ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ **3, 1986** **Естественные науки**

Математика

УДК 513.8

Г. С. АКОПЯН, М. И. КАРАХАНЯН

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ НОРМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Статья посвящена изучению некоторых спектральных свойств нормальных операторов, действующих в банаховом пространстве. В частности получено следующее обобщение теорем Ю. И. Любича. Пусть $A=H+iK\in B(X)$—нормальный оператор, действующий в слабо полном банаховом пространстве X. Тогда, чтобы система собственных векторов оператора A была полна в пространстве X, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x\in X$ и $\varphi\in X^*$ функция $\varphi[e^{i(sK-tH)}x]$ была боровская почти-периодическая функция на R^2.

1. Пусть $B(X)$—банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих на комплексном банаховом пространстве X. Если для оператора $A\in B(X)$ существует такой оператор $A^+\in B(X)$, что $\| e^{\frac{1}{2}(\bar{\lambda} A-\lambda A^+)}\|=1$ для каждого $\lambda=s+it\in\mathbf{C}$, тогда оператор A^+ будет называться эрмитов-сопряженным к оператору A. Оператор $A\in B(X)$ будем называть нормальным, если существует эрмитов-сопряженный оператор $A^+\in B(X)$ такой, что $AA^+=A^+A$. В случае, когда $A=A^+$, оператор A называется эрмитовым. Так как $e^{\frac{1}{2}(\bar{\lambda} A-\lambda A^+)}=e^{i(sK-tH)}$, где $H=\frac{A+A^+}{2}$, $K=\frac{A-A^+}{2i}$, то из условия $\| e^{\frac{1}{2}(\bar{\lambda} A-\lambda A^+)}\|=1$ для каждого $\lambda\in\mathbf{C}$ следует эрмитовость операторов H и K. Нетрудно видеть (см. [1]), что оператор A^+ однозначно определяется по оператору A, и если $A=H+iK$, то $A^+=H-iK$.

Хорошо известно, что для эрмитовых операторов A, действующих в гильбертовом пространстве, $\|A\|=|A|$, где $|A|$—спектральный радиус оператора A. В работе [2] Кацнельсон доказал, что для эрмитова оператора $A\in B(X)$, где X—банахово пространство, имеет также равенство $\|A\|=|A|$. Для нормальных операторов, действующих в банаховом пространстве X, имеет место следующее

Предложение. Пусть $A\in B(X)$—нормальный оператор, тогда $|A|=|A^+|$.

Доказательство. Пусть $S=\{I, A, A^+\}$ и $\Gamma(S)$—централизатор множества S, а $\mathbf{A}=\Gamma(\Gamma(S))$. Тогда, как известно (см. [3], с. 315), $\mathbf{A}$—коммутативная банахова подалгебра алгебры $B(X)$ и для каждого оператора $T\in\mathbf{A}$ имеем, что $\sigma_{\mathbf{A}}(T)=\sigma(T)=\hat{T}(M_{\mathbf{A}})$, где $M_{\mathbf{A}}$—пространство максимальных идеалов алгебры A, а $\hat{T}$—преобразование Гельфанда для оператора T. Покажем, что для каждого $m \in M_A$ имеет место соотношение $m(A^+)=\overline{m(A)}$. Допустим, что это не так, т. е. существует $m_0 \in M_A$, что $m_0(A^+)\neq\overline{m_0(A)}$. Так как $\|m_0\|=1$, то $|m_0[e^{\frac{1}{2}(\bar{\lambda}A-\lambda A^+)}]|\leqslant 1$. С другой стороны, так как $m_0[e^{\frac{1}{2}(\bar{\lambda}A-\lambda A^+)}]=e^{\frac{1}{2}(\bar{\lambda}m_0(A)-\lambda m_0(A^+))}$, то, если $m_0(A^+)\neq\overline{m_0(A)}$, имеем, что $|e^{\frac{1}{2}(\bar{\lambda}m_0(A)-\lambda m_0(A^+))}|$ не ограниченно. Полученное противоречие показывает, что $\sigma(A^+)=\overline{\sigma(A)}$, откуда следует утверждение предложения.

Из предложения получаем хорошо известную оценку нормы нормального оператора через спектральный радиус, а именно $\|A\|\leqslant 2|A|$. Заметим, что данная оценка точна. Более окончательные результаты в этом направлении получены в [4].

