

Физика

А. С. АРУТЮНЯН, Г. Р. КУЦАНЯН

К НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ОТРАЖЕНИЯ
И ПРОХОЖДЕНИЯ ЧАСТИЦ В ОДНОМЕРНЫХ СРЕДАХ

Получены выражения для ожидаемых чисел отраженных и пропущенных частиц от конечного одномерного слоя с учетом рассеяния, поглощения и размножения частиц. Графически показана зависимость правых корней характеристического уравнения (16) от толщины слоя, которыми в основном обусловлена временная зависимость ожидаемых чисел отраженных и пропущенных частиц. Приведены также соответствующие выражения для полубесконечного слоя. Рассмотрен вопрос критического размножающего слоя.

1. В теории ядерных реакторов и астрофизики часто вызывает интерес исследование временной зависимости вероятности отражения и пропускания частиц конечной средой. В [1, 2] детально изучено нестационарное уравнение для ожидаемого числа отраженных нейтронов от конечной одномерной размножающей среды в предположении, что в одном акте деления рождаются два нейтрона,двигающихся в противоположных направлениях, при этом рассеяние и поглощение отсутствуют.

Случай рассеивающих и поглощающих сред рассмотрен в [3], где получено преобразование Лапласа по времени от плотности вероятности отражения квантов. В [4] для сред с изотропным рассеянием фотонов вычислены плотности вероятности отражения и пропускания частиц одномерной средой.

В данной работе решена нестационарная одномерная задача отражения и пропускания конечной средой с учетом рассеяния, поглощения и размножения моноэнергетических частиц в случае произвольных индикатрис. Рассматривается вопрос критических размеров размножающего слоя. Приведено также решение для полубесконечной среды.

2. Рассмотрим плоскопараллельный слой толщины x . Пусть на его поверхность в момент времени $t=0$ перпендикулярно падает частица, взаимодействие которой со средой описывается полным макроскопическим сечением $\Sigma = \Sigma_s + \Sigma_a + \Sigma_f$, где Σ_s , Σ_a , Σ_f — соответственно макроскопические сечения рассеяния, поглощения и деления. Представляют интерес ожидаемые числа отраженных и пропущенных частиц за конечный промежуток времени. Обозначим через $U(x, t)$ и $V(x, t)$ ожидаемые числа отраженных и пропущенных частиц слоем толщиной x за время t , а $u(x, t)$ и $v(x, t)$ — ожидаемые числа отраженных и пропущенных частиц слоем толщиной x в единичный интервал времени в момент t . Очевидно,

$$U(x, t) = \int_0^t u(x, t') dt', \quad V(x, t) = \int_0^t v(x, t') dt'. \quad (1)$$

Уравнения для U и V легко получить, исходя из принципа инвариантности Амбарцумяна [5]. К рассматриваемому слою мысленно добавим дополнительный слой малой толщины Δx . Тогда интересующие нас величины $U(x + \Delta x, t)$ и $V(x + \Delta x, t)$ для слоя толщиной $x + \Delta x$ будут отличаться от тех же величин $U(x, t - 2\Delta x/v)$ и $V(x, t - \Delta x/v)$ для слоя толщиной x ожидаемым числом отраженных или пропущенных частиц добавленным слоем. Здесь v — скорость частицы в среде, $\Delta x/v$ — время, теряемое частицей в слое Δx . Введя вероятность рассеяния вперед — χ , среднее число рожденных частиц в реакциях деления — ν , вероятность движения вперед родившейся частицы — μ и учитывая процессы первого порядка относительно Δx , легко можем вывести уравнения баланса, которые после предельного перехода $\Delta x \rightarrow 0$ и перехода к безразмерным переменным

$$y = x \{ \Sigma_s(1 - \chi) + \Sigma_f \nu(1 - \mu) \}, \quad (2)$$

$$z = tv \{ \Sigma_s(1 - \chi) + \Sigma_f \nu(1 - \mu) \},$$

переходят в следующие интегро-дифференциальные уравнения для $U(y, z)$ и $V(y, z)$:

$$\frac{\partial U(y, z)}{\partial y} + 2 \frac{\partial U(y, z)}{\partial z} = 1 - 2aU(y, z) + \int_0^z u(y, z') U(y, z - z') dz', \quad (3)$$

$$\frac{\partial V(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial V(y, z)}{\partial z} = -aV(y, z) + \int_0^z v(y, z') U(y, z - z') dz', \quad (4)$$

