

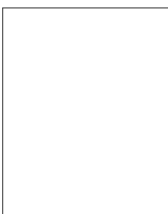
ПОСТРОЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЦЕН АКТИВОВ НА ОСНОВЕ ЦЕН ПРОИЗВОДНЫХ ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ

Данная работа посвящена применению метода максимальной энтропии для построения распределения цен активов исходя из реальных рыночных цен на колл-опционы (call option). В основе статьи лежит использование хорошо известных методов нахождения целевого распределения при различных значениях начальных параметров. Практическое применение метода рассмотрено на реальных рыночных данных.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: максимальная энтропия, распределение, колл-опцион, производные финансовые инструменты, деривативы



Геворгян Рубен Альбертович — FRM, д. э. н., к. ф.-м. н., профессор кафедры математических моделей в экономике факультета экономики и управления Ереванского государственного университета (г. Ереван, Армения)



Маргарян Нарек Давидович — аспирант кафедры актуарной математики механико-математического факультета Ереванского государственного университета (г. Ереван, Армения)

ВВЕДЕНИЕ

Идея о том, что цены деривативов содержат в себе определенную информацию о распределении будущих значений цен активов, лежащих в их основе, существует достаточно давно. Однако лишь в работе С. Росса [1] это утверждение было сформулировано математически корректно в виде теоремы, которая получила название Ross Recovery Theorem. Она утверждает, что в случае репрезентативных участников рынка и определенных условий на цены активов (положительность и неприводимость матрицы цен активов) распределение будущих цен активов на основе цен деривативов существует.

На практике условия теоремы Росса выполняются для достаточно широкого спектра задач. Существует несколько способов определить распределение вероятностей на основе цен производных инструментов. В этой статье мы рассмотрим модель, основанную на методе максимальной энтропии.

Определение будущих распределений цен активов очень важно для решения практических

задач оптимизации портфеля и управления финансовыми рисками. Можно утверждать, что указанные задачи традиционно решаются на основе исторических данных либо симуляционных методов. Определение будущих цен активов с помощью цен деривативов открывает новые возможности, т.к. при этом применяется информация, значительно отличающаяся от исторических данных и тем более от сведений, использующихся в симуляционных методах. Прогнозирование возможных значений цен активов в данном случае практически представляет собой консенсус-прогноз всех участников рынка. При этом участники рынка платят за данный прогноз и готовы нести связанные с ним риски. В этом заключается главное отличие рассматриваемого метода от достаточно популярных консенсус-прогнозов экспертов и экспертных групп, которые также часто используются при решении задач оптимизации инвестиционных портфелей и управления финансовыми рисками. Однако в этих случаях эксперты не берут на себя какие-либо риски, связанные со своими прогнозами. Кроме того, экспертные опросы ограничены достаточно узким кругом специалистов, в то время как при определении будущих распределений цен активов на основе цен деривативов учитывается мнение всего рынка.

Известно, что с помощью метода максимальной энтропии [2, 3, 4] можно получить распределение, которое меньше всего противоречит доступной информации и, следовательно, является максимально справедливым, или «однородным» по отношению к этой информации. В случае финансовых рынков данный метод рассматривался как аппарат изъятия полезной информации из доступных цен опционов [5]. На практике полезность информации может быть обоснована тем, что за опционы были заплачены реальные деньги (таким образом подразумевается, что в их ценах отражается настоящее ожидание рынка).

Одной из главных практических задач при построении распределения цен активов на основе цен опционов является выбор опционов, которые необходимо включить в модель. Самым

распространенным является вполне оправданный подход, при котором рассматриваются опционы с наиболее значительным объемом торгов [6].

В ранее опубликованных работах [7, 8] были рассмотрены проблемы вычислительного характера и их решения, а также найдены асимптотические границы для существования решения в случае малых выборок опционов. Эти результаты позволяют обеспечить получение распределения при любых начальных значениях параметров, соответствующих ограничениям конкретных задач.