В работе [5] была доказана полнота системы собственных векторов эрмитова компактного оператора в слабо полном банаховом пространстве X. В дальнейшем предложенный в [5] метод был развит в [6], что привело к установлению «почти-периодического критерия» полноты для корректных операторов.

В данной работе, используя методику работ [5, 6], получим обобщение этих результатов для n-параметрических сильно непрерывных групп изометрий.

Обозначим через $C_{AP}(\mathbf{R}^n)$ банахову алгебру равномерных почти-периодических функций на абелевой группе $\mathbf{R}^n$, наделенную sup-нормой. Если алгебру $C_{AP}(\mathbf{R}^n)$ пополнить по предгильбертовой структуре, определяемой скалярным произведением $\langle f, g\rangle=M[f, \bar{g}]$,

где $M[f, \bar{g}]=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^n}\int\limits_{-T}^{T}\ldots\int\limits_{-T}^{T} f\bar{g}\,d\hat{t}$, где $d\hat{t}=dt_1\ldots dt_n$, то получится гильбертово пространство почти-периодических функций Безиковича, которое обозначают через $\mathbf{B}^2(\mathbf{R}^n)$. Отметим, что унитарные характеры $\hat{\mathbf{R}}^n$ группы $\mathbf{R}^n$ имеют вид $\chi_{\hat{\lambda}}(\hat{t})=e^{i\langle\hat{t},\hat{\lambda}\rangle}$, где $\langle\hat{t}, \hat{\lambda}\rangle=\sum\limits_{k=1}^{n}t_k\lambda_k$, и образуют ортонормированный базис в пространстве $B^2(\mathbf{R}^n)$.

Пусть $\mathbf{T}:\mathbf{R}^n\to \mathrm{Aut}(X)$—изометрическое представление группы $\mathbf{R}^n$ в пространстве X, т. е. $\|\mathbf{T}(\hat{t})\|=1$ для каждого $\hat{t}\in\mathbf{R}^n$. Вектор $x\in X$ $(x\neq 0)$ будем называть собственным вектором представления $\mathbf{T}$, если существует характер $\chi_{\hat{\lambda}}\in\hat{\mathbf{R}}^n$ такой, что $\mathbf{T}(\hat{t})x=\chi_{\hat{\lambda}}(\hat{t})x$ для каждого $\hat{t}\in\mathbf{R}^n$.

Отметим, как это принято в теории представлений топологических групп, что все рассматриваемые здесь представления предполагаются сильно непрерывными.

Теорема 1. Пусть X—слабо полное банахово пространство и $\mathbf{T}$—изометрическое представление группы $\mathbf{R}^n$ в X. Тогда, для того чтобы система собственных векторов представления T была полна в пространстве X, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x\in X$ и $\varphi\in X^*$ функция $\varphi(\mathbf{T}(\hat{t})x)\in C_{AP}(\mathbf{R}^n)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть по $\varepsilon>0$, $\left\|x-\sum_{k=1}^{m} x_k\right\|<\varepsilon$, где $T(\hat t)x_k = e^{i\langle \hat t, \hat\lambda_k\rangle} x_k$ для всех $\hat t\in R^n$ и $k=1, 2, \dots, m$. Тогда

$$\left|\varphi[T(\hat t)x] - \sum_{k=1}^{m} \varphi(x_k) e^{i\langle \hat t, \hat\lambda_k\rangle}\right| \leqslant \|\varphi\|\cdot\varepsilon,$$

откуда и следует, что функция $\varphi[T(\hat t)x]\in C_{AP}(R^n)$.

