ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1979 Естественные науки

Математика

К. В. САГАТЕЛЯН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЗИЦИОННЫХ ИГР С КОНТИНУУМОМ ХОДОВ

Рассматриваются позиционные игры, в которых принятие решения происходит непрерывно в течение некоторого фиксированного промежутка времени. С теоретико-игровой точки зрения между такими играми и дифференциальными играми существует много общего, что позволяет изучать некоторые свойства дифференциальных игр с неполной информацией в рамках позиционных игр.

1. Определим вначале позиционную игру с точки зрения выделенного игрока, то есть из множества всех игроков выделим некоторого к-того игрока и определим игру G^k как систему

$$G^k=\langle T,\ X(t),\ U(t),\ Z,\ g_t,\ H\rangle,$$

где $[o,T]$, $T<+\infty$ — множество ходов в игре; $X(t)$, $t\in[o,T]$ — множество управлений выделенного игрока в момент $t\in[o,T]$; $U(t)$ — множество информационных состояний выделенного игрока в момент $t\in[o,T]$; Z — множество наборов стратегий всех остальных игроков («противников»);

$$g_t: Z\times\prod_{\tau<t} X(\tau)\to U(t),\ t\in[o,\ T]$$

— информационные отображения;

$$H: Z\times\prod_{t\in[0,\ T]} X(t)\to(-\infty,\ +\infty)$$

— функция выигрыша выделенного игрока.

Множества $X(t)$, $t\in[o,T]$, предполагаются изоморфными единичному отрезку.

Модель позиционной игры с точки зрения выделенного игрока впервые была приведена в работе [1], где приводятся также преимущества этой модели по сравнению с другими моделями позиционных игр.

Введем некоторые обозначения. Положим

$$X^t=\prod_{\tau<t} X(\tau),\quad X^T=\prod_{\tau\leq T} X(\tau).$$

Фактически $X^t(X^T)$ есть множество всех отображений множества $[o,t]$ в $X([o,T]$ в $X)$. Здесь и в дальнейшем мы будем опускать индекс t в обозначении множеств X там, где это не будет вызывать противоречий, так как множества $X(t)$ предполагаются изоморфными. Элементы множеств X^t и X^T будем обозначать через x_t и x_T, а через $x_t(\tau)$ и

$x_T(\tau)$ — значения отображений x_t и x_T в точке τ. Далее, для любых x_t, x_T, $\tau<t$ обозначим через $x_{t\|\tau}$ и $x_{T\|\tau}$ элементы множества X^τ, для которых

$$x_{t\|\tau}(\theta)=x_t(\theta),\ \theta<\tau,$$

$$x_{T\|\tau}(\theta)=x_T(\theta),\ \theta<\tau.$$

Положим также,

$$X^{(t,\tau)}=\prod_{\theta\in(t,\tau)} X(\theta).$$

Введем несколько определений, связанных с понятием стратегии игрока.

Определение. Чистой стратегией выделенного игрока в игре G^k назовем пару $<\sigma, f>$, где

$$\sigma=(\sigma_0,\ \sigma_1, \dots, \sigma_n),\ n>0,\ \sigma_i\in[0,\ T],\ i=0,\dots,n;\ 0=\sigma_0<\sigma_1<\dots<\sigma_n,$$

а

$$f=(f_0,\ \dots,\ f_n),$$

$$f_i: U(\sigma_i)\to X^{[\sigma_i,\ \sigma_{i+1})},\ i=0,\ \dots,\ n.$$

Для каждой ситуации $(z, <\sigma, f>)$ рекуррентно определим вектор $x(z, <\sigma, f>)=(x_0, \dots, x_n)$,
где

$$x_0=f_0\ (g\sigma_0(z)),$$

$$x_i=f_i(g\sigma_i(z, x_0, \dots, x_{i-1})), i=1, \dots, n,$$

и положим

$$x_{(z,<\sigma,f>)}(\theta)=x_i(\theta),\quad \sigma_i\leqq\theta\leqq\sigma_{i+1}.$$

Тогда выигрыш выделенного игрока в ситуации $(z, <\sigma, f>)$ определяется следующим образом:

$$H(z,<\sigma,f>)=H(z,x_{(z,<\sigma,\ s>)}).$$

Стратегии игрока, определенные выше, насколько это известно автору, еще не рассматривались в теории позиционных игр, однако аналоги этих стратегий нашли широкое применение в теории дифференциальных игр (см., напр., [2]).

