

УДК 530.145

Л. Ш. ГРИГОРЯН, А. А. СААРЯН

ЭФФЕКТ КАЗИМИРА ДЛЯ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕГО ШАРА (II)

Изучено вакуумное электромагнитное поле, возмущенное идеально проводящим шаром. Показано, что регуляризованный тензор энергии-импульса удовлетворяет уравнениям гидродинамики. Вычислены компоненты этого тензора.

1. **Введение.** Одним из проявлений вакуума является его реакция на наличие в пространстве макроскопических тел. Этот эффект был предсказан Казимиром в 1948 г. для электромагнитного вакуума в случае параллельных проводящих пластин и подтвержден экспериментально в 60-ые годы. Результаты исследований для проводников в виде прямоугольного ящика, цилиндра, тора и других конфигураций, а также других вакуумных полей подытожены в [1—3].

Ниже рассмотрено состояние электромагнитного вакуума, возмущенного идеально проводящим шаром. Сходная задача была сформулирована Казимиром в 50-ые годы. Первый серьезный шаг к ее решению был сделан в работах [4, 5]. В [6] выведены формулы для компонент вакуумного тензора энергии-импульса τ_{ik} . В предлагаемой работе установлено, что они не зависят от виля обрезавшей функции, фигурирующей в ходе перенормировки τ_{ik} . Показано также, что имеет место ковариантное уравнение гидродинамики

$$\tau_{i;k}=0. \quad (1.1)$$

Численными методами вычислены компоненты τ_{ik} . Полученные результаты сравниваются с данными приближенных расчетов, выполненных в [7, 8].

2. **Тензор энергии-импульса.** Мы начнем с рассмотрения вакуумного поля между обкладками сферически-симметрического конденсатора с идеально проводящими обкладками. Пусть радиус внутренней обкладки равен a , а внешней— R . Устремив R к бесконечности, из общих формул этого случая мы получим решение интересующей нас задачи.

Вакуумный тензор энергии-импульса можно представить в виде

$$\tau_i^k = \text{diag}(\epsilon, -p, -p_\perp, -p_\perp),$$

где плотность энергии ϵ , давления в радиальном p и в поперечном p_\perp направлениях определяются из соотношений

$$\epsilon = \frac{1}{8\pi} \langle 0 | (E^2 + H^2) | 0 \rangle \quad (2.1)$$

$$\hat{p} = \varepsilon - \frac{1}{4\pi} \langle 0 | (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{E})^2 + (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{H})^2 | 0 \rangle \quad \varepsilon - p - 2p_1 = 0,$$

где $|0\rangle$ — амплитуда состояния фотонного вакуума, \mathbf{E} , \mathbf{H} — операторы напряженностей электромагнитного поля, а $\mathbf{n}_1 = \mathbf{r}/r$. Здесь центр конденсатора принят за начало сферической системы координат r , θ и φ .

В соответствии с симметрией задачи оператор вектор потенциала A^i разложим в ряд по состояниям фотона с определенными значениями энергии ω , полного момента $l = 1, 2, 3, \dots$, его проекции $-l \leq m \leq l$ и четности $(-1)^{l+\lambda+1}$ (мы пользуемся системой единиц $\hbar = c = 1$). В кулоновской калибровке $A^i = (0, \mathbf{A})$ имеем [9].

$$\mathbf{A} = \sum_{\lambda} (c_{\lambda} \mathbf{A}_{\lambda} + c_{\lambda}^* \mathbf{A}_{\lambda}^*), \quad \alpha = (\omega/lm^l), \quad (2.2)$$

где значения $\lambda = 0$ и 1 соответствуют мультиполям магнитного и электрического типов,

$$A_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \beta_{0l}(a, R, \omega) g_{0l}(\omega R, \omega \mathbf{r}) \cdot \mathbf{X}_{lm} e^{-i\omega t}, & \text{при } \lambda = 0 \\ \omega^{-1} \beta_{1l}(a, R, \omega) \text{rot}[g_{1l}(\omega R, \omega \mathbf{r}) \mathbf{X}_{lm}] e^{-i\omega t}, & \text{при } \lambda = 1, \end{cases}$$

