ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1982 Естественные науки

УДК 519.6+517.946.

Математика

М. В. АЛЕКСЕЕВСКИЙ

О МЕТОДЕ УСЕЧЕНИЯ ПРИ РАЗНОСТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Показано, что усеченные разностные схемы для несамосопряженной двухточечной краевой задачи с малым параметром при старшей производной обладают свойством равномерной по малому парамстру сходимости.

Указывается способ построения в явном виде схем произвольного порядка равномерной по малому параметру точности.

Для численного решения отдельных классов сингулярно возмущенных краевых задач в настоящее время имеются специально разработанные разностные схемы, обладающие свойством равномерной по малому параметру сходимости. В частности, в работе [1] для двухточечной краевой задачи

$$\varepsilon u''+r(x)u'-q(x)u=-f(x),\quad 0<x<1, \tag{1}$$

$$u(0)=u_0,\quad u(1)=u_1,\quad 0<\varepsilon<1, \tag{2}$$

$$r(x)\geqslant r_0>0,\quad q(x)\geqslant 0,\quad r(x),\quad q(x),\ |f(x)|\leqslant R, \tag{3}$$

где r_0 и R—постоянные, а $r(x)$, $q(x)$, $f(x)$—достаточно гладкие функции, рассмотрен один из возможных способов построения разностных схем, имеющих равномерную по ε точность. Этот способ заключается в использовании точной схемы на равномерной сетке $\omega=\{x=x_i=ih;\ i=1, 2, \ldots, I-1,\ h=1/I\}$,

$$\Lambda y=\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\mu(0)\beta(0)}y_x-\frac{1}{\mu(0)\alpha(0)}y_{\bar{x}}\right)-dy=-\varphi, \tag{4}$$

$$y(0)=u_0,\quad y(1)=u_1,\quad x\in\omega,$$

где

$$d(x)F(\alpha,\ p,\ \mu\beta)[q]=F[q],\quad \varphi(x)=F[f],$$

$$F[g]=\frac{1}{\alpha(0)}\int\limits_{-1}^{0}\alpha(s)p(s)g(s)ds+\frac{1}{\mu(0)\beta(0)}\int\limits_{0}^{1}\mu(s)\beta(s)g(s)ds, \tag{5}$$

$$\mu(s)=\exp\left(\frac{h}{\varepsilon}\int\limits_{-1}^{s} r(x+th)dt\right),\quad p(s)=\mu(s)/\mu(0),\quad -1<s<1,$$

а $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ определяются как решения начальных задач

$$L\alpha=0,\quad \alpha(-1)=0,\quad \alpha'(-1)=\varepsilon^{-1}\mu^{-1}(-1)=\varepsilon^{-1}, \tag{6}$$

$$L\beta=0,\quad \beta(1)=0,\quad \beta'(1)=\varepsilon^{-1}\mu^{-1}(1), \tag{7}$$

$$Lv=\varepsilon v''+hr(x+sh)v'-h^2q(x+sh)v,\quad x\in\omega.$$

Решение задачи (4) (см. [1], [2]) совпадает с решением задачи (1), (2) в узлах сетки ω. Если рассмотреть возмущенные коэффициенты

$$\tilde r(x+sh)=r(x+sh)+\delta_1(x,s),\quad \tilde q(x+sh)=q(x+sh)+\delta_2(x,s),$$

$$\tilde q_1(x+sh)=q(x+sh)+\delta_3(x,s),\quad \tilde f(x+sh)=f(x+sh)+\delta_4(x,s),$$

где $x\in\omega$, то приближенная схема может быть получена по тому же принципу, что и точная с той лишь разницей, что $\tilde q(x+sh)$ вместе с $\tilde r(x+sh)$ подставляется в (6) и (7) для нахождения $\tilde\mu$, $\tilde p$, $\tilde\alpha$ и $\tilde\beta$, а $q_1(x+sh)$ служит для нахождения $\tilde d=F(\tilde\alpha,\ \tilde p,\ \tilde\mu\tilde\beta)[\tilde q_1]$. Таким образом, имеем приближенную задачу

$$\tilde\Lambda\tilde y=-\tilde\varphi=-F(\tilde\alpha,\ \tilde p,\ \tilde\mu\tilde\beta)[\tilde f],\quad \tilde y(0)=u_0,\quad \tilde y(1)=u_1 \tag{8}$$

