ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1983 Естественные науки

Математика

УДК 517.95

С. К. АФЯН

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ВЫРОЖДЕНИЕМ КАК ВНУТРИ, ТАК И НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

Пусть D—односвязная ограниченная область в комплексной плоскости $z=x+iy$ с гладкой границей Γ_0, а Γ_1—замкнутая гладкая кривая внутри D и $\rho_j(z)$—расстояние точки z до кривой Γ_j, $j=0.1$.

Рассматривается в области D уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\frac{\partial u}{\partial \bar z}-q(z)\frac{\overline{\partial u}}{\partial \bar z}\right)+a_1(z)\frac{\partial u}{\partial z}+a_2(z)\frac{\overline{\partial u}}{\partial z}+a_3(z)\frac{\partial u}{\partial \bar z}+a_4(z)\frac{\overline{\partial u}}{\partial \bar z}+$$

$$+a_5(z)u+a_6(z)\bar u=h(z), \tag{1}$$

где $q(z)$ удовлетворяет условию $1-|q(z)|^2=\rho^{\alpha_0}(z)\rho_1^{\alpha_1}(z)q_0(z)$ $(q_0(z)\neq 0,$ $0<\alpha_j<1)$.

Доказывается нетеровость и вычисляется индекс задачи типа Римана-Гильберта для эллиптического в $D\setminus\Gamma_1$ и вырождающегося на кривых Γ_0 и Γ_1 уравнения (1).

§ 1. Постановка задачи

Пусть D—односвязная ограниченная область в комплексной плоскости $z=x+iy$ с гладкой границей Γ_0, а Γ_1—замкнутая гладкая кривая внутри D, ограничивающая область D_1.

В области D рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}\left[\frac{\partial u}{\partial \bar z}-q(z)\frac{\overline{\partial u}}{\partial \bar z}\right]+a_1(z)\frac{\partial u}{\partial z}+a_2(z)\frac{\overline{\partial u}}{\partial z}+a_3(z)\frac{\partial u}{\partial \bar z}+$$

$$+a_4(z)\frac{\overline{\partial u}}{\partial \bar z}+a_5(z)u+a_6(z)\bar u=h(z), \tag{1.1}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right);\quad a_1(z),\ a_2(z),\dots,a_6(z),$$

$q(z)$ и $h(z)$—заданные функции, $u(z)=u_1+iu_2$—искомая функция, $\overline{u(z)}$—комплексно сопряженная к $u(z)$.

Предположим, что функция $q(z)$ удовлетворяет в области D условию

$$1-|q(z)|^2=\rho_0^{\alpha_0}(z)\rho_1^{\alpha_1}(z)q_0(z), \tag{1.2}$$

где $\rho_j(z)$—расстояние точки z до кривой Γ_j, $j=0, 1$; $0<\alpha_j<1$ и $q_0(z)$—отличная от нуля в замкнутой области $\overline{D}$ вещественнозначная функция.

Уравнение (1.1) есть комплексная форма некоторой системы двух невещественных дифференциальных уравнений. Эта система при условии (1.2) эллиптична в $D\setminus\Gamma_1$ и вырождается на кривых Γ_0 и Γ_1.

В работах [1—3] были изучены краевые задачи для уравнения (1.1) в случаях вырождения только на границе или только внутри области.

В настоящей работе изучается следующая

задача: требуется найти решение $u(z)$ уравнения (1.1) по условиям

$$\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}u(t)]=g(t), \quad t\in\Gamma_0, \tag{1.3}$$

$$\lim_{z\to t}(1-|q(z)|^2)\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad \lim_{z\to t}(1-|q(z)|^2)\frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad t\in\Gamma_0\cup\Gamma_1. \tag{1.4}$$

Относительно данных рассматриваемой задачи предполагаем, что коэффициенты $a_1(z), \ldots, a_6(z)$ и правая часть $h(z)$ уравнения (1.1)—достаточно гладкие функции в D; функции q и q_0 принадлежат классу $C^1(D\setminus\Gamma_1)\cap C_{\alpha_1}(\overline{D_1})\cap C_{\alpha_0}(\overline{D_2})$, $D_2=D\setminus\overline{D_1}$, а функции λ и g— $C^1(\Gamma_0)$, причем $\lambda(t)\neq 0$ на Γ_0.

