ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1987 Естественные науки

Математика

УДК 519.6

Ф. А. ТАЛАЛЯН

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ МНОЖЕСТВ И РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Описываются такие последовательности множеств действительных чисел, элементы прямых произведений которых являются равномерно распределенными последовательностями по модулю 1.

В настоящей работе дается описание последовательностей (E_n) подмножеств R, обладающих тем свойством, что как только $x_n \in E_n$, $n \in N$, то последовательность (x_n) будет равномерно распределенной по модулю 1. Здесь через R и N обозначены системы действительных и соответственно натуральных чисел. Будем пользоваться также следующими обозначениями. Если S есть последовательность натуральных чисел (все встречающиеся ниже последовательности натуральных чисел будут предполагаться составленными из попарно различных членов и упорядоченными по возрастанию) и $m \in N$, то через $Q(S, m)$ мы обозначим количество элементов в пересечении $S \cap [1, m]$. Далее, пусть Z есть система целых чисел и φ—естественный гомоморфизм $R \to R/Z$. Если $E \subset R$, то через $\operatorname{diam}_Z(E)$ мы обозначим диаметр множества $\varphi(E)$ в метрической группе R/Z, т. е. диаметр $\varphi(E)$, вычисленный с учетом идентификации точек по модулю 1. Наконец, следуя [1], введем еще одно обозначение. Пусть $X=(x_k)$ есть последовательность действительных чисел, $E \subset [0, 1]$ и $m \in N$. Обозначим через $A(E; m, X)$ количество тех значений $k \leqslant m$, для которых дробные доли $\{x_k\} \in E$. Приведем определение равномерной распределенности по модулю 1.

Определение. Последовательность X действительных чисел называется равномерно распределенной по модулю 1, если равенство

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A([a, b); n, X)}{n} = b-a$$

имеет место для всех a и b таких, что $0 \leqslant a < b < 1$. При этом, если $X \subset [0, 1)$, будем говорить, что X равномерно распределена на $[0, 1)$.

Перейдем к формулировкам и доказательствам результатов.

Теорема 1. Пусть (E_n)—последовательность подмножеств R такая, что каждая последовательность $(x_n) \in \Pi E_n$ равномерно распределена по модулю 1. Тогда

а) существует последовательность S натуральных чисел такая, что

$$\lim_{m\to\infty}\frac{Q(S,\ m)}{m}=1$$

и

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in S}}\ \operatorname{diam}_Z(E_n)=0;$$

в) ΠE_n есть семейство равностепенно равномерно распределенных по модулю 1 последовательностей.

Лемма 1. Пусть (E_n)—последовательность подмножеств R такая, что каждая последовательность $(x_n)\in\Pi E_n$ равномерно распределена по модулю 1.

Тогда при любом $\varepsilon>0$ для последовательности $S_\varepsilon=\{n\in N:\operatorname{diam}_Z(E_n)\geqslant\varepsilon\}$ справедливо равенство

$$\lim_{m\to\infty}\frac{Q(S_\varepsilon,\ m)}{m}=0. \tag{1}$$

Доказательство. Предположим обратное: существует такое $\varepsilon>0$, что

$$\limsup_{m\to\infty}\frac{Q(S_\varepsilon,\ m)}{m}>0. \tag{2}$$

Докажем, что тогда можно так выбрать точки $x_n\in\varphi(E_n)$, чтобы последовательность $X=(x_n)$ не была равномерно распределенной на $[0,\ 1)$, что, очевидно, противоречит условию леммы.

Возьмем произвольную последовательность $S=(a_n)$, $a_n\in\varphi(E_n)$. Допустим, что S—равномерно распределена на $[0,\ 1)$. Тогда, используя S, мы построим требуемую последовательность X.

Разделим $[0,\ 1)$ на q частей $\Delta_i=\left[\frac{i-1}{q},\ \frac{i}{q}\right)$ $i=1,\ 2,\ \ldots,\ q$, где $q>\frac{2}{\varepsilon}$, и положим $T_i=\{n\in S_\varepsilon:a_n\in\Delta_i\}$. Тогда, очевидно, имеем

$$\frac{Q(S_\varepsilon,\ m)}{m}=\sum_{i=1}^{q}\frac{Q(T_i,\ m)}{m}. \tag{3}$$

Устремляя в равенстве (3) m к бесконечности по таким номерам, по которым $\frac{Q(S_\varepsilon,\ m)}{m}$ сходится к $\limsup\limits_{m\to\infty}\frac{Q(S_\varepsilon,\ m)}{m}$ и одновременно для каждого $i\in[1,\ q]$ $\frac{Q(T_i,\ m)}{m}$ сходится, мы в силу (2) получим, что при некотором i_0