где

$$a = \frac{\Sigma - \Sigma_s \chi - \Sigma_f \nu \mu}{\Sigma_s(1 - \chi) + \Sigma_f \nu(1 - \mu)} \quad (5)$$

с начальными и граничными условиями.

$$U(y, 0) = 0, \quad V(y, 0) = 0, \quad (6)$$

$$U(0, z) = 0, \quad V(0, z) = 1. \quad (7)$$

Коэффициент a зависит от свойств среды и от типа взаимодействия. Для чисто рассеивающих сред ($\Sigma_s = \Sigma_f = 0$) — $a = 1$. В случае сред с рассеянием и поглощением

$$a = \frac{\Sigma_s(1 - \chi) + \Sigma_a}{\Sigma_s(1 - \chi)} > 1.$$

Для размножающих сред ($\Sigma_s = \Sigma_a = 0$, $\Sigma_f \neq 0$)

$$a = \frac{1 - \nu \mu}{\nu(1 - \mu)} < 1.$$

В частности, при $\nu=2$, $\mu=1/2$ имеем $a=0$. Этот случай рассмотрен в [2]. Заметим, что при наличии всех трех процессов среда эффективно может вести себя как чисто рассеивающая ($a=1$), размножающая ($a<1$) и как рассеивающая среда с поглощением ($a>1$).

3. Уравнения (3), (4) решаются методом преобразований Лапласа. Пусть $\Omega(y, s)$ и $\Theta(y, s)$ — Лаплас-изображения соответственно $U(y, z)$ и $V(y, z)$; $\Omega(y, s) \doteq U(y, z)$, $\Theta(y, s) \doteq V(y, z)$. Тогда в силу (1) и (6) $s\Omega(y, s) \doteq u(y, z)$, $s\Theta(y, s) \doteq v(y, z)$.

После преобразования Лапласа с учетом (6) уравнения (3), (4) переходят в

$$\frac{d\Omega(y, s)}{dy} = s\Omega^2(y, s) - 2(a+s)\Omega(y, s) + \frac{1}{s}, \quad (8)$$

$$\frac{d\Theta(y, s)}{dy} = -(a+s)\Theta(y, s) + s\Omega(y, s)\Theta(y, s), \quad (9)$$

с граничными условиями

$$\Omega(0, s) = 0, \quad \Theta(0, s) = \frac{1}{s}. \quad (10)$$

Решения (8), (9) имеют вид

$$\Omega(y, s) = \frac{1}{s} \frac{\sin(\sqrt{1-(a+s)^2} \cdot y)}{K(y, s)}, \quad (11)$$

$$\Theta(y, s) = \frac{1}{s} \frac{\sqrt{1-(a+s)^2}}{K(y, s)}, \quad (12)$$

где

$$K(y, s) = \sqrt{1-(a+s)^2} \cdot \cos(\sqrt{1-(a+s)^2} \cdot y) + (a+s) \cdot \sin(\sqrt{1-(a+s)^2} \cdot y). \quad (13)$$

Обратные преобразования производятся по формулам

$$U(y, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Omega(y, s) e^{sz} ds, \quad (14)$$

$$V(y, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Theta(y, s) e^{sz} ds, \quad (15)$$

где интегрирование ведется по бесконечной прямой, параллельной мнимой оси, лежащей правее всех особенностей подынтегрального выражения. $\Omega(y, s)$ и $\Theta(y, s)$ имеют две точки ветвления в $s_1 = -a-1$ и $s_2 = -a+1$, полюсы первого порядка — в $s=0$ (при $a \neq 1$) и в нулях $K(y, s)$. Когда $a=1$, в $s=0$ имеется полюс второго порядка.