и имеет место

Теорема. Пусть y—решение задачи (4), а $\tilde y$—задачи (8) и пусть $|\delta_i(x,s)|\leqslant\delta_i, i=1,2,3,4,\ x\in\omega$. Если $\delta_i\leqslant Ch$, $C=\mathrm{const}$ и выполнены условия $\tilde r\geqslant r_0>0$, $\tilde q$, $\tilde q_1\geqslant 0$ для всех $x\in\omega$, а также условия (3), то имеет место оценка

$$|y(x)-\tilde y(x)|\leqslant M(\delta_1+h\delta_2+\delta_3+\delta_4),\quad x\in\omega,$$

где $M=\mathrm{const}$ и не зависит от ε и h.

В работе [1] эта теорема доказана для случая, когда δ_1, δ_3, $\delta_4\leqslant Ch^2$, а $\delta_2\leqslant Ch$. В общем случае она доказывается таким же образом.

Цель настоящей работы—показать, что разностные схемы, полученные из (4) методом усечения, предложенным А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским (см. [2], с. 208), наряду с рассмотренными выше схемами, обладают свойством равномерной по ε сходимости.

1. Итак, рассмотрим метод усечения коэффициентов точной схемы $\alpha(s)$ и $\beta(s)$. Точнее, будем вместо $\beta(s)$ рассматривать $w(s)\equiv\mu(s)\beta(s)$. От $r(x)$, $q(x)$ и $f(x)$, $0<x<1$ потребуем достаточной по ходу изложения гладкости. Для краткости будем писать $\bar r(s)=r(x+sh)$, $\bar q(s)=q(x+sh)$, $\bar f(s)=f(x+sh)$, где $x\in\omega$. Буквой C будем обозначать постоянные, не зависящие от ε и h.

Рассмотрим функцию $\alpha(s)$, удовлетворяющую интегральному уравнению, эквивалентному задаче (6):

$$\alpha(s)=g(s)+h\int_{-1}^{1}K(s,\tau)\alpha(\tau)d\tau, \tag{9}$$

где

$$g(s)=\varepsilon^{-1}\int_{-1}^{s}\mu^{-1}(\tau)d\tau,\quad K(s,\tau)=\begin{cases}\frac{h}{\varepsilon}\bar{q}(\tau)\int_{\tau}^{s}\frac{\mu(\tau)}{\mu(t)}dt, & s\geq\tau\\ 0 & , s<\tau.\end{cases}$$

Очевидно, что $K(s,\tau)\leq C\varkappa$, где $\varkappa=\min\{1,\ h/\varepsilon\}$. Известно [3], что при $h<r_0/(2R)$, где R и r_0 из условия (3),

$$\alpha(s)=\sum_{m=0}^{\infty}h^m K^m g,\quad K^m g=K(K^{m-1}g),$$

$$Kg=\int_{-1}^{1}K(s,\tau)g(\tau)d\tau,\ K^1 g\equiv Kg.$$

Рассмотрим конечную сумму

$$\bar{\alpha}_N(s)=\sum_{m=0}^{N}h^m K^m g.$$

Имеем

$$\alpha(s)-\bar{\alpha}_N(s)=\sum_{m=N+1}^{\infty}h^m K^m g=h^{N+1}K^{N+1}\alpha,$$

где

$$K^{N+1}\alpha=\int_{-1}^{1}K_{N+1}(s,\tau)\alpha(\tau)d\tau,$$

$$K_m(s,\tau)=\int_{-1}^{1}\dots\int_{-1}^{1}K(s,t_1)K(t_1,t_2)\dots K(t_{m-1},\tau)dt_1\dots dt_{m-1}.$$