(см. [10]). Здесь

$$g_{\lambda l} = j_l(\omega r) - \Omega_{\lambda l}(\omega R) n_l(\omega r), \quad a \leq r \leq R,$$

$j_l(x)$ и $n_l(x)$ — сферические функции Бесселя и Неймана,

$$\Omega_{\lambda l}(x) = \begin{cases} j_l(x) n_l(x), & \text{при } \lambda = 0 \\ [x j_l(x)]' [x n_l(x)]', & \text{при } \lambda = 1, \end{cases}$$

штрих над функцией означает производную по ее аргументу и, наконец, $\mathbf{X}_{lm}(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta, \varphi) \sqrt{l(l+1)}$ — нормированные векторные гармоники, где \mathbf{L} — оператор орбитального момента, а Y_{lm} — обычные сферические функции. Энергетические уровни фотона между идеально проводящими обкладками конденсатора квантованы граничными условиями

$$\mathbf{r} \times \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad \text{при } r = a, R.$$

Они сводятся к уравнению

$$\Omega_{\lambda l}(\omega R) - \Omega_{\lambda l}(\omega a) = 0 \quad (2.3)$$

для ω . Коэффициенты $\beta_{\lambda l}$ проще всего определить из условия [9]

$$\int_a^R r^2 dr \int d\Omega \mathbf{A}_{\alpha}^* \mathbf{A}_{\alpha} = \frac{2\pi}{\omega} \delta_{\alpha\alpha'}$$

($d\Omega$ — элемент телесного угла). Преобразуя его к стандартным интегралам от \mathbf{X}_{lm} , j_l , n_l [10] с помощью (2.3) получим

$$\beta_{\lambda l} = \sqrt{4\pi\omega/Q_{\lambda l}},$$

где

$$Q_{\lambda l}(a, R, \omega) = \begin{cases} x^3 [dg_{0l}(\omega R, \omega x) dx]^2 \Big|_{x=a}^{x=R}, & \text{при } \lambda = 0 \\ x g_{1l}^2(\omega R, \omega x) [\omega^2 x^2 - l(l+1)] \Big|_{x=a}^{x=R}, & \text{при } \lambda = 1. \end{cases}$$

Теперь, используя разложения операторов \mathbf{E} и \mathbf{H} , соответствующие (2.2), можно вычислить вакуумные средние (2.1):

$$q = \frac{1}{8\pi} \sum_{\omega \neq 0} \omega^3 f_{\lambda l}^{(q)}(\omega R, \omega r), Q_{\lambda l}, q = \varepsilon, p_{\perp}. \quad (2.4)$$

$$f_{\lambda l}^{(q)} = \begin{cases} l \bar{g}_{\lambda, l+1}^2 + (l+1) \bar{g}_{\lambda, l-1}^2 + (2l+1) g_{\lambda l}^2, & \text{при } q = \varepsilon \\ l(l+1) (2l+1) g_{\lambda l}^2 \omega^2 r^2, & \text{при } q = p_{\perp}, \end{cases}$$

$$\bar{g}_{\lambda, l-1} = j_{l \pm 1}(\omega r) - Q_{\lambda l}(\omega R) n_{l \pm 1}(\omega r).$$

3. **Перенормировка.** Суммы (2.4) расходятся, поэтому введем обрезную функцию $\psi_{\mu}(\omega, l)$ ($\psi_0 = 1$), $1/\mu$ — параметр обрезания. Процедура регуляризации тензора энергии-импульса сводится к вычислению предела

$$\text{reg} \langle C | \tau_{ik} | 0 \rangle = \lim_{\mu \rightarrow 0} \langle 0 | \tau_{ik}(\mu, a, R) | 0 \rangle - \lim_{\substack{\mu \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \langle 0 | \tau_{ik}(\mu, a, R) | 0 \rangle. \quad (3.1)$$