Решения этой задачи будем искать в классе $C^2(D\setminus\Gamma_1)\cap C_{\alpha_1}(\overline{D_1})\cap$ $\cap C_{\alpha_0}(\overline{D_2})$.

В работе получен следующий результат.

1. Задача (1.1), (1.3), (1.4) приведена к уравнению вида $u+Pu=F$ с вполне непрерывным оператором P.

2. Доказана нетеровость задачи и вычислен индекс.

§ 2. Исследование задачи (1.1), (1.3), (1.4)

Пусть $u(z)$—решение рассматриваемой задачи. В работе [2] показано, что уравнение (1.1) эквивалентно уравнению

$$(1-|q|^2)\frac{\partial u}{\partial \bar z}=Ku+q\overline{Ku}+Th+q\overline{Th}+\varphi(z)+q\overline{\varphi(z)}, \tag{2.1}$$

где операторы T, П и K определяются формулами

$$Tf\equiv T_Df=-\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{f(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta-z}, \quad \Pi f=-\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{f(\zeta)d\xi d\eta}{(\zeta-z)^2}, \quad \zeta=\xi+i\eta, \tag{2.2}$$

$$Ku=T\left[\left(\frac{\partial a_1}{\partial\zeta}+\frac{\partial a_3}{\partial\bar\zeta}-a_6\right)u+\left(\frac{\partial a_2}{\partial\bar\zeta}+\frac{\partial a_4}{\partial\zeta}-a_1\right)\bar u\right]-$$

$$-\Pi(a_1u+a_4\bar u)-a_2\bar u-a_3u, \tag{2.3}$$

причем второй интеграл в (2.2) понимается в смысле главного значения по Коши и наконец

$$\varphi(z)=\begin{cases}\varphi_1(z), & z\in D_1,\\ \varphi_2(z), & z\in D_2,\end{cases} \tag{2.4}$$

причем $\varphi_j(z)$ — произвольная аналитическая в $D_j (j=1, 2)$ функция.

Используя теорему 1.32 монографии [4], легко проверим, что оператор K ограничен и $Ku+q\overline{Ku}+Th+q\overline{Th}\in C_{\alpha_1}(\overline{D}_1)\cap C_{\alpha_0}(\overline{D}_2)$.

В силу условий (1.4) из уравнения (2.1) имеем

$$[\varphi_1+q(t)\overline{\varphi_1}]^+=-Ku-q\overline{Ku}-Th-q\overline{Th},\quad t\in\Gamma_1, \tag{2.5}$$

$$[\varphi_2+q(t)\overline{\varphi_2}]^-=-Ku-q\overline{Ku}-Th-q\overline{Th},\quad t\in\Gamma_1, \tag{2.6}$$

$$[\varphi_2+q(t)\overline{\varphi_2}]^+=-Ku-q\overline{Ku}-Th-q\overline{Th},\quad t\in\Gamma_0, \tag{2.7}$$

где символами $[...]^+$ и $[...]^-$ обозначены пределы величин, находящихся внутри скобок, при стремлении точки z к точкам t кривых Γ_1 или Γ_0 изнутри или извне соответственно.

Учитывая, что $|q|=1$ на Γ_1 и Γ_0, легко убедимся в том, что условия (2.5), (2.6) и (2.7) эквивалентны следующим условиям:

$$\mathrm{Re}[\sqrt{\overline{q}}\,\varphi_1]^+_{\Gamma_1}=-\mathrm{Re}[\sqrt{\overline{q}}\,(Ku+Th)], \tag{2.8}$$

$$\mathrm{Re}[\sqrt{\overline{q}}\,\varphi_2]^-_{\Gamma_1}=-\mathrm{Re}[\sqrt{\overline{q}}\,(Ku+Th)], \tag{2.9}$$

$$\mathrm{Re}[\sqrt{\overline{q}}\,\varphi_2]^+_{\Gamma_0}=-\mathrm{Re}[\sqrt{\overline{q}}\,(Ku+Th)]. \tag{2.10}$$