$$\limsup_{m\to\infty}\frac{Q(T_{i_0},\ m)}{m}>0. \tag{4}$$

Приступим теперь к построению последовательности X. Для каждого $n\in T_{i_0}$ выберем точку $c_n\in\varphi(E_n)$ так, чтобы

$$|c_n-a_n|>\frac{\varepsilon}{2}\quad n\in T_{i_0}, \tag{5}$$

и положим

$$x_n=\begin{cases} a_n, & n\notin T_{i_0}, \\ c_n, & n\in T_{i_0} \end{cases}$$

Докажем, что построенная последовательность $X=(x_n)$ не является равномерно распределенной на $[0, 1)$. Действительно, т. к. $\operatorname{mes}(\Delta_{i_0})<\frac{\varepsilon}{2}$, то из неравенств (5) следует, что при $n\in T_{i_0}$ $c_n\notin\Delta_{i_0}$. В силу этого имеем

$$\frac{A(\Delta_{i_0};\ m,\ X)}{m}=\frac{A(\Delta_{i_0};\ m,\ S)}{m}-\frac{Q(T_{i_0},\ m)}{m}.$$

В этом равенстве устремим m к бесконечности по таким номерам, по которым выражение $\frac{Q(T_{i_0},\ m)}{m}$ сходится к своему верхнему пределу. Тогда в силу равномерной распределенности последовательности $S=(a_n)$ получим, что по этим же номерам выражение $\frac{A(\Delta_{i_0};\ m,\ X)}{m}$ сходится к пределу $\operatorname{mes}(\Delta_{i_0})-\limsup\limits_{m\to\infty}\frac{Q(T_{i_0},\ m)}{m}$. Отсюда в силу (4) получаем

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{A(\Delta_{i_0};\ m,\ X)}{m}<\operatorname{mes}(\Delta_{i_0}),$$

что и требовалось.

Лемма 2. Пусть для каждого натурального k S_k есть возрастающая последовательность натуральных чисел и пусть выполнены условия

$$S_k\subset S_{k+1},\ \lim_{m\to\infty}\frac{Q(S_k,\ m)}{m}=0,\ k\in N. \tag{6}$$

Тогда существует последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условиям

$$\sup\{S\cap S_k\}<\infty,\ k\in N, \tag{7}$$

и

$$\lim_{m\to\infty}\frac{Q(S,\ m)}{m}=1. \tag{8}$$

Доказательство. Индукцией построим последовательность натуральных чисел $p_0=1<p_1<\ldots<p_k<p_{k+1}<\ldots$ такую, что при любом $k\in N$ выполнялись бы условия

$$\frac{Q(S_1,\ p_2)+\ \ldots\ +Q(S_{k-1},\ p_k)}{p_k}<\frac{1}{2k} \tag{9}$$

и

$$\frac{Q(S_k,\ m)}{m}<\frac{1}{2k}\quad \text{при } m\geqslant p_k \tag{10}$$

(при $k=1$ первое условие отсутствует).

Положим

$$S=\bigcup_{k=1}^{\infty}([p_{k-1},p_k)\setminus S_{k-1})\quad (S_0=\varnothing).$$

Тогда, очевидно, условие (7) выполняется. Далее, если $p_k\leqslant m<p_{k+1}$, то в силу (9) и (10) имеем

$$\frac{Q(S,m)}{m}\geqslant\frac{m-Q(S_1,p_2)-\ldots-Q(S_{k-1},p_k)-Q(S_k,m)}{m}\geqslant$$

$$\geqslant 1-\frac{Q(S_1,p_2)+\ldots+Q(S_{k-1},p_k)}{p_k}-\frac{Q(S_k,m)}{m}>1-\frac{1}{k},$$

откуда следует (8). Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Положим $S_k=\left\{n\in N:\operatorname{diam}_Z(E_n)\geqslant\frac{1}{k}\right\}$, $k\in N$. В силу леммы 1 семейство последовательностей S_k, $k\in N$, удовлетворяет условиям леммы 2. Тогда согласно лемме 2 существует последовательность натуральных чисел S, для которой справедливы (7) и (8). Докажем, что последовательность удовлетворяет утверждениям теоремы. Действительно, равенство (8)—это первое равенство утверждения а). Второе равенство следует из (7), т. к. при $n\in S$ и $n\geqslant\sup\{S\cap S_k\}$ имеем $n\overline{\in} S_k$, что влечет $\operatorname{diam}_Z(E_n)<\frac{1}{k}$. Наконец в силу следующей теоремы 2 утверждение в) следует из а).

