

М. Г. АБРАМЯН, С. В. АРУТЮНЯН

МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СПИРАЛЬНОГО ПАКЕТА ВОЛН И СТАЦИОНАРНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ-ОГИБАЮЩИЕ

Исследована модуляционная неустойчивость пакета спиральных волн, распространяющихся по самогравитирующему газовому диску. Показано, что в окрестности внутреннего линдбладовского резонанса пакет модуляционно неустойчив. Найдены и систематизированы стационарные периодические решения нелинейного уравнения динамики спиральных волн плотности.

В нелинейной теории возмущений гравитирующего газового диска установленным фактом является возможность «самоорганизации» распространяющихся по нему плоских и спиральных волн, малой, но конечной амплитуды в пакет со стационарным профилем (оггибающая этого пакета может иметь форму солитона [1—5] или периодических волн [6—7]).

Исследование модуляционной неустойчивости стационарного пакета волн в гравитирующем диске представляет большой интерес с точки зрения волновой теории спиральной структуры галактик. Впервые такая задача была рассмотрена в работах [8—10]. Однако в [8, 9] ошибочно пренебрежено нелинейностью члена с градиентом давления, и нелинейность учтена лишь в конвективном члене $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$. Как показывают результаты работ по нелинейной теории гравитирующего диска, это можно делать лишь для дисков с показателем политропы $\gamma = 2$ [1—3, 11—13]. В работе [10] учтены эффекты нелинейности силы давления. Однако из-за некорректности учета нелинейных взаимодействий гармоник с волновыми числами $2k$, $-k$ в гравитационном члене (как, впрочем, и в [9]) коэффициент при кубической нелинейности в параболическом уравнении (впервые полученном авторами работы [9]) отличается от аналогичных коэффициентов работ [4, 5, 11]. Из-за указанной неточности дисперсионные соотношения для спиральных гармоник, отличающихся только знаком локального радиального волнового числа, не совпадают. Этого, как известно, не должно быть в гравитирующем газовом диске без диссипации [1, 14]. Правильный учет поля отрицательных гармоник снимает указанное противоречие, а вышеуказанный коэффициент совпадает с аналогичными коэффициентами работ [4, 5, 11]. Кроме того, вызывает недоумение факт применения в работе [10] критерия модуляционной неустойчивости (критерия Лайтхилла $\alpha u'_g < 0$, где $u_g(k)$ — групповая скорость спиральных волн (см. ниже), а α — нелинейный коэффициент) к маргинально устойчивым дискам $\left(Q \equiv \frac{\kappa_0 V_s}{\pi G \sigma_0} = 1, \text{ где } \kappa_0 = 2\Omega \left(1 + \right. \right.$

$\left. + \frac{r}{2\Omega} \frac{d\Omega}{dr} \right)^{1/2}$ — эпициклическая частота, v_s — скорость звука в газе, σ_0 — поверхностная плотность диска), когда у диска $u'_g(k) = 0$.

1. Исследуем вопрос модуляционной неустойчивости гравитирующего диска с учетом приведенных замечаний. Амплитуда возмущений азимутальной скорости газа v_φ в третьем порядке по возмущениям определяется уравнением [5]

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2} - u_s^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho^2} = (v_s^2 - v_1^2) \varepsilon - \left[2v \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} - \frac{\partial v_1^2}{\partial \chi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right] - 2a_2(\chi) |\varepsilon|^2 \varepsilon, \quad (1)$$

где

$$a_2(\chi) = \frac{\chi^3}{3 - 2|\chi|} \left\{ [2u_s^2 \chi - |\chi|]^2 + \left(\frac{3}{2} u_s^2 \chi - |\chi| \right) (3 - 2|\chi|) \right\}. \quad (2)$$

Здесь сделаны обозначения

$$\tau = x_0 \frac{\omega t - m\varphi}{\omega - m\Omega}, \quad \rho = k_0 r, \quad \varepsilon = \frac{2\Omega k_0}{x_0^2} v_\varphi, \quad v = \frac{\omega - m\Omega}{x_0}, \quad \chi = \frac{k}{k_0},$$

$$k_0 = \frac{x_0^2}{2\pi G \sigma_0}, \quad v_1^2 = 1 - |\chi| + u_s^2 \chi^2,$$

где ω , k , m — соответственно частота, радиальное и азимутальное волновые числа спирального возмущения.

Критерием модуляционной неустойчивости является

$$-v u'_g(\chi) a_2(\chi) < 0,$$

где

$$u'_g \equiv \frac{du_g}{d\chi} = \frac{u_g^2 - u_s^2}{v}.$$

Дисперсионные эффекты оказывают стабилизирующее воздействие на спиральный пакет, и при

$$\mu > \mu_{кр} = 2\varepsilon_0 \left| \frac{a_2(\chi)}{v u'_g} \right|^{1/2}$$

пакет устойчив относительно модуляций.

Инкремент неустойчивости равен

$$\beta = \frac{\mu}{2|v|} \sqrt{|v u'_g [4a_2(\chi) \varepsilon_0^2 - \mu^2 v u'_g]|}.$$

Быстрее всех растет мода с длиной волны [9]

$$\mu_{max} = \mu_{кр} / \sqrt{2}.$$

В качестве спиральной структуры Галактики примем модель Марочника и др. [14, 15] (длинноволновая модель). Поверхностную плотность диска примем равной $\sigma_0 = 40 M_\odot / \text{пс}^2$, скорость звука газа — $v_s = 10 \text{ км/с}$ и фазовую скорость спиральной волны — $\Omega_p = 23,5 \text{ км/с.кпс}$. В качестве кривой вращения Галактики возьмем кривую с постоянной скоростью $V_{0\varphi} = 250 \text{ км/с}$, а $\Omega(r)$ и $x_0(r)$ находим согласно их определениям

$$\Omega(r) = \frac{V_{0z}}{r}, \quad \alpha_0(r) = \frac{\sqrt{2} V_{0\varphi}}{r}.$$

Волновое число спиральной волны вычислим по формуле длинноволновой «т» волны [14]:

$$\chi = -\frac{4}{2u_1^2} (1 - \sqrt{1 - 4u_1^2(1 - v^2)}).$$

Амплитуду возмущения азимутальной скорости примем равной $v_{0\varphi} = 8$ км/с.

На рис. 1 и 2 приведены графики зависимости $a_2(\chi)$ и $a_2(\chi)u'_g$ от галактоцентрического расстояния для указанной модели спиральной структуры. Как видно из рис. 2, спиральная волна в рассматриваемой модели модуляционно неустойчива в окрестности внутреннего линдбладовского резонанса ($r_1 = 3,1$ кпс) и коротационного круга ($r_2 = 10,6$ кпс). Однако подробный анализ показывает, что неустойчивость у круга коротации носит скорее формальный характер, так как при $r = 10$ кпс наиболее растущие моды здесь имеют длину волны порядка 185 кпс. Неустойчивость у внутреннего резонанса имеет важное значение, так как λ_{\max} в этом случае порядка 2—3 кпс. Эта неустойчивость развивается за время порядка $1,5 \cdot 10^9$ лет, т. е. нескольких галактических оборотов. Волны с $\lambda < 1,9$ кпс стабилизируются дисперсионными эффектами.

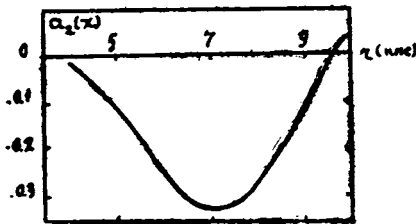


Рис. 1. Поведение нелинейного коэффициента $a_2(\chi)$ в зависимости от галактоцентрического расстояния.