Вводим в рассмотрение целые числа (см. [4], стр. 243):

$$m_j=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma_j}\arg q(t),\quad j=0,1,\qquad l=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma_0}\arg\lambda(t). \tag{2.11}$$

Предположим, что m_0 и m_1—четные числа и

$$m_0>m_1\geqslant 0,\quad l\geqslant 0. \tag{2.12}$$

Теперь по условиям (2.8), (2.9) и (2.10) находим функции φ_1 и φ_2 как решения известной задачи Римана-Гильберта:

$$\varphi_j(z)=-Q_j(Ku)-Q_j(Th)+\sum_{k=1}^{n_j}d_{jk}\varphi_{jk}(z),\quad z\in D_j \tag{2.13}$$

$$(j=1,\ 2;\quad n_1=m_1+1;\quad n_2=m_0-m_1),$$

где d_{jk} —вещественные постоянные; $\varphi_{j1}(z),\ \varphi_{j2}(z),\ \ldots,\ \varphi_{jn_j}(z)$ — полная система решений однородной задачи $\mathrm{Re}[\sqrt{\overline{q}}\,\varphi_j]_{\Gamma_j}=0$; $Q_j(f)$— частное решение неоднородной задачи $\mathrm{Re}[\sqrt{\overline{q}}\varphi_j]_{\Gamma_j}=\mathrm{Re}[\sqrt{\overline{q}}\,f]$; $\Gamma_2=\Gamma_0\cup\Gamma_1$, $j=1,\ 2$. Легко видеть, что при $f=Ku$

$$Q(Ku)+q\overline{Q_j(Ku)}-Ku-q\overline{Ku}=0 \text{ на } \Gamma_j,\ j=1,\ 2. \tag{2.14}$$

а при $f=Th$

$$Q_j(Th)+q\overline{Q_j(Th)}-Th-q\overline{Th}=0 \text{ на } \Gamma_j,\ j=1,\ 2. \tag{2.15}$$

Отметим, что Q_j—линейный ограниченный оператор, отображающий $C_{\alpha_j}(\Gamma_j)$ в $C_{\alpha_j}(\overline{D}_j)$, $\alpha_2=\min(\alpha_0, \alpha_1)$ и $\varphi_{jk}\in C_{\alpha_j}(\overline{D}_j)$, $j=1, 2$ (см. [4], стр. 242 и теорему 4.12). Из (2.13) следует, что $\varphi_j\in C_{\alpha_j}(\overline{D}_j)$, $j=1,2$.

Теперь подставляя выражения функции $\varphi_j(z)$ из (2.13) в (2.1) и разделив обе части последнего на $1-|q|^2$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z}=S[Ku-Q_j(Ku)]+S[Th-Q_j(Th)+\sum_{k=1}^{n_j} d_{jk}S\varphi_{jk}(z),$$

$$z\in D_j, \quad j=1, 2; \tag{2.16}$$

где S—оператор, определяемый формулой $Sf=(1-|q|^2)^{-1}(f+q\bar f)$.

Из уравнения (2.16) получаем

$$u(z)=Ru+H(z)+\sum_{k=1}^{m_0+1} b_k\Phi_k(z)+\psi(z), \quad z\in D, \tag{2.17}$$

где $b_1, b_2, \ldots, b_{m_0+1}$— вещественные постоянные; $\psi(z)$—кусочно-аналитическая в области D функция (она аналитична в областях D_1 и D_2);

$$Ru=T_{D_1}S[Ku-Q_1(Ku)]T_{D_2}S[Ku-Q_2(Ku)]; \tag{2.18}$$

$$H(z)=T_{D_1}S[Th-Q_1(Th)]+T_{D_2}S[Th-Q_2(Th)]; \tag{2.19}$$

$$\Phi_k(z)=\begin{cases} T_{D_1}S\varphi_{1k}(z), & 1\leqslant k\leqslant m_1+1, \\ T_{D_2}S\varphi_{2(k-m_1-1)}(z), & m_1+1<k\leqslant m_0+1. \end{cases} \tag{2.20}$$