Теорема 2. Пусть (E_n)—последовательность подмножеств R такая, что

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in S}}\operatorname{diam}_Z(E_n)=0$$

для некоторой последовательности S натуральных чисел, для которой

$$\lim_{m\to\infty}\frac{Q(S,m)}{m}=1.$$

Тогда существует последовательность (E_n') сдвигов множеств E_n такая, что $\Pi E_n'$ есть семейство равностепенно равномерно распределенных по модулю 1 последовательностей.

Доказательство. Сдвиги выберем так, чтобы существовала равномерно распределенная по модулю 1 последовательность (a_n), $a_n\in E_n'$. Пусть (x_n)—произвольная последовательность точек, выбранных из соответствующих множеств E_n'. Для доказательства равномерной распределенности (x_n) по модулю 1 мы применим известный критерий ([1], стр. 12). Докажем, что для любой действительной непрерывной на $[0,1]$ функции f, равномерно относительно $(x_n)\in\Pi E_n'$ выполняется равенство

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}f(\{x_k\})=\int_0^1 f(t)dt. \tag{11}$$

В силу равномерной распределенности по модулю 1 последовательности (a_n) достаточно доказать, что равномерно относительно (x_n)

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}[f(\{x_k\})-f(\{a_k\})]=0. \tag{12}$$

Пусть $\varepsilon>0$—произвольное заданное число. Возьмем δ так, чтобы из $|t-t'|<\delta$ следовало $|f(t)-f(t')|<\frac{\varepsilon}{3}$. Далее, т. к. $\mathrm{diam}_z(E_n')=\mathrm{diam}_z(E_n)$, то для достаточно большого натурального числа n_0 из $k\in S$ и $k>n_0$ следует $|\{x_k\}-\{a_k\}|<\delta$. Зафиксируем такое n_0 и рассмотрим настолько большие значения m, чтобы выполнялись неравенства

$$m>n_0,$$

$$\frac{2n_0\max|f(t)|}{m}<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$2\max|f(t)|\cdot\frac{Q(N\setminus S,\ m)}{m}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда для указанных значений m будем иметь

$$\left|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}[f(\{x_k\})-f(\{a_k\})]\right|\leqslant\frac{1}{m}\sum\{|f(\{x_k\})-f(\{a_k\})|: k\in[1,\ n_0]\cap S\}+$$

$$+\frac{1}{m}\sum\{|f(\{x_k\})-f(\{a_k\})|: k\in[n_0+1,\ m]\cap S\}+$$

$$+\frac{1}{m}\sum\{|f(\{x_k\})-f(\{a_k\})|: k\in[1,m]\cap(N\setminus S)\}+$$

$$+\frac{2n_0\max|f(t)|}{m}+\frac{\varepsilon}{3}\ \frac{m-n_0}{m}+2\max|f(t)|\frac{Q(N\setminus S,\ m)}{m}<\varepsilon.$$

Таким образом равенство (12), а с ним и равенство (11) доказаны.

Замечание 1. Назовем последовательность множеств вида (ω_n+E_n), $\omega_n\in R$, $E_n\subset R$ сдвигом последовательности (E_n). Утверждение теоремы 2 справедливо для почти всех сдвигов последовательности (E_n) в следующем смысле. Пусть μ есть произведение мер на $\Pi\Omega_n$, где каждое Ω_n есть $[0,\ 1]$ с мерой Лебега. Тогда для μ-почти всех $(\omega_n)\in\Pi\Omega_n$, для последовательности (E_n'), где $E_n'=\omega_n+E_n$, справедливо утверждение теоремы 2. Действительно, для почти всех сдвигов (E_n') существует равномерно распределенная по модулю 1 последовательность (a_n), где $a_n\in E_n'$ ([1] стр. 199), после чего проходит приведенное доказательство.

Замечание 2. Внеся соответствующие коррективы в доказательства теорем 1 и 2, можно доказать аналогичные теоремы для случая непрерывного распределения по модулю 1 ([1], гл. 1, § 9). При этом вместо последовательности S появится измеримое множество $\Omega\subset[0,\ \infty)$, обладающее свойством

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\lambda(\Omega\cap[0,\ T])}{T}=1,$$

где λ—мера Лебега.

Кафедра высшей математики и математической физики *Поступила 18.06.1986*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Кейперс и Г. Нидеррейтер.* Равномерное распределение последовательностей, М.: Наука, 1985.

Ամփոփում

Նկարագրվում են իրական թվերի բազմությունների այնպիսի հաջորդականություններ, որոնց ուղիղ արտադրյալների էլեմենտները իրենցից ներկայացնում են ըստ 1 մոդուլի հավասարաչափ բաշխված հաջորդականություններ։

Summary

Sequences of real number sets are described with elements of their direct product being uniformly distributed sequences mod. 1.