Аналогично чистой стратегии введем понятие смешанной стратегии игрока.

Определение. Смешанной стратегией выделенного игрока в игре G^k называется пара $<\sigma, s>$, где

$$s=\{s_u\}u\in\bigcup_{i=0}^{n}U(\sigma_i)-$$

дискретный случайный процесс, в котором случайная величина s_u принимает значения в $X^{[\sigma_i,\ \sigma_{i+1})}$, если $u\in U(\sigma_i)$, $i=0,1,\dots,n$, а вектор σ определяется так же, как и в предыдущем определении.
Положим,

$$s_t(u)=s_u,$$

если $u \in U(t)$.

Каждая смешанная стратегия $<\sigma, s>$ выделенного игрока при фиксированном $z \in Z$ определяет дискретную вероятностную меру $\nu_{z,<\sigma,s>}$ на множестве X^T:

$$\nu_{z,<\sigma,s>}(x^T)=P\{s_{\sigma_0}(g_{\sigma_0}(z))=x_0, \ldots, s_{\sigma_n}(g_{\sigma_n}(z, x_{T\sigma_n}))=x_n\},$$

где

$$x_i \in X^{[\sigma_i, \sigma_{i+1})},$$

$$x_i(\theta)=x_T(\theta),\ \sigma_i \leqslant \theta < \sigma_{i+1},\ i=0, \ldots, n.$$

Определение. Две смешанные стратегии выделенного игрока $<\sigma', s'>$ и $<\sigma'', s''>$ называются эквивалентными, если при каждом фиксированном $z \in Z$ имеет место равенство

$$\nu_{z,<\sigma',s'>}=\nu_{z,<\sigma'',s''>}.$$

Выигрыш выделенного игрока в ситуации $<z,<\sigma,s>$ определяется как математическое ожидание:

$$H(z, <\sigma, s>)=\sum_{x_T \in X^T} H(z, x_T)\, \nu_{z,<\sigma,s>}(x_T).$$

2. Рассмотрим теперь игры с полной памятью.

Определение. Игра G^k называется игрой с полной памятью, если в игре существуют такие отображения (известные выделенному игроку)

$$\varphi_\theta^t : U(t) \to U(\theta), \quad \theta < t,$$

$$\psi_\theta^t : U(t) \to X(\theta), \quad \theta < t,$$

что

$$\varphi_\theta^t g_t(z, x_t)=g_\theta(z, x_{t\,\|\,\theta}),$$

$$\varphi_\theta^t g_t(z, x_t)=x_{t\,\|\,\theta}.$$

Определение. Стратегией поведения выделенного игрока в игре G^k называется смешанная стратегия $<\sigma, s>$, любая конечная совокупность случайных величин которого взаимно независима.

Для игр с континуумом ходов также справедлив аналог теоремы Г. Куна.

Теорема 1. В игре G^k с полной памятью каждая смешанная стратегия выделенного игрока эквивалентна некоторой его стратегии поведения.

Доказательство. Пусть $<\sigma, s>$ — некоторая смешанная стратегия выделенного игрока. Построим соответствующую ей стратегию поведения $<\sigma^1, m>$.