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В классической модели оценивания опционов лежит теория ценообразования Блэка — Шоулза, в которой цена европейского колл-опциона является дисконтированной стоимостью математического ожидания будущих выплат. В реальности рыночные цены имеют значительное отклонение от теоретических цен, соответствующих теории безарбитражного оценивания при имеющейся ограниченной информации. Считается, что в этих отклонениях и скрывается та самая полезная информация, которую ищут потенциальные инвесторы. На основе данного предположения был разработан метод нахождения распределения цен активов, базирующихся на доступных ценах опционов [4], с помощью которого становится возможным обратное вычисление риск-нейтральной меры. Критерием выбора искомой меры является максимизация энтропии. Для построения распределения применяется следующая система условий:

$$Ap = b,$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, p_i \geq 0,$$

$$A = \begin{pmatrix} (X_1 - K_1)^+ & \dots & (X_n - K_1)^+ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_1 - K_n)^+ & \dots & (X_n - K_n)^+ \end{pmatrix},$$

где A — матрица будущих выплат (pay-offs);
 b — вектор дисконтированных цен опционов;

p — целевой вектор вероятностей, который нужно оценить;

n — размерность вероятностного вектора p , т.е. число ценовых точек, для которых оценивается распределение;

K_i — i -я страйк-цена (strike price);

$(X_n - K_n)^+$ — наибольшее из двух чисел $(X_n - K_n)$ и 0;

X — вектор, координаты которого являются будущими ценами, для которых вычисляются вероятности дискретного распределения.

При выполнении этих условий необходимо максимизировать энтропию, определенную Шенноном:

$$S(p) = -\sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i).$$

При решении практических задач всегда есть возможность выбирать некоторый ценовой интервал (т.е. вектор X). В дальнейшем мы не будем включать в модель фактор дисконтирования, т.к. все примеры основываются на временном промежутке длиной до девяти-десяти дней, при котором этот фактор очень близок к единице.

Предлагаемая модель максимизации энтропии зависит только от рассматриваемых опционов, поэтому результаты, полученные на основе разных групп опционов для одного и того же актива, в общем случае будут неодинаковыми. На практике возможно получение не только распределения с разными параметрами, но и распределения разных видов. Ниже приведены примеры распределений, полученных с помощью вышеописанной методики, а также случаи, когда для одного и того же актива получаются разные виды распределений.

ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МОДЕЛИ

Рассмотрим несколько реальных примеров применения представленной модели. Для реализации метода, описанного в предыдущем разделе, мы разработали специальную программу на языке Python. Работа программы осуществляется

в два этапа. На первом этапе с помощью механизмов, которые мы рассмотрим далее, определяется существование решения, а на втором запускается алгоритм получения решения с помощью метода максимальной энтропии.

Все данные, используемые в настоящем разделе, взяты с сайта finance.yahoo.com. Во всех примерах в модель включены лишь страйк-цены с наивысшими объемами торгов для данного периода времени.

Пример 1. Мы рассмотрели данные о колл-опционах на акции компании Apple (AAPL) на 1 ноября 2017 г. с параметрами, приведенными в табл. 1. Распределение ожидаемых значений цен актива приведено для 10 ноября 2017 г. (промежутков в девять дней).

Как оказалось, практическое решение для этого случая существует, и распределение, полученное в результате максимизации энтропии, показано на рис. 1.

Как видно из рис. 1, распределение близко к бимодальному. Это не удивительно, если учитывать включение довольно широкого спектра страйк-цен. Также можно заметить, что в отличие от левого крыла распределения правое более плавное и по форме напоминает экспоненциальный спуск. На рис. 2 приведены результаты с включением в модель только трех из рассмотренных выше страйк-цен (\$167,5, \$170, \$180), которым соответствует наибольший объем торгов в рассматриваемый день.

Как видно из рис. 2, изменение количества опционов, включенных в модель, меняет форму распределения. В данном случае распределение уже не является бимодальным.

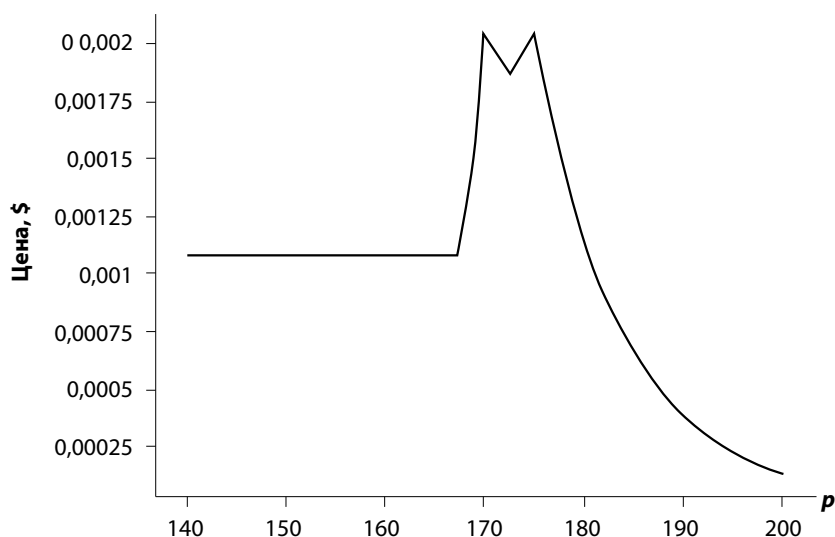
Пример 2. Мы рассмотрели данные о колл-опционах на акции компании Microsoft (MSFT) на 1 ноября 2017 г. с параметрами, приведенными в табл. 2. Распределение ожидаемых значений цен актива приведено для 10 ноября 2017 г. (промежутков в девять дней).