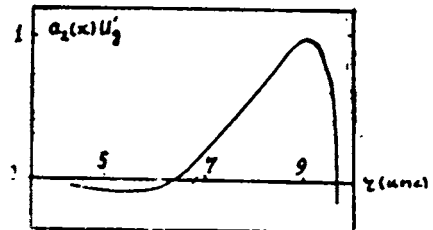


Рис. 2. Поведение выражения $a_2(\chi)u'_g$ в зависимости от галактоцентрического расстояния.

Отметим, что если воспользоваться при вычислениях коэффициентом из работы [9], получим, что пакет длинноволновых спиральных волн устойчив внутри коротационного круга.

2. Перейдем к исследованию стационарных периодических решений уравнения (1). В линейном по амплитуде возмущений приближении оно дает дисперсионное уравнение линейных волн:

$$v^2 = v_1^2. \quad (3)$$

Во втором приближении имеем (в уравнении (1) амплитуда считается медленно меняющейся, такой, что $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}, \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \sim O(\varepsilon^2)$)

$$2v_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} - \frac{\partial v_1^2}{\partial \chi} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \rho} = 0, \quad (4)$$

которое тождественно удовлетворяется для стационарных прогрессивных волн типа

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho - u_g \tau) \equiv \varepsilon(\eta), \quad (5)$$

где

$$u_z = \frac{\partial v_1}{\partial \chi} = \mp \frac{2u_2^2 \chi - |\chi|}{2v_1} \quad (6)$$

групповая скорость линейных пакетов волн. В третьем приближении уравнение (1) с учетом (5) дает

$$(u_2^2 - u_1^2) \frac{d^2 \varepsilon}{d\eta^2} = (v^2 - v_1^2) \varepsilon - 2a_2(\chi) \varepsilon^3, \quad (7)$$

где учтена нелинейная поправка к частоте возмущений (v^2) согласно регулярному методу теории возмущений*.

Для решения уравнения (7) представим его в виде

$$\frac{d^2 \varepsilon}{d\eta^2} = - \frac{dW}{d\varepsilon}. \quad (8)$$

Здесь

$$W = \frac{1}{2(u_2^2 - u_1^2)} [a_2(\chi) \varepsilon^4 - (v^2 - v_1^2) \varepsilon^2]. \quad (9)$$

Таким образом, нам следует решить уравнение, аналогичное уравнению Ньютона для гипотетической частицы, движущейся в поле с эффективным потенциалом W [18].

Ход этой функции в случаях а) $\frac{u_2^2 - u_1^2}{a_2(\chi)} > 0$ (сплошная линия) и б) $\frac{u_2^2 - u_1^2}{a_2(\chi)} < 0$ (пунктирная линия) приведен на рис. 3.

Интегралом движения для уравнения (8) является выражение

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{d\varepsilon}{d\eta} \right)^2 + W. \quad (10)$$

Ограниченные решения этого уравнения можно систематизировать по значениям малой величины E . При этом возможны следующие случаи:

1) $E \geq 0$. Ограниченные решения уравнения (8) возможны при

* В процессе публикации настоящей статьи вышла работа [16], в которой пренебрегается этой нелинейной поправкой в уравнении (7) и утверждается, что в устойчивых дисках существование стационарных солитонов невозможно. Это ошибочно. Даже в рамках квазиклассики, когда заранее предполагается соотношение (3) точным [17] и поэтому в уравнении (7) член $(v^2 - v_1^2) \varepsilon$ зануляется, опять имеется солитонное решение [7] при

$$\varepsilon(\eta) = \varepsilon_0 \operatorname{cn} \left(\varepsilon_0 \sqrt{\frac{2a_2(\chi)}{|u_2^2 - u_1^2|}} \eta, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

где

$$\varepsilon_0 = \frac{u_2^2 - u_1^2}{|a_2|} E,$$

E — постоянная интегрирования.