Достаточность. Пусть для каждого элемента $x\in X$ и $\varphi\in X^*$ функция $\varphi[T(\hat t)x]\in C_{AP}(R^n)$. Сопоставим каждой функции $\varphi[T(\hat t)x]$ ее ряд Фурье в пространстве $B^2(R^n)$, т. е.

$$\varphi[T(\hat t)x] \backsim \sum_{\hat\lambda} c_{\hat\lambda}(x, \varphi) e^{i\langle \hat t, \hat\lambda\rangle},$$

где

$$c_{\hat\lambda}(x, \varphi) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^n}\int_{-T}^{T}\dots\int_{-T}^{T}\varphi[T(\hat t)x]e^{-i\langle \hat t, \hat\lambda\rangle}d\hat t,\quad d\hat t = dt_1\dots dt_n.$$

В силу слабой полноты пространства X существует слабый предел

$$P_{\hat\lambda}x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^n}\int_{-T}^{T}\dots\int_{-T}^{T} T(\hat t)xe^{-i\langle \hat t, \hat\lambda\rangle}d\hat t.$$

Покажем, что

i) $P^2_{\hat\lambda} = P_{\hat\lambda}$,

ii) $P_{\hat\lambda}P_{\hat\mu} = 0$ при $\hat\lambda\neq\hat\mu$,

iii) $TP_{\hat\lambda} = \chi_{\hat\lambda}P_{\hat\lambda}$.

Так как T—изометрическое представление группы R^n, то $\|P_{\hat\lambda}\|\leqslant 1$. Проверим свойства i) и ii). Пусть $x\in X$, тогда

$$P_{\hat\lambda}P_{\hat\mu}x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^n}\int_{-T}^{T}\dots\int_{-T}^{T} T(\hat t)(P_{\hat\mu}x)e^{-i\langle \hat t, \hat\lambda\rangle}d\hat t =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^n}\int_{-T}^{T}\dots\int_{-T}^{T} T(\hat t)xe^{-i\langle \hat t, \hat\mu\rangle}d\hat t\cdot\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^n}\int_{-T}^{T}\dots\int_{-T}^{T} e^{i\langle \hat t, \hat\lambda-\hat\mu\rangle}d\hat t =$$

$$= \delta_{\hat\lambda, \hat\mu}P_{\hat\lambda}x$$

Покажем выполнение свойства iii). Для $\hat t\in R^n$ имеем

$$T(\hat t)P_{\hat\lambda}x = T(\hat t)\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^n}\int_{-T}^{T}\dots\int_{-T}^{T} T(\hat h)xe^{-i\langle \hat h, \hat\lambda\rangle}d\hat h =$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^n}\int_{-T}^{T}\cdots\int_{-T}^{T}T(\hat{h})xe^{-i\langle\hat{h}-\hat{t},\hat{\lambda}\rangle}d\hat{h}=\chi_{\hat{\lambda}}(\hat{t})P_{\hat{\lambda}}x.$$

Таким образом, вектор $x_{\hat{\lambda}}=P_{\hat{\lambda}}x$ является собственным вектором представления T, ибо

$$Tx_{\hat{\lambda}}=TP_{\hat{\lambda}}x=\chi_{\hat{\lambda}}P_{\hat{\lambda}}x=\chi_{\hat{\lambda}}x_{\hat{\lambda}},\ \text{где}\ \chi_{\hat{\lambda}}\in\hat{R}^n.$$

Пусть теперь $\varphi\in X^*$—такой функционал, что $\varphi(x_{\hat{\lambda}})=0$, тогда

$c_{\hat{\lambda}}(x,\varphi)=\varphi(P_{\hat{\lambda}}x)=\varphi(x_{\hat{\lambda}})=0$ и значит $\varphi[T(\hat{t})x]\equiv 0$. Откуда $\varphi(x)=0$, и поэтому $\varphi=0$. Теорема 1 доказана.

Отметим, что для изометрических представлений любой топологической абелевой группы в рефлексивном пространстве аналогичный результат получен Любичем (см. [7]), исходя из других соображений.

Применим полученную теорему для установления «почти-периодических» критериев полноты для нормальных операторов, а также обобщений этих результатов для случая неограниченных операторов.

II. Элементы $x, y\in X$ называют взаимно ортогональными, если для каждого $h\in C$, $\|x+hy\|\geqslant\|x\|$ и $\|hx+y\|\geqslant\|y\|$. Обозначим через $N(A)=\operatorname{Ker}A$, а $N_\alpha(A)=\operatorname{Ker}(A-\alpha I)$, тогда имеет место:

Лемма 1. Пусть $A\in B(X)$—нормальный оператор, тогда

i) $N(A)=N(A^+)$,

ii) если $Ax=\alpha x$ при некотором ненулевом векторе $x\in X$, то $A^+x=\bar{\alpha}x$,

iii) если $\mu_1\neq\mu_2$, то подпространства $N_{\mu_1}(A)$ и $N_{\mu_2}(A)$ взаимно ортогональны.