Минимальная цена, при которой область максимизации не пуста (и соответственно, существует решение), равна 86. На рис. 3–6 показаны

Таблица 1. Колл-опционы AAPL на 1 ноября 2017 г.

Колл-цены (последние зарегистрированные на момент рассмотрения), \$	Страйк-цены, \$	Объем торгов (volume), количество опционов
5,1	167,5	5379
3,9	170	5346
2,89	172,5	3074
2,08	175	2550
1,02	180	4126

Рис. 1. Оценка распределения цены AAPL на 10 ноября 2017 г. для интервала \$140–200



Примечание: среднее (mean) — 165,82, дисперсия (variance) — 199, коэффициент асимметрии (skewness) — -0,0289, энтропия — 98,02%.

изменения формы распределения при приближении правой границы к минимально допустимой.

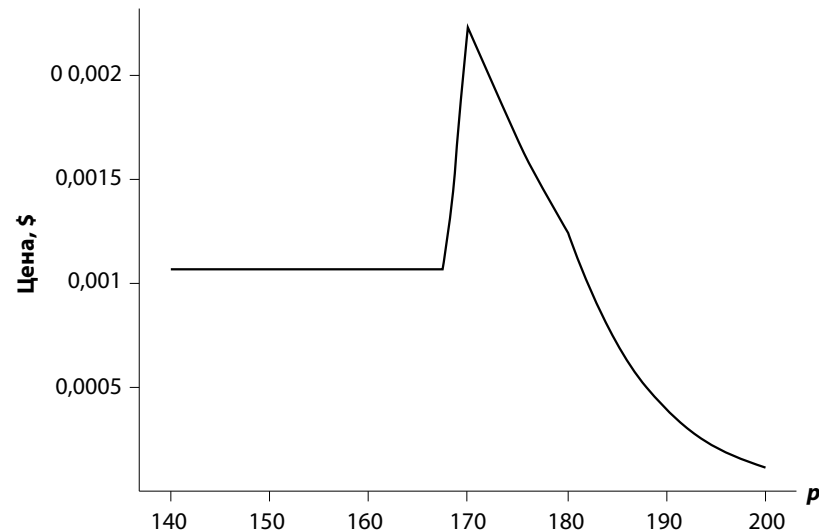
Получение распределения неординарного вида в последнем случае не вызывает никаких сомнений, т.к. точка (0,98, 0,54, 0,27), рассматриваемая в модели с минимально допустимой правой гранью 86, находится в выпуклой комбинации базисных точек, основанных на страйк-ценах 83, 84 и самой грани 86. Следует отметить отсутствие

базисной точки, связанной с 85, что видно на рис. 7, на котором за ценовые единицы были взяты точки 83, 84, 85, 86.

Подтверждение этого факта также следует из рис. 8.

Здесь точки A, B, C, D соответствуют векторам в матрице, которая в этом случае (учитывая, что за компоненты вектора были взяты страйк-цены 83, 84, 85 и граничная цена 86) имеет следующий вид:

Рис. 2. Оценка распределения цены AAPL на 10 ноября 2017 г. для интервала \$140–200 при включении только трех страйк-цен



Примечание: среднее — 165,84, дисперсия — 198,8, коэффициент асимметрии — -0,0329, энтропия — 98,04%.

Таблица 2. Колл-опционы MSFT на 1 ноября 2017 г.