Для нахождения полюсов надо решить уравнение

$$K(y, s) = 0. \quad (16)$$

Анализ этого уравнения показывает, что все корни лежат в области $\text{Res} \equiv \xi \leq -a+1$, причем в полосе $-a < \xi \leq -a+1$ нули $K(y, s)$ вещественны. Для практических целей особенно интересны правые корни уравнения (16). Можно показать [2], что при $x < \pi/2$ в интервале $-a < \xi < -a+1$ уравнение (16) не имеет корней. При $x > \pi/2$ в этом интервале имеются вещественные корни, и их число равно n , когда

$$\frac{\pi}{2}(2n-1) \leq x < \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n=1, 2, \dots$$

При $x = \frac{\pi}{2}(2n-1)$, $n=1, 2, \dots$, точка $s = -a$ также является

нулем $K(y, s)$.

На рис. 1 приведена зависимость значений первых корней уравнения (16) в интервале $-a < \xi < -a+1$ от толщины рассматриваемого

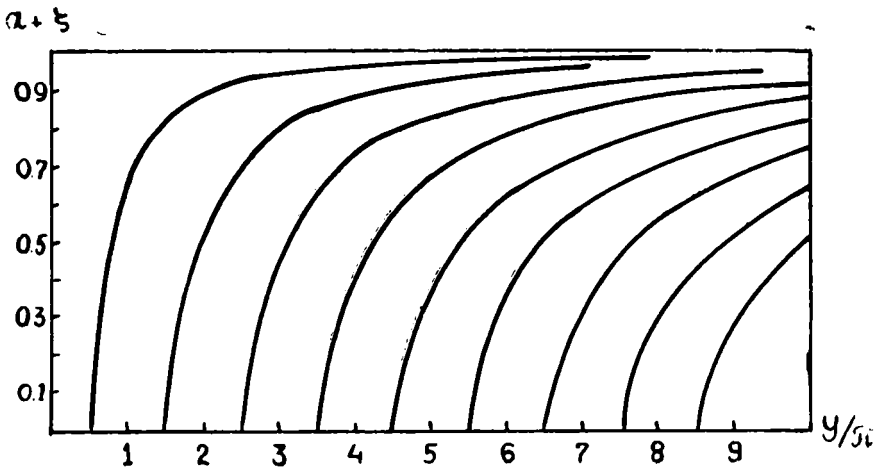


Рис. 1. Зависимость значений первых корней уравнения (12) в интервале $-a < \xi < -a+1$ от толщины рассматриваемого слоя.

слоя. На оси ординат поставлены значения $a + \xi$, что дает возможность определить значения корней для любой среды.

4. Так как $\Omega(y, s)$ и $\Theta(y, s)$ удовлетворяют условиям леммы Жордана, то для вычисления интегралов (14), (15) можно выбрать замкнутый контур, состоящий из полуокружности радиуса R и отрезка прямой $[c-iR, c+iR]$ с последующим предельным переходом $R \rightarrow \infty$ (здесь $c > s_2 = -a+1$).