Теперь учитывая равенство $[\varphi_{jk}+q\bar\varphi_{jk}]_{\Gamma_1}=0$ и (2.14) и (2.15), заметим, что условия леммы 2.1 [3] обеспечены. В силу этой леммы функции Ru, H, Φ_k принадлежат классу $C_\alpha(\overline{D})$ при любом α, $0<\alpha<1$. Тогда из (2.17) следует, что $\psi\in C_{\alpha_2}(\overline{D})$. Поэтому функция $\psi(z)$ аналитична всюду в D.

В силу краевого условия (1.3) из (2.17) имеем

$$\mathrm{Re}(\bar\lambda\psi)=-\mathrm{Re}(\bar\lambda Ru)-\sum_{k=1}^{m_0+1} b_k\mathrm{Re}(\bar\lambda\Phi_k)-\mathrm{Re}(\bar\lambda H)+g(t), \quad t\in\Gamma_0.$$

Находя отсюда функцию $\psi(z)$ и подставляя в (2.17), получим, что $u(z)$ удовлетворяет уравнению

$$u+Pu=H(z)+Q[g-\mathrm{Re}(\bar\lambda H)|_{\Gamma_0}]+\sum_{k=1}^{m_0+1} b_k[\Phi_k-Q(\mathrm{Re}(\bar\lambda\Phi_k)|_{\Gamma_0})]+$$

$$+\sum_{k=1}^{2l+1} c_k\psi_k(z), \quad z\in D, \tag{2.21}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_{2l+1}$ —вещественные постоянные; $\psi_1(z), \psi_2(z), \ldots, \psi_{2l+1}(z)$— полная система решений однородной задачи $\mathrm{Re}(\bar\lambda\psi)|_{\Gamma_0}=0$; $Q(f)$—решение неоднородной задачи $\mathrm{Re}(\bar\lambda\psi)|_{\Gamma_0}=f$;

$$Pu=-Q[Re(\bar{\lambda}Ru)|_{\Gamma_0}]-Ru. \qquad (2.22)$$

Заметим, что $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{2l+1} \in C_\alpha(\bar{D})$ при любом α, так как $\bar{\lambda} \in C_\alpha(\Gamma_0)$. Имеет место

Лемма 1. Оператор P отображает пространство $C_{\alpha_1}(\bar{D}_1) \cap C_{\alpha_0}(\bar{D}_2)$ в $C_\alpha(\bar{D})$ при любом α, $0<\alpha<1$ и вполне непрерывен как оператор, отображающий $C_\tau(\bar{D})$ в себя, где $\tau=\max(\alpha_0, \alpha_1)$.

Доказательство. Из теоремы 1.32 монографии [4] следует, что оператор K, определяемый формулой (2.2), отображает $C_\tau(\bar{D})$ в себя и ограничен. Далее, оператор Q_j $(j=1, 2)$ отображает $C_\tau(\Gamma_j)$ в $C_\tau(\bar{D}_j)$ и ограничен. Поэтому композиция $Q_j K$ $(j=1, 2)$ ограничена, отображающая $C_\tau(\bar{D})$ в $C_\tau(\bar{D}_j)$. Теперь в силу равенств (2.14) из леммы 2.1 [3] следует, что оператор R (см. (2.12)) отображает $C_\tau(\bar{D})$ в $C_\alpha(\bar{D})$ и вполне непрерывен как оператор, отображающий $C_\tau(\bar{D})$ в себя. С другой стороны, поскольку оператор Q ограничен из $C_\alpha(\Gamma_0)$ в $C_\alpha(D)$, то из (2.22) следует утверждение леммы.

Лемма 2. Любое решение $u \in C_\tau(\bar{D})$ уравнения (2.21) является решением задачи (1.1), (1.3), (1.4).