Колл-цены (последние зарегистрированные на момент рассмотрения), \$	Страйк-цены, \$	Объем торгов (volume), количество опционов
0,98	83	1047
0,54	84	709
0,27	85	180

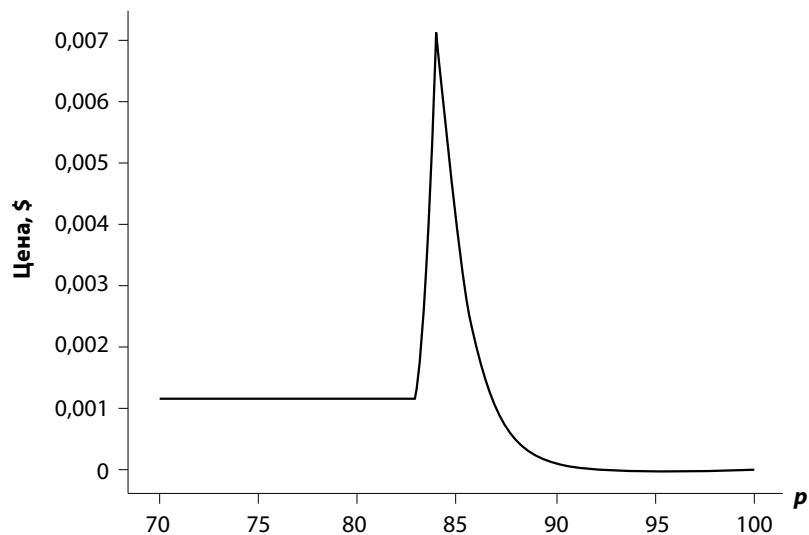
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Точка S соответствует вектору, координаты которого — это цены опционов при разных страйк-ценах актива (т.е. (0,98, 0,54, 0,27)). Как видно из рис. 8, S находится на поверхности ABD, и, следовательно, коэффициент точки C (соответствующей в нашем случае 85) в линейной комбинации точек A, B, C, D будет равен 0.

Пример 3. Мы рассмотрели данные о колл-опционах на торгуемый на бирже фонд (Exchange Traded Fund, ETF) GLD (ценная бумага привязана к цене на золото) на 1 ноября 2017 г. с параметрами, представленными в табл. 3. Распределение ожидаемых значений цен актива приведено для 10 ноября 2017 г. (промежуток в девять дней).

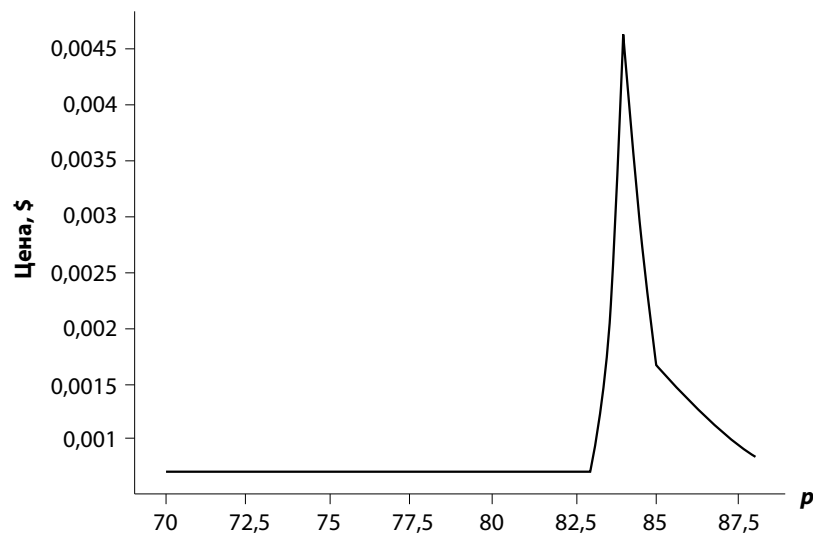
В этом случае точка, соответствующая вектору цен опционов, находится вне границ выпуклой комбинации соответствующих базисных точек, т.к. не удовлетворяется одно из неравенств,

Рис. 3. Оценка распределения цены MSFT на 10 ноября 2017 г. для интервала \$70–100