а) $\frac{a_2(\chi)}{u_g^2 - u_s^2} > 0$ (область $l_1 l_2$ на рис. 3). В этом случае решением является функция

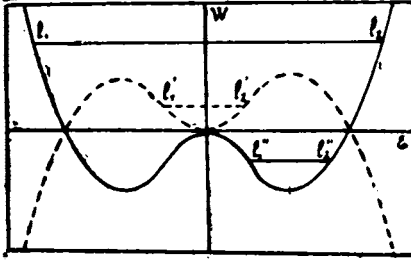


Рис. 3. Потенциальная функция $W(\epsilon)$.

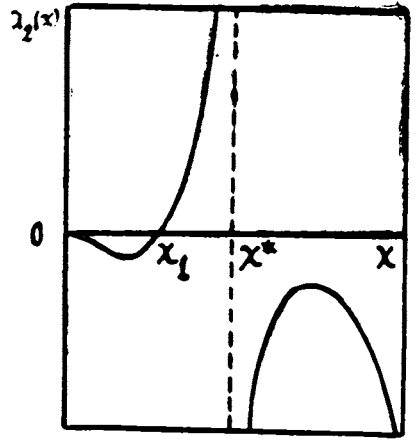


Рис. 4. Зависимость коэффициента $a_2(\chi)$ от волнового числа χ .

$$\epsilon = \epsilon_0 \operatorname{sn} \frac{i \sqrt{1 + 4a^2 b^2 E}}{a} (\eta + \eta_0), \tag{11}$$

где

$$a = \sqrt{\left| \frac{u_g^2 - u_s^2}{v^2 - v_1^2} \right|}, \quad b = \sqrt{\left| \frac{2a_2(\chi)}{v^2 - v_1^2} \right|}, \tag{12}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{b} \sqrt{\delta + \sqrt{1 + 4a^2 b^2 E}}, \quad \delta = \operatorname{sgn} \frac{a_2(\chi)}{v^2 - v_1^2},$$

а η_0 — произвольная постоянная. Модуль эллиптической функции (11) определяется формулой

$$s^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2 b^2 E}} \right).$$

В частном случае $E = 0$ из (11) получаем солитонное решение [5]

$$\epsilon(\eta) = \frac{\epsilon_0}{\operatorname{ch}(\eta + \eta_0)/a}.$$

Условия периодичности функции (11) по η и ϕ дают

$$\lambda_A = 4a \cdot K(s) / k_0 \sqrt{1 + 4a^2 b^2 E}, \quad \lambda_A = 2\pi u_g / v, \tag{13}$$

где $K(s)$ — полный эллиптический интеграл I рода, λ_A — длина волны модуляции по η .

б) $\frac{a_2(\chi)}{u_g^2 - u_s^2} < 0$ и $\frac{a_2(\chi)}{v^2 - v_1^2} > 0$, причем $E < \frac{(v^2 - v_1^2)^2}{8a_2(\chi)(u_s^2 - u_g^2)}$ (об-

ласть $l_1 l_2'$ на рис. 3). Решение уравнения (8) имеет вид

$$\epsilon = \epsilon_0' \operatorname{sn} \frac{\alpha_1 h}{\sqrt{2a_1}} (\eta + \eta_0), \tag{14}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{b} \sqrt{1 + \sqrt{1 - 4a_1^2 b^2 E}}, \quad \varepsilon'_1 = \frac{1}{b} \sqrt{1 - \sqrt{1 - 4a_1^2 b^2 E}},$$

$$a_1 = \sqrt{(u_s^2 - u_g^2) / (v^2 - v_1^2)}. \quad (15)$$

Модуль эллиптической функции (14) определяется формулой

$$s_1^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a_1^2 b^2 E}}{1 + \sqrt{1 - 4a_1^2 b^2 E}}.$$

Функция (14) периодична по η и ϕ при выполнении условий

$$\lambda'_A = \frac{4a_1 b K(s_1)}{\sqrt{2} a_1 k_0}, \quad \lambda'_A = \frac{2\pi u_g}{v}. \quad (16)$$

2) $E < 0$. Ограниченные решения имеют место при $\frac{a_2(\chi)}{u_g^2 - u_s^2} > 0$ и $\frac{a_2(\chi)}{v^2 - v_1^2} > 0$, причем $|E| < \frac{(v^2 - v_1^2)^2}{8a_2(\chi)(u_g^2 - u_s^2)}$ (область $l_1''l_2''$ на рис. 3).