Доказательство. i) Пусть $x_0\in N(A)$ и $\varphi\in X^*$—произвольный функционал, тогда функция $f_\varphi(\lambda)=\varphi[e^{\frac{1}{2}(\bar{\lambda}A-\lambda A^+)}x_0]$—целая функция, ибо $2\frac{\partial f_\varphi(\lambda)}{\partial\bar{\lambda}}=\left(\frac{\partial}{\partial s}+i\frac{\partial}{\partial t}\right)f_\varphi(\lambda)=\varphi[e^{\frac{1}{2}(\bar{\lambda}A-\lambda A^+)}Ax_0]=0$. Так как $|f_\varphi(\lambda)|\leqslant\|\varphi\|\cdot\|x_0\|$, то в силу теоремы Лиувилля имеем, что $f_\varphi(\lambda)=\text{const}$, откуда $\frac{\partial f_\varphi(\lambda)}{\partial\lambda}=0$. Но так как $2\frac{\partial f_\varphi(\lambda)}{\partial\lambda}=\left(\frac{\partial}{\partial s}-i\frac{\partial}{\partial t}\right)f_\varphi(\lambda)=\varphi[e^{\frac{1}{2}(\bar{\lambda}A-\lambda A^+)}\times A^+x_0]=0$, то, используя теорему Хана-Банаха, имеем, что $A^+x_0=0$, т. е. $N(A)\subset N(A^+)$. Аналогично доказывается обратное вложение. Доказательство пункта ii) следует из i), если учесть, что для нормального оператора $A_\alpha=A-\alpha I$ соответствующий сопряженный оператор есть $A_\alpha^+=A^+-\bar{\alpha}I$.

Докажем пункт iii). Пусть $Ax_1=\mu_1x_1$, $Ax_2=\mu_2x_2$ и $\mu_1\neq\mu_2$, где $\mu_1=\nu_1+i\theta_1$, $\mu_2=\nu_2+i\theta_2$. Возьмем произвольное $h\in C$, так как

$$e^{\frac{1}{2}(\bar{\lambda}A-\lambda A^+)}(x_1+hx_2)e^{i(t\nu_1-s\theta_1)}=x_1+he^{i[s(\theta_2-\theta_1)-t(\nu_2-\nu_1)]}x_2,\ \text{то}$$

$$\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}e^{\frac{1}{2}(\bar{\lambda}A-\lambda A^+)}(x_1+hx_2)e^{i(t\nu_1-s\theta_1)}ds\,dt=x_1+$$

$$+\frac{hx_2\sin T(\theta_2-\theta_1)\sin T(\nu_2-\nu_1)}{4(\theta_2-\theta_1)(\nu_2-\nu_1)T^2}.$$

Обозначим через $y_T(x_1, x_2)$ при фиксированном T элемент

$$\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} e^{\frac{1}{2}(\bar{\lambda}A-\lambda A^+)}(x_1+hx_2)e^{i(t\nu_1-s\theta_1)}dsdt.$$

Тогда при

$$T\to\infty,\quad y_T(x_1, x_2)\to x_1,$$

откуда

$$\|x_1\| \leqslant \lim_{T\to\infty}\|y_T(x_1, x_2)\| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left\| e^{\frac{1}{2}(\bar{\lambda}A-\lambda A^+)}\right\|\cdot\|x_1+hx_2\|\,dsdt=\|x_1+hx_2\|.$$

Аналогично доказывается, что $\|x_2\|\leqslant\|x_2+hx_1\|$. Лемма 1 доказана.

Пусть $A_1, \dots, A_N$—семейство коммутирующих нормальных операторов из $B(X)$, где $A_p=H_p+iK_p$, $p=1, 2, \dots, N$. Будем говорить, что $x\in X$ $(x\neq 0)$ является собственным вектором семейства операторов $\{A_1, \dots, A_N\}$, если $x\in\bigcap_{k=1}^{N}\mathrm{Ker}(A_k-\mu_k I)$, где $\mu_1, \dots \mu_N\in C$.