После вычислений для ожидаемого числа отраженных и пропущенных частиц получаются следующие выражения:

а) при $y < \frac{\pi}{2}$

$$U(y, z) = U_0(y) + R(y, z), \quad (17)$$

$$V(y, z) = V_0(y) + Q(y, z). \quad (18)$$

б) при $y = \frac{\pi}{2}$

$$U(y, z) = U_0(y) - \frac{e^{-az}}{a} + R(y, z), \quad (19)$$

$$V(y, z) = V_0(y) - \frac{e^{-az}}{a \sin y} + Q(y, z). \quad (20)$$

в) при $y > \frac{\pi}{2}$, $y \neq y_n \equiv \frac{\pi}{2}(2n-1)$, $n=1, 2, \dots$,

$$U(y, z) = U_0(y) + \sum_k \frac{1 - (a + \xi_k)^2}{\xi_k [1 + (a + \xi_k)y]} e^{\xi_k z} + R(y, z), \quad (21)$$

$$V(y, z) = V_0(y) + \sum_k \frac{[1 - (a + \xi_k)^2]^{3/2} e^{\xi_k z}}{\xi_k [1 + (a + \xi_k)y] \cdot \sin[\sqrt{1 - (a + \xi_k)^2} \cdot y]} + Q(y, z). \quad (22)$$

Здесь ξ_k — корни уравнения (16) в интервале $-a < \xi_k < -a + 1$.

г) при $y > \frac{\pi}{2}$, $y = y_n \equiv \frac{\pi}{2}(2n-1)$, $n=1, 2, \dots$,

$$U(y_n, z) = U_0(y_n) - \frac{e^{-az}}{a} + \sum_k \frac{1 - (a + \xi_k)^2}{\xi_k [1 + (a + \xi_k)y_n]} e^{\xi_k z} + R(y_n, z), \quad (23)$$

$$V(y_n, z) = V_0(y_n) - \frac{e^{-az}}{a \sin y_n} + \sum_k \frac{[1 - (a + \xi_k)^2]^{3/2} e^{\xi_k z}}{\xi_k [1 - (a + \xi_k)y_n] \cdot \sin[\sqrt{1 - (a + \xi_k)^2} \cdot y_n]} + Q(y_n, z). \quad (24)$$

В этих формулах $U_0(y)$ и $V_0(y)$ — ожидаемые числа отраженных и пропущенных частиц слоем толщиной y для стационарной задачи.

В случае $a < 1$

$$U_0(y) = \frac{\sin(\sqrt{1-a^2} \cdot y)}{\sqrt{1-a^2} \cdot \cos(\sqrt{1-a^2} \cdot y) + a \sin(\sqrt{1-a^2} \cdot y)}, \quad (25)$$

$$V_0(y) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2} \cdot \cos(\sqrt{1-a^2} \cdot y) + a \sin(\sqrt{1-a^2} \cdot y)}. \quad (26)$$

При $a = 1$

$$U_0(y) = \frac{y}{1+y}, \quad (27)$$

$$V_0(y) = \frac{1}{1+y}. \quad (28)$$

При $a > 1$

$$U_0(y) = \frac{\text{sh} \sqrt{a^2 - 1} \cdot y}{\sqrt{a^2 - 1} \cdot \text{ch}(\sqrt{a^2 - 1} \cdot y) + a \text{sh}(\sqrt{a^2 - 1} \cdot y)}, \quad (29)$$

$$V_0(y) = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{\sqrt{a^2 - 1} \cdot \text{ch}(\sqrt{a^2 - 1} \cdot y) + a \text{sh}(\sqrt{a^2 - 1} \cdot y)}. \quad (30)$$

Входящие в формулы (17)–(24) величины $R(y, z)$ и $Q(y, z)$ являются суммами экспоненциальных членов вида $a(s_m)e^{s_m z}$, причем $\max(\text{Res}_m) < -a$. Их вклад в $U(y, z)$ и $V(y, z)$ со временем стремится к нулю.

Поскольку при $y > y_c$ (y_c — критическая толщина слоя, при которой самопроизвольно поддерживается постоянный уровень рождаемых частиц), решения стационарной задачи (25), (26) для размножающих сред теряют смысл, то уравнения (17)–(24) при $a < 1$ верны, когда $y \leq y_c$. Поэтому для слоев с $y > y_c$ целесообразнее использовать плотности ожидаемого числа отраженных и пропущенных частиц $u(y, z) = \partial U(y, z) / \partial z$, $v(y, z) = \partial V(y, z) / \partial z$.