Поэтому согласно лемме 1 из [1]

$$|\alpha(s)-\bar{\alpha}_N(s)|\leq Ch^{N+1}\varkappa^{N+1}\max_{-1\leq s\leq 1}|\alpha(s)|\leq\frac{Ch^{N+1}\varkappa^{N+1}}{\varepsilon+h}. \tag{10}$$

Аппроксимируем $\bar{\alpha}_N(s)$ таким образом, чтобы приближение было достаточно точным и могло быть найдено в конечном виде. Рассмотрим

$$K_n(s,\tau)=\frac{h}{\varepsilon}\bar q_n(\tau)\int_\tau^s \exp\left(-\frac{\gamma(x)h(t-\tau)}{\varepsilon}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{hv(t,\tau)}{\varepsilon}\right)^k+\right.$$

$$\left.+\delta_n(t,\tau)\right)dt,$$

где

$$\gamma(x)=\min_{-1<s<1}\bar r(s),\quad x\in\omega,\quad v(t,\tau)=\int_\tau^t(\bar r(\xi)-\gamma(x))d\xi,$$

$$\delta_n(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{(n+1)!}\left(\dfrac{hv(t,\tau)}{\varepsilon}\right)^{n+1}, & n=2k+1,\quad k=0,1,\dots\\ 0 & , \ n=2k,\end{cases}$$

$$\bar q_n(\tau)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\bar q^{(i)}(0)\tau^i+\max_{-1<s<1}|\bar q^{(n+1)}(s)|\frac{\tau^{n+1}}{(n+1)!},\quad n=0,1,\dots N.$$

Тот же смысл для $\bar r(\xi)$ и $\bar f(\xi)$ имеют выражения $\bar r_n(\xi)$ и $\bar f_n(\xi)$. Очевидно, что

$$0\leqslant v(t,\tau)\leqslant Ch(t-\tau),\quad 0\leqslant\bar q_n(\tau)-\bar q(\tau)\leqslant Ch^{N+1}.$$

Отсюда имеем

$$|K_{N-m}(s,\tau)-K(s,\tau)|\leqslant C\left(\frac{h}{\varepsilon}\bar q_{N-m}(\tau)\int_\tau^s \exp\left(-\frac{\gamma(x)h(t-\tau)}{\varepsilon}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{hv(t,\tau)}{\varepsilon}\right)^{N-m+1}dt+x\,|\bar q(\tau)-\bar q_{N-m}(\tau)|\right)\leqslant Cxh^{N-m+1}.$$

Введем еще одно обозначение

$$v_n(t,\tau)=\int_\tau^t(\bar r_n(\xi)-\gamma(x))d\xi, \tag{11}$$

причем очевидно

$$|v_n^k(t,\tau)-v^k(t,\tau)|\leqslant Ch^{k+n}(t-\tau)^k,\quad k,\ n=0,1,\dots$$

На следующем этапе $K_n(s,\tau)$, $n=0,1,\dots,N$ аппроксимируем с помощью

$$\tilde K_n(s,\tau)=\frac{h}{\varepsilon}\bar q_n(\tau)\int_\tau^s E_n(t,\tau)\exp\left(-\frac{\gamma(x)h(t-\tau)}{\varepsilon}\right)dt, \tag{12}$$

$$E_n(t,\tau)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{K!}\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^k v_n^k(t,\tau)+\delta_{nn}(t,\tau),$$

$$\delta_{nj}(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{(n+1)!}\left(\dfrac{hv_j(t,\tau)}{\varepsilon}\right)^{n+1}, & n=2k+1,\ k,\ j=0,1,\ldots\\ 0 & ,\ n=2k.\end{cases}$$

В результате получим

$$|\widetilde{K}_{N-m}(s,\tau)-K_{N-m}(s,\tau)|\leqslant C\varkappa h^{N-m+1}$$

и в итоге

$$|\widetilde{K}_{N-m}(s,\tau)-K(s,\tau)|\leqslant C\varkappa h^{N-m+1}.$$

Если $\bar{q}(\tau)\equiv 1$, то $g(s)=h^{-1}K(s,-1)$. Полагая $\widetilde{g}_n(s)=h^{-1}\widetilde{K}_n(s,-1)$, получим

$$|g(s)-\widetilde{g}_{N-m}(s)|\leqslant C\varkappa(\varepsilon+h)^{-1}h^{N-m+1},\quad m=0,\ 1,\ \ldots\ N.$$