Для краткости записи используем следующие обозначения. Если $\hat{\alpha}=(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ и $\hat{\beta}=(\beta_1, \dots, \beta_N)$—векторы, а $\hat{A}=(A_1, \dots, A_N)$, то $\langle\hat{\alpha},\hat{\beta}\rangle=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\beta_k$, а $\langle\hat{\alpha}, \hat{A}\rangle=\sum_{p=1}^{N}\alpha_p A_p$.

Из вышеизложенных результатов следует, что операторы $A_1, \dots, A_N$ порождают изометрическое представление **T** группы $\mathbf{R}^{2N}$ в пространстве X, по формуле $T(\hat{s},\hat{t})=e^{i(\langle\hat{s},\hat{K}\rangle-\langle\hat{t},\hat{H}\rangle)}$ для которой инфинитезимальными производящими операторами являются операторы iK_p и $-iH_p$, $p=1, 2, \dots, N$. Нетрудно видеть, что если вектор $x\in X(x\neq 0)$—собственный вектор семейства операторов $\{A_1, \dots, A_N\}$, то он будет собственным вектором представления $T(\hat{s}, t)$ и наоборот.

Применяя теорему 1 и лемму 1 к данному семейству $\{A_1, \dots, A_N\}$ нормальных коммутирующих операторов из $B(X)$, получаем следующий результат.

Теорема 2. Пусть X—слабо полное банахово пространство и $\{A_1, \dots, A_N\}$-конечное семейство коммутирующих нормальных операторов из $B(X)$. Тогда, для того чтобы система собственных векторов семейства $\{A_1, \dots, A_N\}$ была полна в пространстве X, необходимо и достаточно, чтобы для каждой $x\in X$ и $\varphi\in X^*$ функция

$$\varphi[e^{i(\langle\hat{s},\hat{K}\rangle-\langle\hat{t},\hat{H}\rangle)}x]\in C_{AP}(\mathbf{R}^{2N}).$$

В случае, когда все операторы семейства $\{A_1, \dots, A_N\}$ эрмитовы, т. е. $A_p=A_p^+$, $p=1, 2, \dots, N$, имеет место

Следствие. Пусть X—слабо полное банахово пространство и $\{A_1, \ldots, A_N\}$ —семейство коммутирующих эрмитовых операторов из $B(X)$. Чтобы система собственных векторов семейства $\{A_1, \ldots, A_N\}$ была полна в пространстве X, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in X$ и $\varphi \in X^*$ функция $\varphi[e^{i\langle \hat{t}, \hat{A} \rangle} x] \in C_{AP}(\mathbf{R}^N)$.

III. Пусть A—линейный оператор, заданный на линейном многообразии $D(A) \subset X$. Оператор A назовем нормально-корректным (н-корректным), если:

1) A—замкнутый оператор, и существует замкнутый линейный оператор A^+ такой, что $D = D(A) \cap D(A^+)$ плотно в X и $AA^+x = A^+Ax$ для каждого $x \in D$.

2) Задача

$$\begin{cases} s\dfrac{\partial x(s, t)}{\partial s} + t\dfrac{\partial x(s, t)}{\partial t} = i(sK - tH)x(s, t), \\ x(0, 0) = x_0, \qquad -\infty < t, \ s < \infty, \end{cases}$$

при любом $x_0 \in D$ имеет единственное решение $x(s, t)$ в классе сильно дифференцируемых вектор-функций, где $H = \dfrac{A + A^+}{2}$, $K = \dfrac{A - A^+}{2i}$.

3) Операторы $V(s, t)$, определяемые соотношением $V(s, t)x_0 = x(s, t)$, удовлетворяют условию $\|V(s, t)\| = 1$ при каждом $(s, t) \in \mathbf{R}^2$.

Так как при каждом $(s, t) \in \mathbf{R}^2 \|V(s, t)\| = 1$, то операторы $V(s, t)$ единственным образом с сохранением нормы продолжаются по непрерывности на все пространство X, и в дальнейшем мы будем считать, что эта процедура выполнена.

Лемма 2. Пусть A—есть H-корректный оператор. Тогда семейство операторов $\{V(s, t)\}_{(s,t) \in R^2}$ —сильно непрерывная двухпараметрическая группа.