Решение уравнения (8) имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_0'' \operatorname{dn} \frac{\beta_1 b}{\sqrt{2} a} (\eta + \eta_0), \quad (17)$$

где

$$\varepsilon_0'' = \beta_1 = \frac{1}{b} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4a^2 b^2 E}}. \quad (18)$$

Модуль функции (17) определяется уравнением

$$s_2^2 = 2\sqrt{1 + 4a^2 b^2 E} / (\sqrt{1 + 4a^2 b^2 E} + 1).$$

Условия периодичности функции (17) по η и ϕ дают

$$\lambda''_A = \frac{2\sqrt{2} a K(s_2)}{\beta_1 b k_0}, \quad \lambda''_A = \frac{2\pi u_g}{v}. \quad (19)$$

Дисперсионным соотношением всех рассмотренных периодических решений является

$$v^2 = v_1^2 + a_2(\chi) \varepsilon_0^2 + \frac{2(u_s^2 - u_g^2)}{\varepsilon_0^2} E. \quad (20)$$

В устойчивых по Джинсу дисках, как известно [1—3], могут распространяться лишь дозвуковые волны: $u_g < u_s$. При этом условия существования периодических решений (11), (14), (17) определяются знаком параметра $a_2(\chi)$, качественный ход зависимости которого от волнового числа приведен на рис. 4. Как видно из этого рисунка, всегда существуют область

$$0 < \chi < \chi_1, \quad \chi > \chi_1^*, \quad (21)$$

где $a_2(\chi)$ отрицателен, и область

$$\chi_1 < \chi < \chi^*, \quad (22)$$

где $a_2(\chi)$ положителен. Здесь $\chi^* = 3/2$ и не зависит от γ . χ_1 же зависит как от u_2^2 , так и от γ . Легко заметить, что решения (11) и (17) имеют место в областях волнового числа (21), а решение (14)—в области (22).

Рассмотренные стационарные периодические решения можно положить в основу нелинейных моделей спиральных структур галактик. Для этого запишем полное решение исходного нелинейного уравнения, например, при $E \geq 0$ с учетом обозначений (2) в виде

$$\varepsilon(r, \varphi, t) = \varepsilon_0 \operatorname{cn} \left[\frac{1}{R} \left(r - u_2 x_0 \frac{\Omega_p t - \varphi}{\Omega_p - \Omega} \right), s \right] \cos [m(\Omega_p t - \varphi) + kdr], \quad (23)$$

где

$$R = \frac{a}{k_0} (1 + 4a^* b^* E)^{1/4}.$$

Можно предположить, что спиральная структура галактик описывается нелинейными возмущениями типа (23), представляющими спиральные возмущения быстропеременной фазы с характерной длиной волны $\lambda_0 \approx \frac{2\pi}{k_0}$, промодулированные спиралью медленноменяющейся амплитуды, длина волны которой (13) намного превосходит λ_0 . При этом R —характерная ширина рукава в радиальном направлении ($\lambda_A = 4K(s)R$).

Источником подобных возмущений в устойчивых по Джинсу дисках могут служить нелинейные неустойчивости или же—гравитационная неустойчивость диска в его периферийной части.

Более подробно эти вопросы будут обсуждены в [7], где рассмотрятся нелинейные возмущения неустойчивого по Джинсу диска.

Авторы признательны А. М. Фридману и В. И. Петвиашвили за полезное обсуждение работы.