Пусть

$$\widetilde{K}^m\widetilde{g}_n=\int_{-1}^{1}\ldots\int_{-1}^{1}\widetilde{K}_n(s,t_1)\widetilde{K}_n(t_1,t_2)\ldots\widetilde{K}_n(t_{m-1},\tau)\,\widetilde{g}_n(\tau)dt_1\ldots dt_{m-1}\,d\tau, \qquad (13)$$

тогда с учетом предшествующих двух неравенств получим

$$|K^m g-\widetilde{K}^m\widetilde{g}_{N-m}|\leqslant C\varkappa(\varepsilon+h)^{-1}h^{N-m+1}.$$

Окончательно для

$$\widetilde{\alpha}_N(s)=\sum_{m=0}^{N}h^m\widetilde{K}^m\widetilde{g}_{N-m}$$

с учетом (10) получим

$$|\alpha(s)-\widetilde{\alpha}_N(s)|\leqslant C\varkappa(\varepsilon+h)^{-1}h^{N+1}. \qquad (14)$$

Введем обозначение $\lambda=\max\{\varepsilon,h\}$. Поскольку $\alpha(s)$ и $\widetilde{\alpha}_N(s)$ имеют смысл для всех ε, $h<1$ и, кроме того, $\lambda\alpha(s)\leqslant C$, $\lambda\widetilde{\alpha}_N(s)\leqslant C$, то предположение о том, что $h\leqslant r_0/(2R)$, можно опустить, и неравенство (14) будет выполнено для всех $h<1$.

Очевидно, что $\widetilde{\alpha}_N(s)$ может быть найдено в конечном виде, так как

$$\widetilde{K}_n(s,\tau)=P_1(s,\tau)\exp\left(-\frac{\gamma(x)h(s-\tau)}{\varepsilon}\right)+P_2(\tau),$$

где P_1—полином от s и τ, а P_2—от τ.

Для $w(s)=\mu(s)\beta(s)$ аналогично имеем

$$w(s)=g_1(s)+h\int_{-1}^{1}K_1(s,\tau)w(\tau)d\tau, \tag{15}$$

$$g_1(s)=\varepsilon^{-1}\int_{s}^{1}\frac{\mu(s)}{\mu(t)}dt, \qquad K_1(s,\tau)=\begin{cases}\frac{h}{\varepsilon}\bar{q}(\tau)\int_{s}^{\tau}\frac{\mu(s)}{\mu(t)}dt, & \tau\geqslant s,\\ 0 & , \tau<s,\end{cases}$$

а $\tilde{w}_N(s)$ определяется через $K_1(s,\tau)$ таким же образом, как и $\tilde{\alpha}_N(s)$ через $K(s,\tau)$. Заменяя в (12) под интегралом τ на s, а также в переменных интегрирования τ на s и наоборот, получим $\tilde{K}_{1,n}(s,\tau)$. Затем так же, как и в (13), из $\tilde{K}_{1,n}(s,\tau)$ и $\tilde{g}_{1,n}(\tau)=\hbar^{-1}\tilde{K}_{1,n}(\tau,1)$ при $\bar{q}(\tau)\equiv 1$ получим выражение $\tilde{K}_1^m\tilde{g}_{1,n}$ и окончательно будем иметь

$$|w(s)-\tilde{w}_N(s)|\leqslant C_\varkappa(\varepsilon+\hbar)^{-1}h^{N+1}, \quad \tilde{w}_N(s)=\sum_{m=0}^{N}h^m\tilde{K}_1^m\tilde{g}_{1,N-m}. \tag{16}$$

Таким образом доказана

Лемма 1. При выполнении условия (3) для решений $\alpha(s)$ и $w(s)$ задач (9) и (15) соответственно имеют место неравенства (14) и (16). При этом приближенные решения $\tilde{\alpha}_N(s)$ и $\tilde{w}_N(s)$ могут быть найдены в конечном виде.