Доказательство. Очевидно, функция $u(z)$ будет удовлетворять уравнению (1.1) и граничному условию (1.3). Покажем справедливость равенств (1.4). Ясно, что функция $u(z)$ будет удовлетворять уравнению (2.17), где $\psi(z)$ есть некоторая аналитическая функция из класса $C_\alpha(\bar{D})$ для любого α. Используя интегральную формулу Коши для функции $\psi(z)$, легко получим оценку

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|=|\psi'(z)|\leqslant \text{const}\,\rho_0^{-1+\alpha}(z), \quad z\in D.$$

С другой стороны, так как $\dfrac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}=0$, справедливы следующие оценки:

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|\leqslant \text{const}\,\rho_0^{-1+\alpha}(z), \qquad \left|\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|\leqslant \text{const}\,\rho_0^{-1+\alpha}(z).$$

Отметим, что в окрестности Γ_1 эти производные будут просто ограничены. Далее, в силу равенств (2.14) из леммы 2.1 [3] следует, что функция Ru $\forall\delta>0$ удовлетворяет оценкам

$$\left|\frac{\partial(Ru)}{\partial x}\right|\leqslant \text{const}\,\rho_1^{-\delta}(z)\,\rho_0^{-\delta}(z); \quad \left|\frac{\partial(Ru)}{\partial y}\right|\leqslant \text{const}\,\rho_1^{-\delta}(z)\rho_0^{-\delta}(z).$$

Аналогично такие же оценки будут верны и для первых производных функций $H(z)$ и $\Phi_k(z)$ $(k=1, 2, ..., m_0+1)$. Следовательно, из равенства (2.17) следует, что $u(z)$ удовлетворяет условиям (1.4), так как можно взять $\alpha>1-\alpha_0$. Лемма доказана.

Полученные выше основные утверждения сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. **При выполнении условий (2.12) (т. е. $m_0>m_1>0$; $l>0$; m_0 и m_1—четные) задача (1.1), (1.3), (1.4) эквивалентна урав-**

нению (2.21) с вполне непрерывным в пространстве $C_\tau(\overline{D})$ оператором P, где $\tau=\max(\alpha_0, \alpha_1)$, а α_0 и α_1—числа, фигурирующие в (2.1).

§ 3. Индекс задачи (1.1), (1.3), (1.4)

Вводя обозначения $m=m_0+2l+2$; $F_0(h, g)=H+Q[g-\text{Re}(\overline{\lambda}H)|_{\Gamma_0}]$, $F_k(z)=\Phi_k(z)-Q[\text{Re}(\overline{\lambda}\Phi_k)|_{\Gamma_0}]$ и $\beta_k=b_k$ при $1\leq k\leq m_0+1$, $F_k(z)=\varphi_{k-m_0-1}(z)$ и $\beta_k=c_k$ при $m_0+1<k\leq m$, получим из (2.21)

$$u+Pu=F_0(h, g)+\sum_{k=1}^{m}\beta_kF_k(z). \tag{3.1}$$

Лемма 3. Функции $F_1(z), F_2(z), \ldots, F_m(z)$ линейно независимы (относительно поля действительных чисел).

Доказательство. Пусть для некоторых чисел $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$

$$\delta_1F_1(z)+\delta_2F_2(z)+\ldots+\delta_mF_m(z)=0,\quad z\in D. \tag{3.2}$$

Дифференцируя обе части этого равенства по $\overline{z}$, получим (см. (2.20))

$$\sum_{k=1}^{m_1+1}\delta_k[\varphi_{1k}(z)+q\overline{\varphi_{1k}(z)}]=0,\quad z\in D_1, \tag{3.3}$$

$$\sum_{k=1}^{m_0-m_1}\delta_{k+m_1+1}[\varphi_{2k}(z)+q\overline{\varphi_{2k}(z)}]=0,\quad z\in D_2, \tag{3.4}$$