При этом нужно доказать, что (3.1) не зависит от конкретного вида функции ψ . С этой целью введем новую функцию [4]

$$S_{\lambda l}(a, R, \omega) = -(1/\pi) \{ \text{arctg}[\Omega_{\lambda l}(\omega R)] - \text{arctg}[\Omega_{\lambda l}(\omega a)] \} \quad (3.2)$$

таким образом, чтобы энергетические уровни ω_n фотона между обкладками конденсатора определялись из условий $S_{\lambda l}(a, R, \omega_n) = 0, \pm 1, \pm 2$, (см. (2.3)). Нетрудно доказать равенство

$$Q_{\lambda l}(a, R, \omega_n) = \pi [1 + \Omega_{\lambda l}^2(\omega_n R)] \partial S_{\lambda l}(a, R, \omega_n) \partial \omega_n,$$

которое позволяет (2.4) представить в виде

$$q = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{\omega_n > 0} \sum_{l, \lambda} \frac{\omega_n^3 \psi_{\mu}(\omega_n, l) f_{\lambda l}^{(q)}(\omega_n R, \omega_n r)}{[1 + \Omega_{\lambda l}^2(\omega_n R)] \partial S_{\lambda l} \partial \omega_n}. \quad (3.3)$$

Для вычисления подробных сумм удобно применять формулу Абеля-Плана [2, 11]. Мы воспользуемся ее обобщенным вариантом

$$\sum_{\omega_n \geq 0} \frac{f(\omega_n)}{s'(\omega_n)} = w + \int_0^{\infty} f(x) dx - i \int_0^{\infty} \left\{ \frac{f(ix)}{\exp[-2\pi i s(ix)] - 1} - \frac{f(-ix)}{\exp[2\pi i s(-ix)] - 1} \right\} dx, \quad (3.4)$$

$$w = \begin{cases} 0, & \text{если } s(0) \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ f(0)/[2s'(0)], & \text{если } s(0) = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

где функции $s(z)$, $f(z)$ аналитичны в области $\text{Re} z > 0$ и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \pm \infty} f(z) \{1 - \exp[-2\pi i s(z) \text{sgn}(y)]\}^{-1} &= 0, \quad z = x + iy \\ \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(z) \{1 - \exp[-2\pi i s(z) \text{sgn}(y)]\}^{-1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

В (3.4) суммирование ведется по тем значениям ω_n , для которых функ-

ция $s(z)$ равна $0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В [2, 11] рассмотрен частный случай этой формулы, когда $s(z) = z$. Вывод (3.4) не представляет особого труда и приведен в приложении к первой части настоящей работы.

Используя асимптотические выражения функций j_l, n_l [1, 2], можно убедиться, что функции S_{li} и $\omega^3 \psi_{\mu}(\omega, l) f_{\lambda}^{(q)}(1 + \Omega_{li}^2)$ (см. (3.2) и (3.3)) удовлетворяют условиям (3.5), и поэтому формула (3.4) применима к сумме по ω_n . С ее помощью нетрудно осуществить регуляризацию (3.3). Для случая проводящего шара, когда $R \rightarrow \infty$, находим

$$q = -\frac{1}{4\pi^3 a^4} \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \chi_{\mu}(z/a, l) F_l^{(q)}(z, x) dz, \quad q = \varepsilon, p_1, p. \quad (3.6)$$

Здесь $x = r/a$,

$$F_l^{(q)} = z^3 \left\{ \frac{i_l(z)}{k_l(z)} + \frac{[zi_l(z)]'}{[zk_l(z)]'} \right\} [lk_{l+1}^2(zx) + (l+1)k_{l-1}^2(zx) - (2l+1)k_l^2(zx)],$$

$$F_l^{(p_1)} = l(l+1)(2l+1) \frac{z}{x^2} \left\{ \frac{i_l(z)}{k_l(z)} + \frac{[zi_l(z)]'}{[zk_l(z)]'} \right\} k_l^2(zx), \quad (3.7)$$

$$F_l^{(p)} = F_l^{(q)} - 2F_l^{(p_1)}, \quad \chi(y) = [\psi(ly) + \psi(-ly)]/2,$$

а $k_l(z), i_l(z)$ — модифицированные сферические функции Бесселя III и I родов [12]

$$k_l(z) \equiv \sqrt{\pi/2z} K_{l+1/2}(z), \quad i_l(z) \equiv \sqrt{\pi/2z} I_{l+1/2}(z).$$

Укажем, что для частного вида обрезающей функции $\psi_{\mu}(\omega, l) = \exp(-\mu\omega)$ выражения (3.6) можно вывести также из формул, полученных в [6] другим способом.

Чтобы показать насколько быстро сходятся сумма и интеграл в (3.6), приведем соответствующие предельные выражения для $F_l^{(q)}(z, x)$:

а) Если $z \rightarrow 0$, а l фиксировано, то

$$F_l^{(q)} \approx -\pi(l+1/2)x^{-2(l+2)}, \quad F_l^{(p_1)} \approx -(\pi/2)(l+1)x^{-2(l+1)}.$$

б) Если z большое число и вновь l фиксировано, используя асимптотические разложения (9.7.1) — (9.7.4) приведенные в [12], находим

$$F_l^{(q)} \sim 2F_l^{(p_1)} \sim -l^2(l+1)^2(2l+1) \frac{\pi}{2(zx)^4} \exp[-2(x-1)z].$$

в) Наконец, если l большое число, а z фиксировано, можно воспользоваться равномерными асимптотическими разложениями (9.7.7) — (9.7.10) упомянутого справочника. В результате

$$F_l^{(q)}(vz, x) \sim \Phi_l^{(q)}(z, x), \quad v = l+1/2,$$

$$\Phi_l^{(p)}(z, x) = \pi l^2(zx) t^3(z) \exp\{-2v[\gamma(zx) - \gamma(z)]\} (2x^3), \quad (3.8)$$

$$\Phi_l^{(q)}(z, x) = -2v\{1 + [t(z)(t^2(z) + 3) + t(zx)(5t^2(zx) - 9)]/12v\} \Phi_l^{(p)}/t(zx),$$

$$t(z) = 1/\sqrt{1+z^2}, \quad \gamma(z) = \sqrt{1+z^2} + \ln[z/(1+\sqrt{1+z^2})].$$

Таким образом, в (3.6) к пределу $\mu \rightarrow 0$ можно переходить непосредственно под знаком интеграла, и поэтому

$$q = -\frac{1}{4\pi^2 a^4} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{\infty} F_l^{(q)}(z, x) dz, \quad q = \varepsilon, p_1, p. \quad (3.9)$$

Следовательно, результат перенормировки не зависит от вида функции ψ .

4. Уравнение гидродинамики. Исходя из рекуррентных соотношений для функции $k_l(z)$ нетрудно убедиться в справедливости ковариантного уравнения гидродинамики (1.1). Для сферически симметрического случая оно принимает вид

$$\frac{dp}{dx} + \frac{2}{x}(p - p_1) = 0, \quad x = r/a. \quad (4.1)$$

Это уравнение позволяет исследовать ряд свойств тензора τ_{ik} . Из (3.8), (3.9) видно, что вблизи поверхности шара величины ε, p, p_1 расходятся. Поэтому с помощью (4.1) находим

$$\lim_{x \rightarrow 1} (p - p_1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} (\varepsilon - p_1) = 2. \quad (4.2)$$

В [13] получена формула для ε вблизи идеального проводника произвольной формы, согласно которой

$$\varepsilon(x) \approx [30\pi^2 a^4 (x-1)^3]^{-1}, \quad \text{при } x \approx 1 \quad (4.3)$$