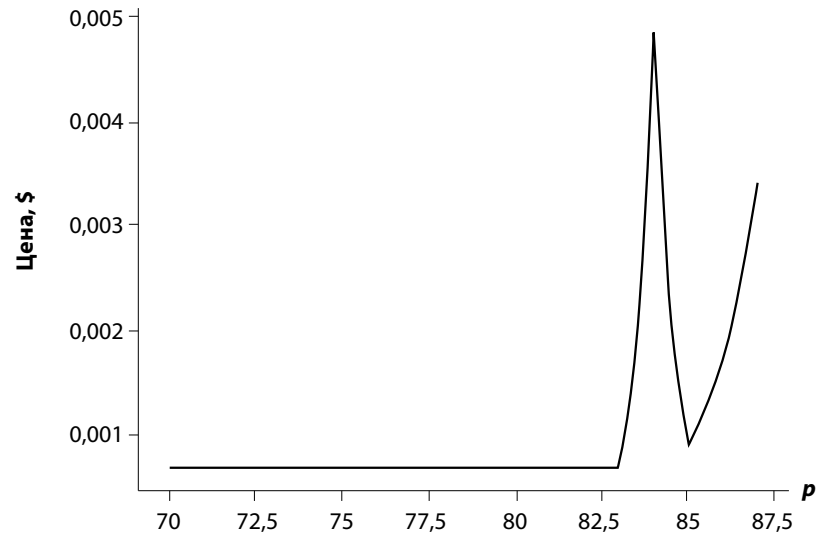
Примечание: среднее — 80,595, дисперсия — 26,64, коэффициент асимметрии — -0,489, энтропия — 91,03%.

Рис. 4. Оценка распределения цены MSFT на 10 ноября 2017 г. для интервала \$70–88



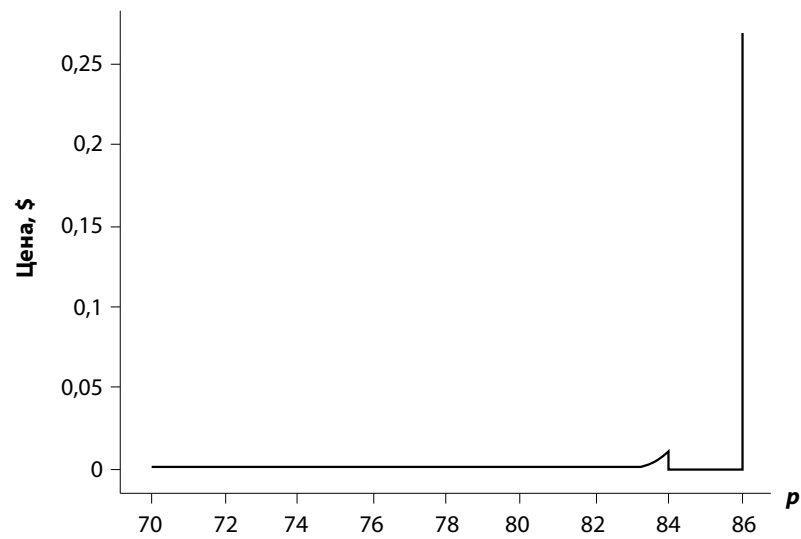
Примечание: среднее — 80,605, дисперсия — 26,32, коэффициент асимметрии — -0,5412, энтропия — 97,77%.

Рис. 5. Оценка распределения цены MSFT на 10 ноября 2017 г. для интервала \$70–87



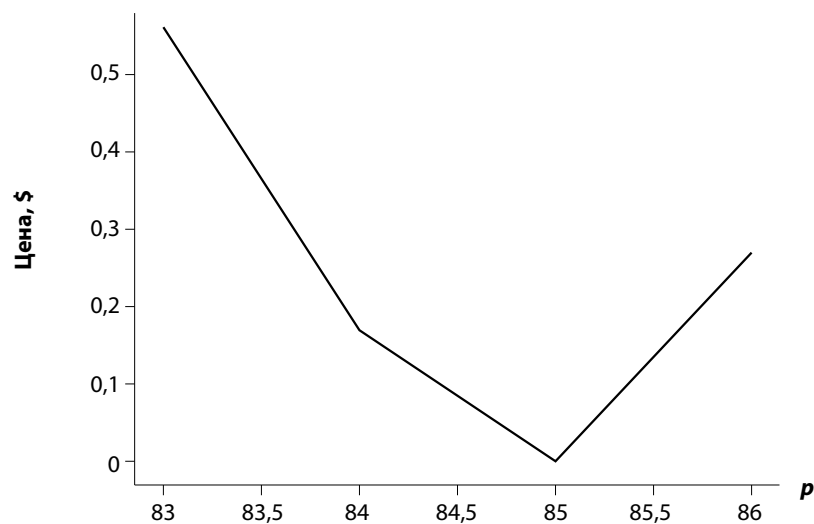
Примечание: среднее — 80,619, дисперсия — 26,16, коэффициент асимметрии — -0,5642, энтропия — 97,13%.