Замечание. В силу выбора $\delta_{nj}(t,\tau)$

$$E_n(t,\tau)>\exp\left(-\frac{hv_n(t,\tau)}{\varepsilon}\right)\geqslant\exp\left(-\frac{h(R-\gamma(x))(t-\tau)}{\varepsilon}\right),$$

где $R=\mathrm{const}$ из условия (3), $x\in\omega$. Поэтому

$$\tilde{K}_n(s,\tau)>\frac{h}{\varepsilon}\bar{q}_n(\tau)\int_{\tau}^{s}\exp\left(-\frac{Rh(t-\tau)}{\varepsilon}\right)dt\geqslant 0,$$

$$\tilde{g}_n(\tau)\geqslant 0, \quad n=0,1,\ldots N,$$

а также

$$\lambda\tilde{g}_n(0)>\min\left(\exp\left(-\frac{R}{2}\right), \quad R^{-1}(1-\exp(-R))\right)\equiv g_0>0.$$

Следовательно,

$$\tilde{\alpha}_N(0)\geqslant g_0>0, \quad N=0,1,\ldots. \tag{17}$$

Аналогично получим

$$\tilde{w}_N(0) \geqslant g_0 > 0, \quad N = 0, 1, \ldots . \tag{18}$$

2. Рассмотрим приближенную разностную задачу

$$\tilde{\Lambda}_N \tilde{y} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\tilde{w}_N(0)} \tilde{y}_x - \frac{1}{\acute{\mu}_N(0)\acute{\alpha}_N(0)} \acute{y}_{\bar{x}}\right) - \acute{d}_N \acute{y} = -\acute{\varphi}_N, \tag{19}$$

$$\acute{y}(0) = u_0, \quad \acute{y}(1) = u_1, \quad x \in \omega,$$

где

$$\acute{d}_N = F(\acute{\alpha}_N, \acute{p}_N, \acute{w}_N)[\bar{q}_N] \equiv \acute{F}_N[\bar{q}_N], \quad \acute{\varphi}_N = \acute{F}_N[\bar{f}_N],$$

$$\acute{p}_N(s) = \exp\left(\frac{\gamma(x)sh}{\varepsilon}\right) E_N(0, s), \quad \acute{\mu}_N^{-1}(s) = \exp\left(-\frac{\gamma(x)(s+1)h}{\varepsilon}\right) E_N(s, -1).$$

При этом отметим, что $\acute{d}_N$ и $\acute{\varphi}_N$ так же, как и $\acute{w}_N$ и $\acute{\alpha}_N$, могут быть найдены в конечном виде.

Известно [1, 2], что решение задачи (19) при $u_0 = u_1 = 0$ можно представить в виде

$$\acute{y}_i = \sum_{k=1}^{I-1} \acute{G}_{ik} \acute{\varphi}_{N,k} h = (\acute{G}_{ik}, \acute{\varphi}_{N,k}), \quad i, k = 1, 2, \ldots I-1,$$

где $\acute{G}_{ik}$ есть функция Грина, определяемая при каждом $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots I-1$ из условий

$$\acute{\Lambda}_{N,(i)} \acute{G}_{ik} = -\frac{\delta_{ik}}{h}, \quad \acute{G}_{0k} = \acute{G}_{Ik} = 0, \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k, \end{cases}$$

$$i = 1, 2 \ldots I-1,$$

причем $\acute{G}_{ik} = \acute{G}(ih, kh)$, $\acute{y}_i = \acute{y}(ih)$, $\tilde{w}_{N,i}(s) = \tilde{w}_N(s)$ при $x = x_i = ih \in \omega$ и т. д.