поскольку функции $Q[\text{Re}(\overline{\lambda}\,\Phi_k)|_{\Gamma_0}]$ и $F_{m_0+2}(z), \ldots, F_m(z)$ аналитичны. Переходя в (3.3) к комплексно сопряженным величинам, затем умножая на q и вычитывая из (3.3) полученное равенство, будем иметь

$$\sum_{k=1}^{m_1+1}\delta_k\varphi_{1k}(z)=0,\quad z\in D_1.$$

Так как функции $\varphi_{11}(z), \ldots, \varphi_{1m_1+1}(z)$ линейно независимы, то $\delta_1=\delta_2=\ldots=\delta_{m_1+1}=0$. Аналогично из (3.4) получим, что $\delta_{m_1+2}=\ldots=\delta_{m_0+1}=0$. Тогда в силу линейной независимости функций $F_{m_0+2}(z), \ldots, F_m(z)$ из (3.2) следует, что $\delta_{m_0+2}=\ldots=\delta_m=0$. Лемма доказана. Имеет место

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 задача (1.1), (1.3), (1.4) нётерова и ее индекс равен $m=m_0+2l+2$.

Доказательство. Пусть B—банахово пространство элементов $v=(u, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ с обычными операциями и нормой $\|v\|=C_\tau(u, \overline{D})+\max\limits_{1\leq k\leq m}|\beta_k|$, где $u\in C_\tau(\overline{D})$, а $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$—вещественные числа. Рассмотрим операторы A_1 и A_2, отображающие пространство B соответственно в B и $C_\tau(\overline{D})$, по следующим правилам:

$$A_1v=(u+Pu, \beta_1, \ldots, \beta_m),\quad A_2v=u-\beta_1F_1(z)-\ldots-\beta_mF_m(z).$$

Тогда уравнение (3.1) можно записать в виде

$$A_2A_1v=F_0. \tag{3.5}$$

В силу полной непрерывности оператора P оператор A_1 нётеров и $\operatorname{ind} A_1=0$ (см., напр., [5]). Легко видеть, что и оператор A_2 нётеров и $\operatorname{ind} A_2=m$. Тогда оператор A_2A_1 нётеров и $\operatorname{ind}(A_2A_1)=\operatorname{ind} A_2+\operatorname{ind} A_1=m$.

Пусть теперь линейные функционалы $l_1, l_2, \ldots, l_\nu$, определенные в пространства $C_\gamma(D)$, составляют полную систему решений сопряженного однородного уравнения, соответствующего уравнению (3.5). Тогда для разрешимости уравнения (3.5) необходимы и достаточны условия

$$l_1(F_0)=0,\quad l_2(F_0)=0,\ \ldots,\ l_\nu(F_0)=0, \tag{3.6}$$

Ясно, что условия (3.6), в свою очередь, будут необходимы и достаточны для разрешимости задачи (1.1), (1.3), (1.4).

Покажем теперь, что функционалы $l_1, l_2, \ldots, l_\nu$ линейно независимы как функционалы от h и g. Действительно, пусть функционалы $g_k(h, g)\equiv l_k(F_0), k=1, 2, \ldots, \nu$ линейно зависимы, т. е. существуют числа $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\nu$, не все равные нулю, такие, что для всех g и h

$$\delta_1 g_1(h, g)+\delta_2 g_2(h, g)+\ldots+\delta_\nu g_\nu(h, g)=0. \tag{3.7}$$

В частности, это равенство имеет место при

$$h=\frac{\partial}{\partial\bar z}\left(\frac{\partial f}{\partial\bar z}-q\overline{\frac{\partial f}{\partial\bar z}}\right),\quad g=0, \tag{3.8}$$

где f—бесконечно дифференцируемая, финитная в области D функция. Подставляя в (3.7) функции (3.8), получим, что для всех f

$$\delta_1\omega_1(f)+\delta_2\omega_2(f)+\ldots+\delta_\nu\omega_\nu(f)=0, \tag{3.9}$$

где

$$\omega_k(f)=g_k\left[\frac{\partial}{\partial\bar z}\left(\frac{\partial f}{\partial\bar z}-q\frac{\partial f}{\partial\bar z}\right),\ 0\right],\quad k=1, 2, \ldots, \nu.$$