Из (4.1) и (4.3) видно, что при $x \approx 1$

$$\begin{aligned} p_1(x) &\approx \varepsilon(x)/2, \quad p(x) = -(x-1)\varepsilon(x)/2, \\ \lim_{x \rightarrow 1} (\varepsilon - p_1)' &= \lim_{x \rightarrow 1} (p/p_1)' = -1. \end{aligned} \quad (4.4)$$

На больших расстояниях от шара после несложных вычислений получаем

$$p_1(x) \approx \frac{1}{\pi^4 a^4 x^7} \int_0^{\infty} z^4 k_1^2(z) dz = \frac{5}{16\pi^2 a^4 x^7}, \quad x \gg 1.$$

Отсюда вновь с помощью (4.1) находим

$$\varepsilon \approx -4p \approx (2\pi^2 a^4 x^7)^{-1}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} q'(x) = 0, \quad q = \varepsilon, p_1, p, \quad x \gg 1.$$

Приведем также интегральные представления (4.1):

$$p(r) = \frac{1}{r^3} \int_0^r \varepsilon(t) t^2 dt = \frac{2}{r^2} \int_0^r p_1(t) t dt.$$

Отсюда с учетом (4.3), (4.4) следует что полная энергия вакуума вне сферы радиуса r при $r \rightarrow a$ расходится как $[15\pi a(r/a-1)^2]^{-1}$. Укажем, что в реальных физических условиях свойство идеальной проводимости вещества нарушается при $\omega \gg \omega_0$, где ω_0 — некая характерная частота. В этом случае отличия от приводимых здесь результатов будут иметь место лишь у поверхности шара в слое толщиной порядка ω_0^{-1} .

r/a	a^4e	$a^4e(as)$	a^4p	$a^4p(as)$	a^4p_L	$a^4p(as)_L$
1	∞	∞	$-\infty$	$-\infty$	∞	∞
1.1	2.804	2.808	-0.1265	-0.1314	1.465	1.470
1.2	0.2940	0.2954	-0.02379	-0.02543	0.1589	0.1604
1.3	0.07363	0.07426	-0.008035	-0.008764	0.04083	0.04151
1.4	0.02642	0.02675	-0.003474	-0.003845	0.01495	0.01530
1.5	0.01157	0.01175	-0.001728	-0.001934	0.006651	0.006844
1.6	0.005760	0.005865	-9.426 10^{-4}	-0.001064	0.003351	0.003465
1.7	0.003134	0.003199	-5.496 10^{-4}	-6.246 10^{-4}	0.001842	0.001912
1.8	0.001822	0.001864	-3.371 10^{-4}	-3.851 10^{-4}	0.001080	0.001124
1.9	0.001115	0.001142	-2.154 10^{-4}	-2.47 10^{-4}	6.657 10^{-4}	6.948 10^{-4}
2.0	7.121 10^{-4}	7.300 10^{-4}	-1.422 10^{-4}	-1.636 10^{-4}	4.272 10^{-4}	4.468 10^{-4}
5.0	6.842 10^{-7}	6.970 10^{-7}	-1.676 10^{-7}	-1.939 10^{-7}	4.259 10^{-7}	4.455 10^{-7}
10.0	5.144 10^{-9}	5.154 10^{-9}	-1.274 10^{-9}	-1.464 10^{-9}	3.194 10^{-9}	3.309 10^{-9}
100.0	5.066 10^{-16}	5.069 10^{-16}	-1.267 10^{-16}	-1.449 10^{-16}	3.166 10^{-16}	3.259 10^{-16}

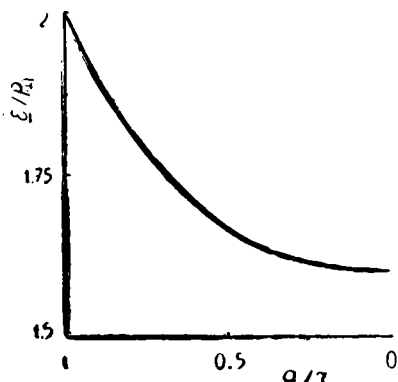
5. Результаты численных расчетов. Будем полагать

$$q(x) = q^{(as)}(x) + \Delta q(x), \quad q = \varepsilon, \rho_{\perp}, \rho, \quad (5.1)$$