ЕГУ, ЕГМИ

Поступила 12.05.1985

ЛИТЕРАТУРА

1. Поляченко В. Л., Фридман А. М. Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. М.: Наука, 1976, 467 с.
2. Михайловский А. Б., Петвиашвили В. И., Фридман А. М. Спиральные волны в плоских галактиках—движущиеся солитоны.—Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 26, № 3, с. 129—133.
3. Михайловский А. Б., Петвиашвили В. И., Фридман А. М. Нелинейная теория устойчивости вращающегося гравитирующего диска.—Астрон. ж., 1979, т. 56, № 2, с. 279—287.
4. Чурилов С. М. Нелинейные волны в дифференциально вращающихся плоских газовых дисках.—Иссл. по геом. аэр. и физ. Сол., 1980, вып. 54, с. 148—156.
5. Абрамян М. Г., Арутюнян С. В. Нелинейные возмущения вращающегося самогравитирующего газового диска.—Письма в АЖ, 1984, т. 10, № 4, с. 304—310.
6. Абрамян М. Г., Арутюнян С. В. Кноидальные волны в гравитирующем диске.—В кн.: Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации: Тез. докл. Всесоюз. конф. М.: 1984, с. 157—158.
7. Абрамян М. Г. и др. Нелинейные возмущения гравитирующего диска и спиральная структура галактик.—Астрофизика, 1986 (в печати).
8. Ikuuchi S, Nakamura T. Nonlinear modulation of density waves in self-gravitating systems.—Prog. Theor. Phys., 1976, vol. 55, № 5, p. 1419—1431.

9. Корчагин В. И., Корчагин П. И. Модуляционная неустойчивость спиральных волн плотности.—Астрофизика, 1980, т. 16, № 2, с. 273—283.
10. Корчагин В. И., Корчагин П. И. О нелинейной динамике пакета спиральных волн плотности.—Астрофизика, 1981, т. 17, № 4, с. 823—827.
11. Поляченко В. Л., Чурилов С. М., Шухман И. Г. Нелинейная стадия гравитационной неустойчивости в плоских газовых системах.—Астрон. ж., 1980, т. 57, № 3, с. 497—504.
12. Абрамян М. Г. К нелинейной теории устойчивости вращающегося гравитирующего диска.—Письма в АЖ, 1982, т. 8, № 12, с. 751—755.
13. Абрамян М. Г. Спиральные солитоны в плоских газовых дисках галактик.—Астрофизика, 1985, т. 22, вып. 3, с. 487—503.
14. Марочник Л. С., Сучков А. А. Галактика. М.: Наука, 1984, 392 с.
15. Marochnik L. S., Mishurov Yu N., Shuchkov A. A. On the spiral structure of our Galaxy.—Astr. Space Sci., 1972, v. 19, p. 285—292.
16. Корчагин В. И. Нелинейные волны плотности в маргинально устойчивом гравитирующем диске.—Астрофизика, 1985, т. 23, вып. 1, с. 91—98.
17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика.—М.: Наука, 1974, 752 с.
18. Кадомцев Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976, 240 с.

Մ. Գ. ԱՐՐԱՀԱՄՅԱՆ, Ս Վ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

ՍՊԻՐԱԼ ԱԼԻՔԱՅԻՆ ՓԱԹԵԹԻ ՄՈԴՈՒԼՅԱՑԻՈՆ ԱՆԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ
ԵՎ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԱԼԻՔ-ՊԱՐՈՒՐԻԳՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ու մ

*Ուսումնասիրված է ինքնագրավիտացիայով օժտված գազային սկալա-
ռակով տարածվող սպիրալ ալիքային փաթեթի անկայունությունը մոդուլյա-
ցիաների նկատմամբ: Ցույց է տված, որ լինդբլադյան ներքին ռեզոնանսի
ըջակաչքում փաթեթը անկայուն է: Գտնված և համակարգված են խտություն
սպիրալ ալիքների դինամիկայի ոչ գծային հավասարման ստացիոնար պար-
բերական լուծումները:*