Условия разрешимости (3.6) задачи (1.1), (1.3), (1.4) для данных вида (3.8) примут вид

$$\omega_1(f)=0,\quad \omega_2(f)=0,\ \ldots,\ \omega_\nu(f)=0.$$

Но эти условия в силу (3.9) линейно зависимы. Следовательно, число линейно независимых условий разрешимости задачи (1.1), (1.3), (1.4) меньше ν. С другой стороны, эта задача при данных вида (3.8) будет эквивалентна уравнению

$$u+Pu=f+\sum_{k=1}^{m}\beta_k F_k,$$

для разрешимости которого необходимы и достаточны следующие линейно независимые условия;

$$l_1(f)=0,\quad l_2(f)=0,\ \ldots,\ l_\nu(f)=0.$$

Таким образом, число линейно независимых условий разрешимости за-

дачи (1.1), (1.3), (1.4), с одной стороны, меньше ν, с другой стороны, равно ν. Из полученного противоречия следует, что функционалы $g_1(h, g), \ldots, g_\nu(h, g)$ линейно независимы. Таким образом, число линейно независимых условий разрешимости задачи (1.1), (1.3), (1.4) и уравнения (3.5) равны.

Кроме того, легко видеть, что однородная задача (1.1), (1.3), (1.4) ($h=0$, $g=0$) и однородное уравнение (3.5) имеют одинаковое количество линейно независимых решений. Поэтому индекс задачи (1.1), (1.3), (1.4) равен индексу уравнения (3.5), т. е. равен m. Теорема доказана.

Автор выражает признательность проф. Н. Е. Товмасяну за ценные указания.

Кафедра высшей математики *Поступила 27.04.1982*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Афян С. К.** Краевая задача Римана-Гильберта для одного класса вырождающихся эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка.—Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., 1976, т. 11, № 3.
2. **Афян С. К.** Краевая задача Римана-Гильберта для одного класса вырождающихся эллиптических систем.—Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., 1977, т. 12, № 2.
3. **Афян С. К.** Задача Дирихле для одного класса эллиптических уравнений с вырождением внутри области.—Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 2, с. 260—267.
4. **Векуа И. Н.** Обобщенные аналитические функции. М.: 1959.
5. **Крейн С. Г.** Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: 1971.

Ս. Կ. ԱՖՅԱՆ

ՌԻՄԱՆ-ՀԻԼԲԵՐՏԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ ՏԻՐՈՒՅԹԻ ՆԵՐՍՈՒՄ ԵՎ ԵԶՐՈՒՄ ՎԵՐԱԾՎՈՂ ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ՀԱՄԱՐ

Դիցուք D*-ն միակապ սահմանափակ տիրույթ է* $z=x+iy$ *կոմպլեքս հարթության մեջ* Γ_0 *ողորկ եզրով, իսկ* Γ_1*-փակ ողորկ կոր է տիրույթի ներսում և* $\rho_j(z)$*-ը* z *կետի հեռավորությունն է* Γ_j *կորից,* $j=0,1$։

D *տիրույթում դիտարկվում է հետևյալ հավասարումը՝*

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\frac{\partial u}{\partial \bar z} - q(z)\overline{\frac{\partial u}{\partial \bar z}}\right) + a_1(z)\frac{\partial u}{\partial z} + a_2(z)\overline{\frac{\partial u}{\partial z}} + a_3(z)\frac{\partial u}{\partial \bar z} +$$

$$+a_4(z)\overline{\frac{\partial u}{\partial \bar z}} + a_5(z)u + a_6(z)\bar u = h(z), \qquad (1)$$

որտեղ $q(z)$ *ֆունկցիան բավարարում է* $1-|q(z)|^2 = \rho_0^{\alpha_0}(z)\rho_1^{\alpha_1}(z)q_0(z)$ $(q_0(z) \neq 0,\ 0<\alpha_j<1)$ *պայմանին։*

Ստացվում է, որ Ռիման-Հիլբերտի տիպի խնդիրը (1) հավասարման համար, որը էլիպտական է $D\setminus\Gamma_1$*-ում և վերածվում է* Γ_0 *և* Γ_1 *կորերի վրա, նյոտերյան տիպի է և հաշված է ինդեքսը։*