Имеет место следующая

Лемма 2. Если выполнены условия (3), то функция Грина $\acute{G}_{ik}$ задачи (19) для каждого $N = 0, 1, 2, \ldots$ удовлетворяет неравенству

$$\max_{i,k} \acute{G}_{ik} \leqslant C, \quad i, k = 1, 2, \ldots I-1,$$

где C, как и прежде, означает постоянную, не зависящую от ε и h.

Доказательство. Перепишем задачу (19) в виде

$$B_{N,i} \acute{y}_{i+1} - C_{N,i} \acute{y}_i + A_{N,i} \acute{y}_{i-1} = -F_{N,i},$$

$$i = 1, 2, \ldots I-1, \qquad \acute{y}_0 = \acute{y}_I = 0,$$

где

$$B_{N,i}=[\check{w}_{N,i}(0)]^{-1},\quad A_{N,i}=[\check{\mu}_{N,i}(0)\check{\alpha}_{N,i}(0)]^{-1},$$

$$C_{N,i}=A_{N,i}+B_{N,i}+h^2\check{d}_{N,i},\quad F_{N,i}=h^2\check{\varphi}_{N,i}.$$

Для упрощения записи при доказательстве леммы индекс N будем опускать и писать $B_i=B_{N,i}$, $A_i=A_{N,i}$, $\check{\mu}_i(0)=\check{\mu}_{N,i}(0)$ и т. д.

Получим для предыдущей задачи априорную оценку. Для этого воспользуемся формулами правой прогонки

$$\check{y}_i=\xi_{i+1}\check{y}_{i+1}+\eta_{i+1},\quad i=0,\ 1,\ \dots\ I-1,\quad \check{y}_I=0,$$

$$\xi_{i+1}=\frac{B_i}{C_i-\xi_i A_i},\quad \eta_{i+1}=\frac{A_i\eta_i+F_i}{C_i-\xi_i A_i},\quad i=1,\ 2,\ \dots\ I-1,$$

причем $\xi_1=\eta_1=0$ и $0<\xi\leqslant 1$, $i=1, \dots I$. Поэтому

$$|\check{y}_i|\leqslant|\check{y}_{i+1}|+|\eta_{i+1}|\leqslant\sum_{k=i+1}^{I}|\eta_k|.$$

Для $\sigma_i=A_i\eta_i$ имеем

$$|\sigma_{i+1}|\leqslant|\sigma_i|\frac{A_{i+1}}{B_i}+|F_i|\frac{A_{i+1}}{B_i}\leqslant\sum_{k=1}^{i}|F_k|\cdot\prod_{j=k}^{i}\frac{A_{j+1}}{B_j}.$$

Оценим выражение

$$\frac{A_{j+1}}{B_j}=\check{\mu}_j^{-1}(0)\,\frac{\check{w}_j(0)}{\check{\alpha}_{j+1}(0)},\quad j=1,\ 2,\ \dots\ I-1.$$

В силу леммы 1 неравенства (17) и того [1], что $w_j(0)=\alpha_{j+1}(0)$, получим для каждого $N=0, 1,\dots$

$$0<\frac{\check{w}_j(0)}{\check{\alpha}_{j+1}(0)}<1+Ch^{N+1},\quad j=1,\ 2,\ \dots\ I-1.$$

Имеем также

$$\check{\mu}_j^{-1}(0)\leqslant\exp\left(-\frac{r_1h}{\varepsilon}\right)(1+Ch^N),\quad C>0,\quad 0<r_1<r_0,$$

где $r_0=\mathrm{const}$ из (3), $N=1, 2, \dots$, а при $N=0$

$$\check{\mu}_j^{-1}(0)\leqslant\exp\left(-\frac{r_1h}{\varepsilon}\right).$$

Тогда

$$|\check{y}_i|\leqslant\sum_{m=i+1}^{I}|\sigma_m|A_m^{-1}\leqslant(1+Ch)^{\frac{1}{h}}\sum_{m=i}^{I-1}\check{\alpha}_{m+1}(0)\sum_{k=1}^{m}|F_k|\cdot\prod_{j=k+1}^{m}\check{\mu}_j^{-1}(0)\leqslant$$

$$\leqslant C(\varepsilon+h)^{-1}\sum_{m=i}^{l-1}\sum_{k=1}^{m}|F_k|\exp\left(-\frac{r_1(m-k)h}{\varepsilon}\right).$$