Рис. 6. Оценка распределения цены MSFT на 10 ноября 2017 г. для интервала \$70–86



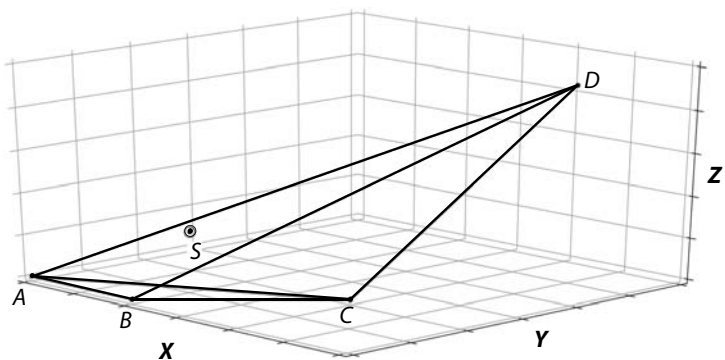
Примечание: среднее — 80,763, дисперсия — 25,45, коэффициент асимметрии — -0,644, энтропия — 76,16%.

Рис. 7. Оценка распределения цены MSFT на 10 ноября 2017 г. для интервала \$83–86 при рассмотрении четырех ценовых точек



Примечание: среднее — 83,98, дисперсия — 1,639, коэффициент асимметрии — 0,8088, энтропия — 70,69%.

Рис. 8. Позиция вектора цен опционов с разными страйк-ценами по сравнению с базисными точками



обеспечивающих непустое множество вероятностей, по которому можно максимизировать энтропию, а именно:

$$\langle b - (K_3 - K_1, K_2 - K_1, 0), (-1, -1, 0) \rangle \geq 0.$$

В нашем случае получаем: $\langle (2,97, 0,95, 0,74) - (2,5, 0,5, 0), (-1, -1, 0) \rangle = 0,92$. Это означает, что распределение вероятностей будущих цен активов на основе вышеприведенных колл-опционов с помощью метода максимальной энтропии не может быть найдено.

Таблица 3. Колл-опционы GLD на 1 ноября 2017 г.

Колл-цены (последние зарегистрированные на момент рассмотрения), \$	Страйк-цены, \$	Объем торгов (volume), количество опционов
2,97	118,5	135
0,95	120,5	173
0,74	121	160

Пример 4. Мы рассмотрели данные о колл-опционах на акции компании Valeant Pharmaceuticals International (VRX) на 9 декабря 2017 г. с параметрами, представленными в табл. 4. Распределение ожидаемых значений цен актива приведено для 18 декабря 2017 г. (промежутки в девять дней).

Распределение, полученное на основе этих данных, показано на рис. 9.

Как видно из рис. 9, в данном случае прогнозируемое распределение будущих цен активов имеет малое значение вариации. При этом с достаточной высокой точностью прогнозируется будущее значение цены актива — около \$20 за акцию. Случаи с небольшим разбросом будущих значений цен активов можно интерпретировать как уверенность рынка относительно будущих изменений цен активов.

Пример 5. Мы рассмотрели данные о колл-опционах на индекс Russell 2000 (RUT) на 9 декабря 2017 г. с параметрами, представленными в табл. 5. Распределение ожидаемых значений цен актива приведено для 18 декабря 2017 г. (промежутки в девять дней).

Как видно из табл. 5, в данном примере используются 11 разных опционов, соответственно, вид полученного распределения указывает на довольно широкое разнообразие предсказываемых будущих цен активов (рис. 10).

Как можно увидеть, на рис. 10 наблюдаются три локальных мода, первые два из которых сконцентрированы между ценами со сравнительно высокими объемами торгов.