Пусть

$$u \in \bigcup_{i=0}^{n} U(\sigma_i), \quad u \in U(\sigma_i), \quad u=g_{\sigma_i}(z, x_{\sigma_i}).$$

Положим, для любого $x \in X^{[\sigma_i, \sigma_{i+1})}$, $i=0, \ldots, n$;

$$\mu_u(x)=P\{s_{\sigma_i}(u)=x/s_{\sigma_j}(\varphi^{\sigma_i}_{\sigma_j}(u))=\psi^{\sigma_i}_{\sigma_j}(u),\ j<i\}.$$

Стратегией поведения $<\sigma^1, m>$ выделенного игрока, соответствующей смешанной стратегии $<\sigma, s>$, назовем смешанную стратегию, для которой $\sigma^1=\sigma$, а $m=\{m_u\}u\in\bigcup_{i=0}^{n}U(\sigma_i)$ есть случайный процесс со взаимно независимыми случайными величинами, и

$$P\{m_u\in E\}=\mu_u(E)$$

для всех $u\in\bigcup_{i=0}^{n}U(\sigma_i)$.

Доказательство эквивалентности стратегий $<\sigma, s>$ и $<\sigma, m>$ можно получить точно так же, как соответствующие доказательства Г. Куна [3] и Аумана [1], поэтому приводить его мы не будем.

Следствие. Пусть $\sigma\subset\sigma^1$ (если вектор σ рассматривать как множество своих компонент). Тогда для любой стратегии поведения $<\sigma, m>$ существует эквивалентная ей стратегия поведения $<\sigma^1, m^1>$.

3. Модель позиционной игры с точки зрения выделенного игрока удобна лишь при рассмотрении теоретических вопросов. При решении же конкретных игр позиционную игру можно определять как вектор $G=(G^1,..,G^n>$, где n — число игроков, а G^i — игра с точки зрения игрока i, $i=1,..., n$.

Далее будут рассматриваться лишь антагонистические игры.

Определение. Антагонистической позиционной игрой называется пара $G=(G^1, G^2)$:

$$G^1=<T,\ X(t),\ U(t),\ Z^1,\ g_t,\ H^1>,$$
$$G^2=<T,\ Y(t),\ V(t),\ Z^2,\ l_t,\ H^2>,$$

удовлетворяющая следующим условиям согласованности:

$$Z^1=Y^T,\ \ Z^2=X^T;\ \ H^1=-H^2=H.$$

Введем еще одно ограничение. Пусть B — некоторая σ-алгебра подмножеств X. Обозначим через $\overline{X_T}$ множество всех измеримых отображений $[o, T]$ в X. Точно так же введем обозначения $\overline{X^t}$, $\overline{X^{[t', t'']}}$, $\overline{Y^T}$, $\overline{Y^t}$. Далее мы будем пользоваться всеми предыдущими определениями, предполагая, однако, что все множества X^t, $X^{[t', t'')}$, y^t, $y^{[t', t'']}$ заменены в них на соответствующие множества измеримых отображений

Выигрыш игрока 1 в условиях применения игроками смешанных стратегий соответственно $<\sigma, s>$ и $<\tau, r>$ определяется как обычно:

$$H(<\sigma, s>,<\tau, r>)=\sum_{X^T}\sum_{Y^T}H(x_T,\ y_T)\nu'_{<\sigma,\ s>,y_T}x_T\nu''_{<\sigma,\ r>,\ x_T}(y_T).$$

По аналогии с дифференциальными играми введем два определения.

Определение. Игра G называется игрой с интегральным выигрышем, если существует такая функция $h(x_T,\ y_T)$, что для любых $x_T\in X^T$, $y_T\in Y^T$

$$H(x_T,\ y_T)=\int_0^T h(x_T(t),\ y_T(t))dt.$$

Определение. Пусть $G=(G^1, G^2)$. Игра G называется игрой с δ-задержкой, если

1) при $t\geqslant\delta$ и любых фиксированных $x_t\in X^t$ и $y_t\in Y^t$ отображения $g_t(x_t,.)$ и $l_t(y_t,.)$ являются взаимно-однозначными отображениями $\overline{Y}^{t-\delta}$ на $U(t)$ и $\overline{X}^{t-\delta}$ на $V(t)$ соответственно;

2) при $t<\delta$

$$g_t(x_t,\ y_t)=g_t(x_t),$$

$$l_t(x_t,\ y_t)=l_t(y_t).$$

Введем одно ограничение на функцию выигрыша.