Полагая $F_n=h^2\delta_{nk}/h$, получим оценку для $\check{G}_{lk}$:

$$\check{G}_{lk}\leqslant C(\varepsilon+h)^{-1}\sum_{m=k}^{l-1}h\exp\left(-\frac{r_1(m-k)h}{\varepsilon}\right)\leqslant C,$$

поскольку

$$\sum_{m=k}^{l-1}h\exp\left(-\frac{r_1(m-k)h}{\varepsilon}\right)<h+\frac{\varepsilon}{r_1}.$$

Лемма полностью доказана.

3. Перейдем к оценке точности задачи (19) по отношению к задаче (4). Имеет место

Теорема 1. Пусть y и $\check{y}$—решения задач (4) и (19) соответственно. Тогда при выполнении условия (3) имеет место оценка

$$|y(x)-\check{y}(x)|\leqslant Ch^{N+1},\qquad x\in\omega,$$

где $C=\text{const}$, не зависящая от ε и h.

Доказательство. Пусть $z(x)=\check{y}(x)-y(x)$, $x\in\omega$. Имеем

$$\check{\Lambda}_N z=-\psi,\quad z(0)=z(1)=0,\quad \psi=(\check{\varphi}_N-\varphi)+(\check{\Lambda}_N-\Lambda)y.$$

Поскольку [2] $z=(\check{G},\psi)$, то в силу леммы 2 $|z|\leqslant C(1,|\psi|)$. Погрешность аппроксимации ψ оценивается с помощью леммы 1. Оценим сначала

$$\begin{gathered}|\check{\varphi}_N-\varphi|\leqslant|\check{F}_N[\bar{f}_N]-F(\alpha,\check{p}_N,\check{w}_N)[\bar{f}_N]|+\\+|F(\alpha,\check{p}_N,\tilde{w}_N)[\bar{f}_N]-F(\alpha,p,\tilde{w}_N)[\bar{f}_N]|+|F(\alpha,p,\tilde{w}_N)[\bar{f}_N]-\\-F(\alpha,p,w)[\bar{f}_N]|+|F(\alpha,p,w)[\bar{f}_N]-F[\bar{f}]|.\end{gathered}\tag{20}$$

Оценим, например, первое слагаемое в правой части (20), которое обозначим через S_1. Представим его в виде

$$S_1=\left|\frac{\lambda(\alpha(0)-\check{\alpha}_N(0))}{\lambda^2\check{\alpha}_N(0)\alpha(0)}\int_{-1}^{0}\lambda\check{\alpha}_N(s)\check{p}_N(s)\bar{f}_N(s)ds+\frac{1}{\lambda\alpha(0)}\int_{-1}^{0}\lambda(\check{\alpha}_N(s)-\right.$$
$$\left.-\alpha(s))\check{p}_N(s)\bar{f}_N(s)\,ds\right|.$$

Используя лемму 1 и замечание к ней, получим, что $S_1\leqslant C\varkappa h^{N+1}$. Аналогично оцениваются остальные члены в правой части (20), вследствие чего $|\check{\varphi}_N-\varphi|\leqslant C\varkappa h^{N+1}$.

Поскольку [1] решение y равномерно по ε ограничено, то $|(\bar{d}_N - d)y| \leqslant C\varkappa h^{N+1}$, и, следовательно, остается оценить

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\bar{w}_N(0)} - \frac{1}{w(0)}\right)y_x - \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\bar{\mu}_N(0)\bar{\alpha}_N(0)} - \frac{1}{\mu(0)\alpha(0)}\right)y_{\bar{x}}. \quad (21)$$