Доказательство. Рассмотрим функции $x_1(s) = V(s \cdot \hat{e}_1)x_0 \overset{\text{об}}{=} V_1(s)x_0$ и $x_2(t) = V(t \cdot \hat{e}_2)x_0 \overset{\text{об}}{=} V_2(t)x_0$, где $\hat{e}_1 = (1, 0)$, $\hat{e}_2 = (0, 1)$. Тогда из определения H-корректности оператора A следует, что данные функции являются соответственно решениями задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(s)}{i\,ds} = Kx_1(s), \\ x_1(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{dx_2(t)}{i\,dt} = -Hx_2(t), \\ x_2(0) = x_0, \end{cases}$$

которые при каждом $x_0 \in D$ имеют единственное решение в классе сильно дифференцируемых вектор-функций. Таким образом, H и K являются корректными операторами (см. [6]), и семейство операторов $\{V_1(s)\}_{s \in R^1}$ и $\{V_2(t)\}_{t \in R^1}$ есть сильно непрерывные однопараметрические группы, для которых инфинитезимальными производящими операторами соответственно являются операторы $+iK$ и $-iH$. Так как операторы K и H корректны и $HKx = KHx$ для каждого $x \in D$, то в силу теоремы Хилле-Иосида (см. [8]) для достаточно больших натуральных n существуют резольвенты операторов H и K. Поэтому, применяя теоремы Троттера-Като, имеем, что $V_1(s)H = HV_1(s)$ и $KV_2(t) = V_2(t)K$, откуда следует, что $V_1(s)V_2(t) = V_2(t)V_1(s)$. Рассмотрим функцию $y(s,$

$t) = V_1(s)V_2(t)x_0$, тогда она в силу указанных свойств операторов H и K является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y(s,\ t)}{\partial s} = iKy(s,\ t), \\ \dfrac{\partial y(s,\ t)}{\partial t} = -iHy(s,\ t), \qquad y(0,\ 0) = x_0. \end{cases}$$

Тогда функция $y(s,\ t) = V_1(s)V_2(t)x_0$—решение задачи 2) в определении H-корректности оператора A, откуда следует, что $V(s,\ t) = V_1(s)V_2(t) = V_2(t)V_1(s)$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть A есть H-корректный оператор и $Ax_0 = \mu x_0$ для ненулевого вектора $x_0 \in D$. Тогда $A^+x_0 = \bar{\mu}x_0$.

Доказательство. Достаточно доказать, что если $Ax_0 = 0$, то $A^+x_0 = 0$. Пусть $\varphi \in X^*$, и рассмотрим функцию $f_\varphi(\lambda) = \varphi[V_1(s)V_2(t)x_0]$. Нетрудно видеть, что эта функция непрерывна и, более того, есть целая функция, ибо

$$2\frac{\partial f_\varphi(\lambda)}{\partial \bar{\lambda}} = \left(\frac{\partial}{\partial s} + i\frac{\partial}{\partial t}\right) f_\varphi(\lambda) = \varphi[V_1(s)V_2(t)Ax_0] = 0.$$

Так как $|f_\varphi(\lambda)| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|x_0\|$, то в силу теоремы Лиувилля она постоянная и значит $\dfrac{\partial f_\varphi(\lambda)}{\partial \lambda} = 0$. Но $2\dfrac{\partial f_\varphi(\lambda)}{\partial \lambda} = \varphi[V_1(s)V_2(t)A^+x_0] = 0$, откуда в силу теоремы Хана-Банаха имеем, что $A^+x_0 = 0$. Отметим, что аналогично доказывается обратная цепочка. Лемма 3 доказана.

Используя леммы 2, 3, можно убедиться, что элемент $x_0 \in X$ является собственным вектором оператора A тогда и только тогда, когда он является собственным вектором для представления V. Следовательно, используя теорему 1, доказываем следующую теорему.

Теорема 3. Для того чтобы система собственных векторов H-корректного оператора A была полна в слабо полном банаховом пространстве X, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in X$ и $\varphi \in X^*$ функции $\varphi[V(s,\ t)x]$ были боровские почти периодические функции на $\mathbf{R}^2$.