Определение. Пусть

$$x:[0,\ T]\to X,$$

$$f:X\to(-\infty,\ +\infty).$$

Функцию

$$F_x(t)=f(x(t))$$

назовем разделимой функцией, если для любого $t^*\in[o, T]$ и каждого отображения $x:[o, T]\to X$ существуют такие функции

$$f^*:X\to(-\infty,+\infty),$$

$$\bar{f}:X\to(-\infty,+\infty),$$

что

$$f(x(t))=\begin{cases} f^*(x(t)), & t\in[0,\ t^*) \\ \bar{f}(x(t)), & t\in[t^*,\ T]. \end{cases}$$

Грубо говоря, разделимость функции означает независимость значений функции для различных $t\in[o,T]$.

Разделимыми являются, например, все элементарные функции, определенные на любых множествах отображений $x(t)$. Примером же неразделимой функции может служить функция f, определенная следующим образом:

$$f(x(t))=\begin{cases} 0, & \min\limits_{\tau\in[0,\ t)}|x(t)|<\delta \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определение. Игру $G=(G^1,G^2)$ с интегральным выигрышем назовем разделимой, если функция $h(x_T(t),\ y_T(t))$ разделима по обеим переменным.

4. Далее будут рассматриваться лишь разделимые игры с полной памятью и δ-задержкой. Пусть $G=(G^1,G^2)$ — такая игра. Определим вспомогательные игры в нормальной форме Γ_l, $l=0,\ \dots,\ k$, $k=\left[\frac{T}{\delta}\right]$:

$$\Gamma_i = \langle \bar{X}^{[\sigma_i^0,\ \sigma_{i+1}^0)},\ Y^{[\sigma_i^0,\ \sigma_{i+1}^0)},\ H_i \rangle,$$

где $\sigma_i^0 = i\delta$, $\sigma_{k+1}^0 = T$,

$$H_i(x_i,\ y_i) = \int\limits_{\sigma_i^0}^{\sigma_{i+1}^0} h(x_T(t),\ y_T(t))dt.$$

Теорема 2. Пусть в играх $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ существуют оптимальные стратегии μ_i^0, λ_i^0 соответственно игроков 1 и 2. Тогда существует значение игры $G: v(G) = \sum\limits_{i=1}^{k} v(\Gamma_i)$, где $v(\Gamma_i)$ — значение игры Γ_i, $i=1, \ldots, k$.

Стратегии поведения $\langle \sigma^0,\ m^0 \rangle$ и $\langle \sigma^0,\ r^0 \rangle$ соответственно игроков 1 и 2, определяемые следующим образом: $\sigma^0 = (\sigma_1^0, \ldots, \sigma_k^0)$,

$$m_0 = \{m_u^0\}u \in \bigcup_1^k U(\sigma_i^0); \quad r^0 = \{r_v^0\}v \in \bigcup_1^k v(\sigma_i^0);$$

$$P\{m_u^0 \in E\} = \mu_i^0(E), \qquad u \in U(\sigma_i^0),\ i = 1, \ldots, k;$$

$$P\{r_v^0 \in E\} = \lambda_i^0(E), \qquad v \in V(\sigma_i^0),\ i = 1, \ldots, k,$$

являются оптимальными стратегиями игроков в игре G.

Доказательство. Так как игра G предполагается игрой с полной памятью, то можно ограничиться рассмотрением лишь стратегий поведения (см. теор. 1). Доказательство оптимальности стратегий поведения $\langle \sigma^0,\ m^0 \rangle$ и $\langle \sigma^0,\ r^0 \rangle$ в классе всех стратегий поведения будем вести индукцией по $k = \left[\frac{T}{\delta}\right] + 1$. При $k=1$ игра G превращается в игру в нормальной форме $\langle \bar{X}^T,\ \bar{Y}^T,\ H \rangle$ и утверждение теоремы выполняется автоматически. Пусть теперь для всех игр с $\left[\frac{T}{\sigma}\right] + 1 \leqslant k$ утверждение теоремы справедливо. Рассмотрим игру G, для которой $\left[\frac{T}{\delta}\right] + 1 = k + 1$.

Пусть $\langle \sigma',\ m \rangle$ и $\langle \sigma'',\ r \rangle$ — некоторые стратегии поведения игроков 1 и 2. В силу следствия теор. 1 можно предположить, что $k\delta \in \sigma'$, $k\delta \in \sigma''$ По определению выигрыша в ситуации $(\langle \sigma',\ m \rangle,\ \langle \sigma'',\ r \rangle)$

$$H(\langle \sigma',\ m \rangle,\ \langle \sigma'',\ r \rangle) = \sum_{X_T} \sum_{Y_T} H(x_T,\ y_T) \nu_{\langle \sigma',\ m \rangle,\ y_T}(x_T) \times \nu_{\langle \sigma'',\ r \rangle,\ x_T}(y_T) =$$

$$= \sum_{X_T} \sum_{Y_T} \left(\int\limits_0^T h(x_T,\ y_T)dt \right) \nu_{\langle \sigma',\ m \rangle,\ y_T}(x_T) \times \nu_{\langle \sigma'',\ r \rangle,\ x_T}(y_T) = \tag{1}$$

$$= \sum_{X_T} \sum_{Y_T} \left(\int\limits_0^{k\delta} h(x_T,\ y_T)dt + \int\limits_{k\delta}^T h(x_T,\ y_T)dt \right) \nu_{\langle \sigma',\ m \rangle,\ y_T}(x_T) \times \nu_{\langle \sigma'',\ r \rangle,\ x_T}(y_T).$$

Положим, $k\delta = \sigma^*$, $x_{\sigma^*} = x_{T\,|\,\sigma^*}$, $y_{\sigma^*} = y_{T\,|\,\sigma^*}$;

$$x_k(\tau) = x_T(\tau), \quad \tau \geqslant \sigma^*;$$
$$y_k(\tau) = y_T(\tau), \quad \tau \geqslant \sigma^*;$$
$$H_1(x_{\sigma^*}, y_{\sigma^*}) = \int\limits_0^{\sigma^*} h(x_T, y_T)dt;$$
$$H_2(x_k, y_k) = \int\limits_{\sigma^*}^{T} h(x_T, y_T)dt.$$

По определению стратегии поведения меры $\nu_{\langle\sigma', m\rangle, y_T}$ и $\nu_{\langle\sigma'', r\rangle, x_T}$ можно представить в виде произведений мер: для любых $x_T \in X^T$, $y_T \in Y^T$

$$\nu_{\langle\sigma', m\rangle, y_T}(x_T) = \mu_{g_{\sigma'_0}(y_T)}(x_0) \times \mu_{g_{\sigma'_1}(y_T, x_T \| \sigma'_1)}(x_1) \times \ldots \times \mu_{g_{\sigma'_n}(y_T x_T \| \sigma'_n)}(x_n),$$
$$\nu_{\langle\sigma'', r\rangle, y_T} = \lambda_{l_{\sigma''_0}(x_T)}(y_0) \times \lambda_{l_{\sigma''_1}(x_T, y_T \| \sigma''_1)}(y_1) \times \ldots \times \lambda_{l_{\sigma''_m}(x_T, y_T \| \sigma'_n)}(y_m),$$

где

$$x_i(\tau) = x_T(\tau)(y_j(\tau) = y_T(\tau)) \text{ для } \tau \in [\sigma'_i, \sigma'_{i+1})(\tau \in [\sigma''_j, \sigma''_{j+1})),$$

а μ_u, $u \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} u(\sigma'_i)$ и λ_v, $v \in \bigcup\limits_{j=1}^{m} V(\sigma''_j)$ есть распределения случайных величин m_u и r_v.

Рассмотрим игру G до момента σ^*. Пусть $\overline{G} = (\overline{G}^1, \overline{G}^2)$, где

$$\overline{G}^1 = \langle \sigma^*, X(t), U(t), g_t, Y^{\sigma^*}, H_1 \rangle,$$
$$\overline{G}^2 = \langle \sigma^*, Y(t), V(t), l_t, X^{\sigma^*}, -H_1 \rangle.$$

Положим

$$\overline{m} = \{m_u\}_{u \in \bigcup\limits_{\sigma'_i \leqslant \sigma^*} U(\sigma'_i)}, \quad \overline{\sigma}' = (\sigma'_0, \ldots, \sigma^*),$$
$$\overline{r} = \{r_v\}_{v \in \bigcup\limits_{\sigma''_j \leqslant \sigma^*} V(\sigma''_j)}, \quad \overline{\sigma}'' = (\sigma''_0, \ldots, \sigma).$$

Тогда

$$\nu_{\langle\sigma', m\rangle, y_T} = \nu_{\langle\overline{\sigma}', \overline{m}\rangle y_\sigma} \times \mu_{g_{\sigma^*}(x_{\sigma^*}, y_T)} \times \ldots \times \mu_{g_{\sigma'_n}(x_{\sigma'}, y_T)},$$
$$\nu_{\langle\sigma'', r\rangle, x_T} = \nu_{\langle\overline{\sigma}'', \overline{r}\rangle, x_{\sigma^*}} \times \lambda_{l_{\sigma^*}(y_{\sigma^*}, x_T)} \times \ldots \times \lambda_{l_{\sigma''_m}, (y_{\sigma''_m}, x_T)}.$$

Рассмотрим произведения

$$\mu_{g_{\sigma^*}(x_{\sigma^*}, y_T)} \times \ldots \times \mu_{g_{\sigma'_n}(x_{\sigma'_n}, y_T)},$$
$$\lambda_{l_{\sigma^*}(y_{\sigma^*}, x_T)} \times \ldots \times \lambda_{l_{\sigma''_m}(y_{\sigma''_m}, x_T)}.$$

Так как $\sigma'_n - \delta < \sigma^*$, $\sigma''_m - \delta < \sigma^*$, то эти произведения зависят только от $y_{T|\sigma^*}$, $x_{T|\sigma^*}$ и при фиксированных x_{σ^*}, y_{σ^*} являются дискретными вероятностными мерами на $X^{[\sigma^*, T]}$ и $Y^{[\sigma^*, T]}$ соответственно. Обозначим эти меры через $\mu_{x_{\sigma^*}, y_{\sigma^*}}$ и $\lambda_{x_{\sigma^*}, y_{\sigma^*}}$.

В новых обозначениях выражение (1) примет следующий вид:

$$H(\langle\sigma', m\rangle, \langle\sigma'', r\rangle)=$$

$$=\sum_{X^{\sigma^*}}\sum_{Y^{\sigma^*}}\sum_{X^{[\sigma^*, T]}}\sum_{Y^{[\sigma^*, T]}}[H_1(x_{\sigma^*}, y_{\sigma^*})+H_2(x_k, y_k)]\nu_{\langle\bar{m}, \bar{\sigma}'\rangle}y_{\sigma^*}(x_{\sigma^*})\times$$

$$\times\nu_{\langle\bar{\sigma}'', r\rangle}, x_{\sigma^*}(y_{\sigma^*})\times\mu_{x_{\sigma^*}, y_{\sigma^*}}(x_k)\times\lambda_{y_{\sigma^*}, x_{\sigma^*}}(y_k)=$$

$$=\sum_{X^{\sigma^*}}\sum_{Y^{\sigma^*}}\Big[\sum_{X^{[\sigma^*, T]}}\sum_{Y^{[\sigma^*, T]}}(H_1(x_{\sigma^*}, y_{\sigma^*})\mu_{x_{\sigma^*}, y_{\sigma^*}}(x_k)\times\lambda_{y_{\sigma^*}, x_{\sigma^*}}(y_k))+$$