Оценим, например, второе слагаемое в (21), которое обозначим через V и представим в виде

$$V = y_{\bar{x}}[\varkappa^{-1}(\bar{\mu}_N^{-1}(0) - \mu^{-1}(0))\lambda\alpha(0) - \mu^{-1}(0)\lambda\varkappa^{-1}(\alpha(0) - \bar{\alpha}_N(0))]\cdot[\lambda^2\alpha(0)\bar{\alpha}_N(0)]^{-1}.$$

С помощью леммы I, неравенства (17) и леммы 5 из [1], согласно которой

$$|y_{\bar{x}}(x)| \leqslant C\left((\varepsilon+h)^{-1}\exp\left(-\frac{r_0(x-h)}{\varepsilon}\right)+1\right), \quad x\in\omega,$$

убеждаемся, что $(1, |V|) \leqslant Ch^{N+1}$. Такая же оценка имеет место и для первого слагаемого в (21). Окончательно получим

$$|z| \leqslant C(1, |\psi|) \leqslant Ch^{N+1},$$

причем, как и прежде, $C = \mathrm{const}$, не зависящая от ε и h. Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Считая, что ε фиксировано, имеем вместо (10) следующую оценку:

$$|\alpha(s) - \bar{\alpha}_N(s)| \leqslant Qh^{2N+2}, \quad Q = Q(\varepsilon) = \mathrm{const},$$

поскольку $K^{N+1}\alpha \leqslant Ch^{N+1}\varepsilon^{-(N+2)}$. Такую же оценку получим для $\bar{w}_N(s)$. Если теперь в (4) вместо α и w подставить $\bar{\alpha}_N$ и $\bar{w}_N$, то для решения $\bar{y}$ такой схемы получим

$$|\bar{y}(x) - y(x)| \leqslant Q_1 h^{2N+2}, \quad x\in\omega, \quad Q_1 = Q_1(\varepsilon) = \mathrm{const},$$

что и утверждается в [2] (см. с. 208).

Замечание 2. При $N = 0$ (19) будет ничем иным как схемой, предложенной в работе [4], с той лишь разницей, что в (19) используется $\gamma(x) = \min\limits_{-1<s<1} \bar{r}(s)$, а в схеме из [4]—значение $\bar{r}(0)$. Однако при $N = 0$ выбор того или иного значения функции $\bar{r}(s)$ не является существенным. Нахождение $\gamma(x)$ не представляет трудностей в случае, если, например, $r(x)$ является кусочно-монотонной функцией на отрезке $0 < x > 1$. Для удобства вместо $\gamma(x)$ можно использовать $\bar{\gamma}(x) = \bar{r}(0) - h \max\limits_{0<x<1} |r'(x)|$. Однако при этом условие (3) будет выполнено, если потребовать также, чтобы

$$h \leqslant r_1 / \max_{0<x<1} |r'(x)|, \quad 0 < r_1 < r_0.$$

В заключение выражаю искреннюю благодарность В. Б. Андрееву за постоянное внимание к работе.

ВНИИ электромеханики

Поступила 11.04.1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеевский М. В.** О разностной схеме для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной.—Сб. Разностные методы математической физики. МГУ, 1979, с. 36—60.
2. **Самарский А. А.** Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
3. **Канторович Л. В., Акилов Р. П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
4. **Ильин А. М.** Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной.—Математические заметки, 1969, т. 6(в. 2, с. 237—248.

Մ. Վ. ԱԼԵՔՍԵԵՎՍԿԻ

ՄԻԱՅՆԱԿ ԳՐԳՌՎԱԾ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՀԱՏՄԱՆ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ ՏԱՐԲԵՐԱՅԻՆ ԱՊՐՈՔՍԻՄԱՑԻԱՅԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Ցույց է տրվում, որ փոքր պարամետրով փոխադարձաբար չկապված երկկետային սահմանային խնդրի համար հատյալ համեմատական սխեմաներին բարձր ածանցյալի դեպքում յուրահատուկ է ըստ փոքր պարամետրի համաչափ նմանության հատկությունը։ Նկարագրվում է ըստ փոքր պարամետրի համաչափ ճշտության կամայական կարգի սխեմաների բացահայտ տեսքով կառուցման եղանակը։