где

$$q^{(as)} = -\frac{1}{8\pi^3 a^4} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) \int_0^{\infty} dz \Phi_l^{(q)}(z, x), \quad (5.2)$$

$$\Delta q = -\frac{1}{4\pi^3 a^4} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dz \left[F_l^{(q)}(z, x) - \Phi_l^{(q)}\left(\frac{z}{l+1/2}, x\right) \right]. \quad (5.3)$$



Такое представление (3.9) удобно, поскольку в (5.2) ряд по l сводится к геометрической прогрессии, а в (5.3) он сходится намного быстрее, чем в (3.9).

Результаты расчетов ε , ρ_{\perp} , ρ по формулам (5.1)–(5.3) приведены в таблице и на рисунке. Обратим внимание на отсутствие сингулярности в зависимости ε/ρ_{\perp} от $x = r/a$. Мы не приводим графики кривых $q(x)$, поскольку они мало отличаются от аналогичных кривых для $q^{(as)}(x)$ в работах [7, 8]. Других численных данных в [7, 8] нет, и поэтому в таблице привели также результаты расчетов

по формуле (5.2), которая получается из (3.9), если в ней функции (3.7) заменить их асимптотическими разложениями (3.8).

Авторы признательны Г. С. Саакяну за постоянный интерес к работе и обсуждения.

Институт прикладных проблем физики АН Арм. ССР,
кафедра теоретической физики ЕГУ

Поступила 3.04.1985

ЛИТЕРАТУРА

1. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика. Часть 2. М.: Наука, 1978, 448 с.
2. Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. М.: Атомиздат, 1980, 295 с.
3. Де Витт Б. С. Квантовая гравитация: новый синтез. В сб. «Общая теория относительности». М.: Мир, 1983, 296–362.
4. Boyer T. H. Quantum electromagnetic zero-point energy of a conducting spherical shell and the Casimir model for a charged particle. — Phys. Rev., 1968, v. 174, № 5, 1764.
5. Davies B. Quantum electromagnetic zero-point energy of a conducting spherical shell. — J. Math. Phys., 1972, v. 13, № 9, 1324.
6. Milton K. A., De Raad L. L., Schwinger J. Casimir self-stress on a perfectly conducting spherical shell. — Ann. Phys., 1978, v. 115, № 2, 388.

7. *Brevik I., Kolbenstvedt H.* Electromagnetic Casimir densities in dielectric spherical media. — *Ann. Phys.*, 1983, v. 149, № 2, 237.
8. *Brevik I., Kolbenstvedt H.* Casimir stress in spherical media when $\epsilon \cdot \mu = 1$. — *Can. J. Phys.*, 1984, v. 62, № 8, 805.
- 9 *Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980, 704 с.
10. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965, 702 с.
11. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. М.: Наука, 1968, 471 с.
12. *Абрамовиц М., Стиган Н.* Ред.-ры. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979, 830 с.
13. *Balian R., Duplantier R.* Electromagnetic waves near perfect conductors. II. Casimir effect. — *Ann. Phys.*, 1978, v. 112, № 1, 165.

Ա մ փ ո փ ու մ

Ուսումնասիրված է վակուումային էլեկտրամագնիսական դաշտը իդեալական հաղորդիչ գնդի դրսում: Հաշվված են վերանորմավորված էներգիայի-իմպուլսի տենզորի բաղադրիչները: Ցույց է տված, որ դրանք բավարարում են հիդրոդինամիկայի հավասարմանը:

Summary

The vacuum electromagnetic field perturbed by a perfect conductive sphere has been investigated. The energy-momentum tensor has been shown to satisfy the hydrodynamic equations. The components of this tensor have been calculated.