$$+\sum_{X^{[\sigma^*, T]}}\sum_{Y^{[\sigma^*, T]}}(H_2(x_k, y_k)\mu_{x_{\sigma^*}, y_{\sigma^*}}(x_k)\times\lambda_{y_{\sigma^*}, x_{\sigma^*}}(y_k))\Big]\nu_{\langle\bar{\sigma}', \bar{m}\rangle}, y_{\sigma^*}(x_{\sigma^*})\times$$

$$\times\nu_{\langle\bar{\sigma}'', \bar{r}\rangle}, x_{\sigma^*}(y_{\sigma^*}).$$

Так как $H_1(x_{\sigma^*}, y_{\sigma^*})$ не зависит от x_k, y_k, а $\mu_{x_{\sigma^*}, y_{\sigma^*}}$ и $\lambda_{x_{\sigma^*}, y_{\sigma^*}}$ — вероятностные меры, то при любых x_{σ^*}, y_{σ^*}

$$\sum_{X^{[\sigma^*, T]}}\sum_{Y^{[\sigma^*, T]}}(H_1(x_{\sigma^*}, y_{\sigma^*})\mu_{x_{\sigma^*}, y_{\sigma^*}}(x_k)\times\lambda_{y_{\sigma^*}, x_{\sigma^*}}(y_k)=H_1(x_{\sigma^*}, y_{\sigma^*}).$$

С другой стороны, при любой фиксированной паре $(x_{\sigma^*}, y_{\sigma^*})$ множество всех мер $\mu_{x_{\sigma^*}, y_{\sigma^*}}(\lambda_{y_{\sigma^*}, x_{\sigma^*}})$ совпадает с множеством всех дискретных вероятностных мер на $X^{[\sigma^*, T]}$ $(Y^{[\sigma^*, T]})$, а функция $H_2(x_k, y_k)$ не зависит от $(x_{\sigma^*}, y_{\sigma^*})$. Следовательно, при любых фиксированных $(x_{\sigma^*}, y_{\sigma^*})$ и для всех $\mu_{y_{\sigma^*}, x_{\sigma^*}}$

$$\sum_{X^{[\sigma^*, T]}}\sum_{Y^{[\sigma^*, T]}}(H_2(x_k, y_k)\mu_{x_{\sigma^*}, y_{\sigma^*}}(x_k)\lambda_k^0(y_k))\leqslant\sum_{X^{[\sigma^*, T]}}\sum_{Y^{[\sigma^*, T]}}H_2(x_k, y_k)\mu_k^0(x_k)\times$$

$$\times\lambda_k^0(y_k),$$

где (μ_k^0, λ_k^0)—ситуация равновесия в игре Γ_k.
Таким образом

$$H(\langle\sigma', m\rangle, \langle\sigma^0, r^0\rangle)\leqslant\sum_{X^{\sigma^*}}\sum_{Y^{\sigma^*}}[H_1(x_{\sigma^*}y_{\sigma^*})+$$

$$+\sum_{X^{[\sigma^*, T]}}\sum_{Y^{[\sigma^*, T]}}H_2(x_k, y_k)\mu_k^0(x_k)\lambda_k^0(y_k)]\nu_{\langle\bar{\sigma}', \bar{m}\rangle}, y_{\sigma^*}(x_{\sigma^*})\nu_{\langle\bar{\sigma}^0, \bar{r}^0\rangle}, x_{\sigma^*}(y_{\sigma^*}).$$