5. Приведем выражение для ожидаемого числа отраженных частиц $U(z)$ от полубесконечной среды. Уравнение для $U(z)$ отличается от (3) отсутствием производной $\partial U / \partial y$, а его Лаплас-изображение имеет вид

$$\Omega(s) = \frac{1}{s} [a + s - \sqrt{(a+s)^2 - 1}]. \quad (31)$$

После обратного преобразования по формуле (14) получаем

$$U(z) = U_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-a-1}^{-a+1} \frac{\sqrt{1 - (a+\xi)^2}}{\xi} e^{\xi z} d\xi, \quad (32)$$

где $U_0 = a - \sqrt{a^2 - 1}$ — решение соответствующей стационарной задачи для неразмножающей среды ($a \geq 1$), к которому стремится $U(z)$ при $z \rightarrow \infty$.

С математической точки зрения выражение (32) сохраняет силу и при $a < 1$. Но так как полубесконечная размножающая среда не допускает стационарных решений, то (32) теряет смысл. Поэтому удобнее пользоваться плотностью $u(z)$:

$$u(z) = \frac{1}{\pi} e^{-az} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \xi^2} e^{\xi z} d\xi. \quad (33)$$

6. Найдем критическую толщину размножающего плоского слоя, которая получается из условия постоянства $u(y, z)$ или $v(y, z)$ во времени, т. е. из условия равенства нулю первого (правого) корня уравнения (16): $\xi_1 = 0$.

Решая (16) относительно y , находим

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{1-(a+\xi_k)^2}} \left\{ \pi k - \text{Arctg} \frac{\sqrt{1-(a+\xi_k)^2}}{a+\xi_k} \right\} \quad (34)$$

($k=1, 2, \dots$).

При $k=1$ получим критическую толщину рассматриваемого слоя

$$y_c = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \left(\pi - \text{Arctg} \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \right), \quad (35)$$

которая совпадает с результатами [6].

В заключение выражаем благодарность проф. Ю. Л. Вартапяну за постоянное внимание и ценные замечания, а также Г. С. Аджяну, М. А. Мнацаканяну, Г. Б. Алавердяну за полезные обсуждения.

Кафедра ядерной физики

Поступила 1.11.1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Bellman R., Kalaba R., Wing G. M., J. Math. Mech., 7, 741, 1958.
2. Wing G. M., J. Math. Mech., 7, 757, 1958.
3. Енгибарян Н. Б., Астрофизика, 1, 167, 1965.
4. Минин И. Н., Астрон. ж., 48, 333, 1971.
5. Амбарцумян В. А., Научные труды, т. 1, изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1960.
6. Мнацаканян М. А., Сообщения Бюрок. обсерват., 50, 59, 1979.

Ա. Ս. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ղ. Ռ. ԿՈՒՇԱՆՅԱՆ

ՄԻԱԶԱՓ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐՈՒՄ ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ԱՆՑՄԱՆ ԵՎ ԱՆԴՐԱՐՁՄԱՆ ՈՉ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Ստացված են արտահայտություններ վերջավոր, միաչափ շերտերից անդրադարձած և անցած մասնիկների սպասվող թվերի համար մասնիկների ցրման, կլանման և բազմացման պրոցեսների հաշվառմամբ: Գրաֆիկորեն ցույց է տրված (16) բնութագրական հավասարման աջ արձատների կախվածությունը շերտի հաստությունից, որոնցով հիմնականում պայմանավորված է անցած և անդրադարձած մասնիկների սպասվող թվերի ժամանակային վարքը: Բերված են նաև համապատասխան արտահայտություններ կիսանվերջ շերտի համար: Քննարկված է բազմացնող միջավայրի կրիտիկական չափի հարցը: