\int_0^x e^{-\lambda^\rho(x-t)}\frac{d^j}{d(\gamma^\rho)^j}[\frac{(\lambda^\rho-\gamma^\rho)}{\lambda-\gamma}e^{-\gamma^\rho t}]dt =$$

$$= (-1)^{j+1}\frac{d^j}{d(\gamma^\rho)^j}[\frac{\lambda^\rho-\gamma^\rho}{\lambda-\gamma}\int_0^x e^{-\lambda^\rho(x-t)}e^{-\gamma^\rho t}dt] =$$

$$= (-1)^{j+1}\frac{d^j}{d(\gamma^\rho)^j}\left[\frac{e^{-\gamma^\rho x}-e^{-\lambda^\rho x}}{\gamma-\lambda}\right].$$

Легко можно убедиться в том, что изменение порядка дифференцирования и вынесения оператора дифференцирования из-под знака интеграла законно.

Теорема доказана при случае $\gamma > \lambda$.

Покажем теперь,что теорема верна при любом $0<\gamma\neq\lambda$. Проводим рассуждения математической полной индукции. При $j=0$ можно убедиться в справедливости теоремы непосредственно проверкой. Предположим, что утверждение верно при $j=n$, покажем,что оно верно при $j=n+1$. Поскольку утверждение верно при $j=n$, то имеет место равенство

$$D_\infty^{\frac{1}{\rho}}\left\{(-1)^{n+1}\frac{d^n}{d(\gamma^\rho)^n}\left[\frac{e^{-\gamma^\rho x}-e^{-\lambda^\rho x}}{\gamma-\lambda}\right]\right\} +$$

$$+\lambda(-1)^{n+1}\frac{d^n}{d(\gamma^\rho)^n}\left[\frac{e^{-\gamma^\rho x}-e^{-\lambda^\rho x}}{\gamma-\lambda}\right] \equiv x^n e^{-\gamma^\rho x}. \tag{25}$$

Обе части равенства (25) дифференцируя по параметру γ^ρ, пользуясь леммой 2, получим

$$D_\infty^{\frac{1}{\rho}}\left\{(-1)^{n+2}\frac{d^{n+1}}{d(\gamma^\rho)^{n+1}}\left[\frac{e^{-\gamma^\rho x}-e^{-\lambda^\rho x}}{\gamma-\lambda}\right]\right\} +$$

$$+\lambda(-1)^{n+2}\frac{d^{n+1}}{d(\gamma^\rho)^{n+1}}\left[\frac{e^{-\rho^\rho x}-e^{-\lambda^\rho x}}{\gamma-\lambda}\right] \equiv x^{n+1}e^{-\gamma^\rho x},$$

т.е. утверждение верно при $j=n+1$. Теорема полностью доказана.

В заключение выражаю благодарность проф. М.М.Джрбашяну за постановку задачи и полезное обсуждение работы.

Кафедра высшей математики *Поступила 22.12.1988*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Джрбашян М.М.** Расширение квазианалитических классов Данжуа-Карлемана. -ИАН Арм.ССР, Математика, 1968, т.3, №3.
2. **Саакян Б.А.** Об одной формуле обращения «преобразования типа свертки»: Тезисы докл. — Республиканская научно-практическая конференция по методике преподавания математики и механики в вузе. Ереван, 1983.
3. **Джрбашян М.М.** Интегральные преобразования и представления функции в комплексной области. М. Наука, 1966.

Ամփոփում

Այս աշխատանքում դիտարկվում են $D_{\infty}^{1/\rho}y+\lambda y=f(x)$ տեսքի կոտորակային կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներ, որտեղ $\rho\geqslant 1, \lambda>0$, $D_{\infty}^{1/\rho}$ -Վեյլի ածանցման օպերատորն է: Որոշ դասի $f(x)$ ֆունկցիաների համար դրվում է Կոշիի տիպի խնդիր և լուծվում այդ խնդիրը:

SUMMARY

In the paper diffeerential equations of $D_{\infty}^{\frac{1}{\rho}}y+\lambda y=f(x)$ type fractional order are discussed where $\rho\geqslant 1, \lambda>0, D_{\infty}^{\frac{1}{\rho}}$ is Veil's operator.

For f(x) functions of some classes Cauchy type problem is produced and solved.