Отсюда, так как второе слагаемое не зависит от $(x_{\sigma^*}, y_{\sigma^*})$, имеем

$$H(\langle\sigma', m\rangle, \langle\sigma^0, r^0\rangle\leqslant\sum_{X^{\sigma^*}}\sum_{Y^{\sigma^*}}[H_1(x_{\sigma^*}, y_{\sigma^*})\nu_{\langle\bar{\sigma}', \bar{m}\rangle}, y_{\sigma^*}(x_{\sigma^*})\nu_{\langle\bar{\sigma}^0, \bar{r}^0\rangle}x_{\sigma^*}(y_{\sigma^*})]+$$

$$+\sum_{X^{[\sigma^*, T]}}\sum_{Y^{[\sigma^*, T]}}[H_2(x_k, y_k)\mu_k^0(x_k)\lambda_k^0(y_k).$$

Но

$$\sum_{X^{\sigma^*}}\sum_{Y^{\sigma^*}}H_1(x_{\sigma^*}, y_{\sigma^*})\nu_{\langle\bar{\sigma}', \bar{m}\rangle}, y_{\sigma^*}(x_{\sigma^*})\times\nu_{\langle\bar{\sigma}^0, \bar{r}^0\rangle}, x_{\sigma^*}(y_{\sigma^*})$$

есть выигрыш игрока 1 в игре $\bar{G}$ в ситуации $(\langle \sigma', \bar{m} \rangle, \langle \bar{\sigma}^0, \bar{r}^0 \rangle)$. По предположению индукции, стратегия $\langle \bar{\sigma}^0, \bar{m}^0 \rangle$ оптимальна в игре $\bar{G}$. Это означает, что

$$\sum_{X^{\sigma^*}} \sum_{Y^{\sigma^*}} H_1(x_{\sigma^*}, y_{\sigma^*}) \nu_{\langle \bar{\sigma}', \bar{m} \rangle, y_{\sigma^*}}(x_{\sigma^*}) \times \nu_{\langle \bar{\sigma}^0, \bar{r}^0 \rangle, x_{\sigma^*}}(y_{\sigma^*}) \leqslant$$

$$\leqslant H_1(\langle \bar{\sigma}_0, m_0 \rangle, \langle \sigma^0, r^0 \rangle) = \sum_{i=1}^{k-1} v(\Gamma_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \left(\sum_{X[\sigma_i^0, \sigma_{i+1}^0)} \sum_{Y[\sigma_i^0, \sigma_{i+1}^0)} H^i(x_i, y_i) \cdot \mu_i^0(x_i) \times \lambda_i^0(y_i) \right).$$

Окончательно получаем, что

$$H(\langle \sigma', m \rangle, \langle \sigma^0, r^0 \rangle) \geqslant \sum_{i=1}^{k} v(\Gamma_i).$$

Точно так же можно показать, что для всех стратегий поведения $\langle \sigma'', r \rangle$ имеет место

$$H(\langle \sigma^0, m^0 \rangle, \langle \sigma'', r \rangle) \geqslant \sum_{i=1}^{k} v(\Gamma_i).$$

Следовательно, $(\langle \sigma^0, m^0 \rangle, \langle \sigma^0, r^0 \rangle)$ есть ситуация равновесия в игре G и $v(G) = \sum_{i=1}^{k} v(\Gamma_i)$.

Кафедра дифференциальных уравнений

Поступила 4.04.1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ауман Р. Дж.**, сб. Позиционные игры, изд. «Наука», М., 1967.
2. **Петросян Л. А.**, Дифференциальные игры преследования, Л., 1977.
3. **Кун Г. У.**, сб. Позиционные игры, изд. «Наука», М., 1967.

Կ. Վ. ՍԱՂԱԹԵԼՅԱՆ

ԿՈՆՏԻՆՈՒՈՒՄ ՔԱՅԼԵՐՈՎ ԴԻՐՔԱՅԻՆ ԽԱՂԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում են անվերջ քայլերով դիրքային խաղեր։ Այդ խաղերի համար ապացուցվում է Կունի թեորեմի ընդհանրացումը։ Ստացված արդյունքների հիման վրա մշակված է դիֆերենցիալ խաղերի մի դասի լուծման մեթոդը։