Пусть $A_1, \ldots, A_n$—линейные операторы с такими линейными многообразиями $D(A_p) \subset X$, $p = 1, 2, \ldots, n$, что $\tilde{D} = \bigcap_{p=1}^{n} D(A_p)$ плотно в X и $A_pA_lx = A_lA_px$ для каждого $x \in \tilde{D}$, когда $p,\ l = 1, \ldots, n$. Такую систему операторов $\{A_1, \ldots, A_n\}$ назовем корректной системой, если

а) все операторы A_p—замкнутые операторы;

б) для каждого $x \in \tilde{D}$ задача

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} t_k \dfrac{\partial x(\hat{t})}{\partial t_k} = i\left(\sum\limits_{k=1}^{n} t_kA_k\right)x(\hat{t}), \\ x(0,\ \cdots,\ 0) = x, \quad \hat{t} \in \mathbf{R}^n, \end{cases}$$

имеет единственное решение в классе сильно дифференцируемых вектор-функций;

в) операторы $V(\hat{t})$, определяемые соотношением $x(\hat{t}) = V(\hat{t})x$, удовлетворяют условию $\|V(\hat{t})\|=1$ для каждого $\hat{t}\in\mathbf{R}^n$. Нетрудно видеть, что подобно лемме 2 имеет место

Лемма 4. Пусть $\{A_1, ..., A_n\}$—корректная система операторов. Тогда семейство операторов $\{V(\hat{t})\}_{\hat{t}\in R^n}$ есть сильно-непрерывная n-параметрическая группа.

Используя лемму 4, можно аналогично доказать следующее утверждение.

Теорема 4. Чтобы система собственных векторов коммутирующей корректной системы операторов $\{A_1, ..., A_n\}$ была полна в слабо полном (в частности, рефлексивном) банаховом пространстве X, необходимо и достаточно, чтобы при каждом $x\in X$ и $\varphi\in X^*$ функции $\varphi[V(\hat{t})x]$ были боровские почти-периодические функции на $\mathbf{R}^n$.

Авторы выражают глубокую благодарность Ю. И. Любичу за весьма полезные советы и замечания.

Кафедра дифференциальных уравнений,
Кафедра оптимального управления
Поступила 25.06.1985

ЛИТЕРАТУРА

1. **Горин Е. А., Караханян М. И.** Асимптотический вариант теоремы Фуганда-Путнама о коммутаторах для элементов банаховых алгебр.—Матем. заметки, 1977, т. 22, № 2, с. 179—188.
2. **Капнельсон В. Э.** У консервативного оператора норма равна спектральному радиусу.—Сб. Матем. иссл. Кишинев: 1970, т. 5, № 3, с. 186—189.
3. **Рудин У.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
4. **Горин Е. А.** Неравенства Бернштейна с точки зрения теории операторов.—Вест. Харьковского ун-та (Прикл. матем. и механика), 1980, вып. 45, № 205, с. 77—105.
5. **Любич Ю. И.** Почти-периодичность функции в спектральном анализе операторов.—ДАН СССР, 1960, т. 132, № 3, с. 518—520.
6. **Любич Ю. И.** Об условиях полноты системы собственных векторов корректного оператора.—УМН, 1963, т. 18, вып. I (109), с. 165—171.
7. **Любич Ю. И.** Введение в теорию банаховых представлений групп. Вища школа: 1985.
8. **Иосида К.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

Գ. Ս. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Մ. Ի. ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ

ԲԱՆԱԽՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ՆՈՐՄԱԼ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ՍՊԵԿՏՐԱԼ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքը նվիրված է Բանախյան տարածությունում գործող նորմալ օպերատորների որոշ սպեկտրալ հատկություններին։ Ստացված է Յու. Ի. Լյուբիչի թեորեմների հետևյալ ընդհանրացումը։

Դիցուք $A=H+iK\in B(X)$ *նորմալ օպերատոր է, գործող թույլ լրիվ* X *բանախյան տարածությունում։ Որպեսզի* A *օպերատորի սեփական վեկտորների ընտանիքը լինի լրիվ* X *տարածությունում անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր* $x\in X$ *և* $\varphi\in X^*$, $\varphi(e^{i(sK-tH)}x)$ *ֆունկցիան լինի համարյա պարբերական ֆունկցիա ըստ Բորի* R^2*-ի վրա։*