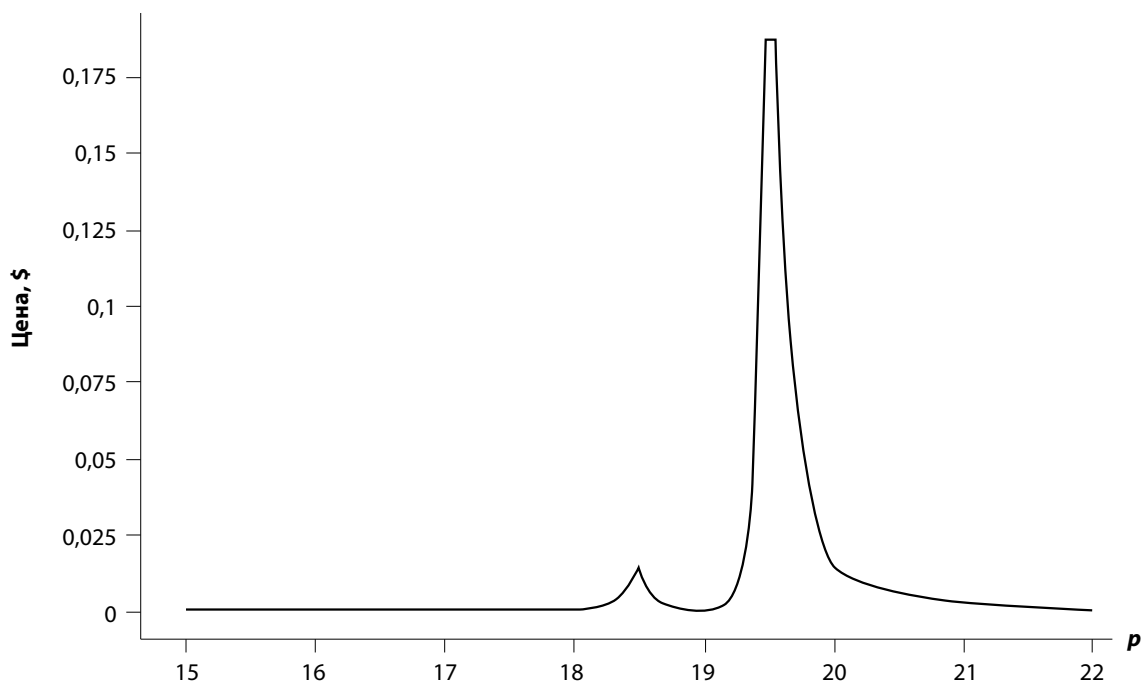
ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные с помощью метода максимальной энтропии распределения будущих цен активов зависят не только от опционов, включенных в модель, но и от интервала цен, для которого вычисляется распределение. Очевидно, что распределение такого рода не может быть стабильным по отношению к тем сдвигам, которые приближают правую грань к минимальной допустимой цене, что и было показано на примерах. Тем не менее можно говорить о разных статистических параметрах, таких как коэффициент сдвига, вариация,

Таблица 4. Колл-опционы VRX на 9 декабря 2017 г.

Колл-цены (последние зарегистрированные на момент рассмотрения), \$	Страйк-цены, \$	Объем торгов (volume), количество опционов
1,67	18	7520
1,18	18,5	10963
0,62	19	13403
0,25	19,5	11775
0,01	20	2756

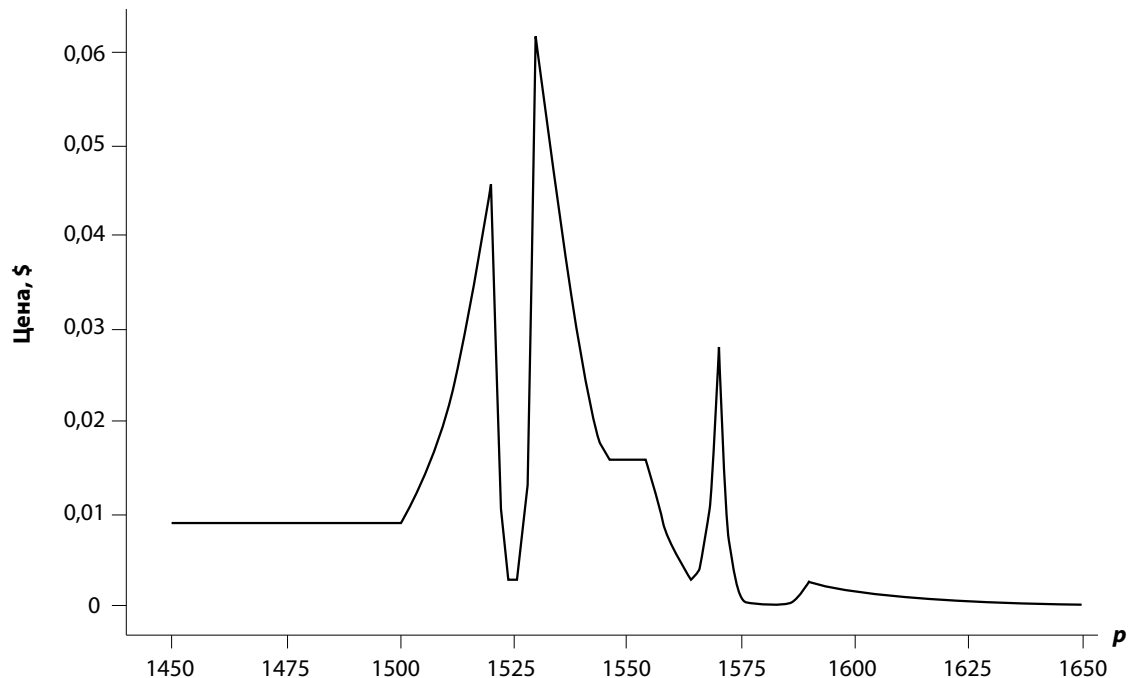
Рис. 9. Оценка распределения цены VRX на 18 декабря 2017 г. для интервала \$15–22



Примечание: среднее — 19,5889, дисперсия — 0,34866, коэффициент асимметрии — -1,9963, энтропия — 61,42%.

Таблица 5. Колл-опционы RUT на 9 декабря 2017 г.

Колл-цены (последние зарегистрированные на момент рассмотрения), \$	Страйк-цены, \$	Объем торгов (volume), количество опционов
26,91	1500	950
13,17	1520	789
10,6	1525	224
8,10	1530	708
6,16	1535	2756
3,67	1545	211
2,15	1555	399
1,25	1565	350
0,9	1570	390
0,62	1580	309
0,37	1590	263

Рис. 10. Оценка распределения цены RUT на 18 декабря 2017 г. для интервала \$1450–1650

Примечание: среднее — 1521,052, дисперсия — 1058,696, коэффициент асимметрии — -0,0969, энтропия — 86,21%.

коэффициент асимметрии и других величин, характеризующих распределение.

В ходе апробации разных интервалов было выяснено, что среднее и вариация распределений имели незначительные изменения при сдвиге правой грани интервала, однако это свойство не сохранялось при всех сдвигах левой грани. Это можно связать с тем, что в левой части распределения есть множество цен, которые ниже первой страйк-цены, и в результате соответствующие векторы в матрице тождественно равны нулю. Также можно заметить, что при увеличении интервала цен с некоторого момента распределение становится достаточно статичным и в дальнейшем почти не меняется. Это свойство полученных распределений

позволяет использовать их для решения практических задач.

Полученные распределения будущих цен активов на основе цен опционов могут быть использованы для решения следующих задач:

- 1) измерения рыночного риска активов, в частности расчета VaR соответствующих инструментов;
- 2) построения оптимальных портфелей;
- 3) создания торговых алгоритмов.

Наши следующие публикации будут посвящены возможностям использования полученных распределений активов во всех перечисленных направлениях. Созданное программное обеспечение на языке Python позволяет достаточно гибко решать эти задачи на реальных рыночных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ross S. (2015). «The recovery theorem». *The Journal of Finance*, Vol. 79, No. 2, pp. 615–648.
2. Alhassid Y., Agmon N., Levine R.D. (1978). «An upper bound for the entropy and its applications to the maximal entropy problem». *Chemical Physics Letters*, Vol. 53, pp. 22–26.
3. Alhassid Y., Agmon N., Levine R.D. (1979). «An algorithm for finding the distribution of maximal entropy». *Journal of Computational Physics*, Vol. 30, pp. 250–258.
4. Levine R.D., Tribus M. (1978). *The Maximum Entropy Formalism*. Cambridge, MA: MIT Press.
5. Buchen P.W., Kelly M. (1996). «The maximum entropy distribution of an asset inferred from option prices». *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 31, pp. 143–159.
6. Dupont D.Y. *Extracting Risk-Neutral Probability Distributions from Option Prices Using Trading Volume as a Filter*. — <http://www.ihs.ac.at/publications/eco/es-104.pdf>.
7. Margaryan N.D. (2017). «Assessment of asset price distributions using maximum entropy method». *Proceedings of Engineering Academy of Armenia*, Vol. 14, No. 1, pp. 57–61.
8. Margaryan N.D. (2017). «An algorithmic approach to solving the maximum entropy problem». *Proceedings of Engineering Academy of Armenia*, Vol. 14, No. 3, pp. 371–374.