СЕРГЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ АМБАРЦУМЯН

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ԴԵՖՈՐՄԱՑՎՈՂ ՊԻՆԴ ՄԱՐՄՆԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ՊՐՈԲԼԵՄՆԵՐ

Նվիրվում է ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս
Ս. Ա. Համբարձումյանի ծննդյան 95-ամյակին

ԵՐԵՎԱՆ – 2017

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCIES OF THE REPUBLIC OF ARMENIA
INSTITUTE OF MECHANICS

PROBLEMS OF MECHANICS OF DEFORMABLE SOLID BODY

Dedicated to the 95th anniversary of academician of NAS RA
SERGEY A. AMBARTSUMIAN

YEREVAN – 2017

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА

Посвящается 95-летию
академика НАН РА С.А. АМБАРЦУМЯНА

ЕРЕВАН
Издательство «Гитутюн» НАН РА
2017

Печатается по решению Учёного Совета
Института механики НАН РА

Проблемы механики деформируемого твёрдого тела. Ереван,
Издательство «Гитутюн» НАН РА. 2017, 191с.

В сборник включены работы по проблемам механики деформируемого твёрдого тела и смежным задачам.

О ВОЛНАХ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Саркисян С.В.

Key words: elastic half-space, surface wave, elastically restrained boundary

Ключевые слова: упругое полупространство, поверхностная волна, упруго-стеснённая граница

Sarkisyan S.V.

On waves in a half-space with mixed boundary conditions

Abstract. In this paper we obtained the dispersion equations of the three-dimensional wave propagation problem in a half-space with mixed boundary conditions. Three-dimensional surface wave exists only for two kinds of boundary conditions - when the surface of half-space is free from the stresses and the free surface is restrained.In the second case, three-dimensional wave has the dispersion property and the wave propagation angle affects the phase velocity.

Аннотация. В настоящей работе получены дисперсионные уравнения трёхмерной задачи о распространении волн в полупространстве со следующими граничными условиями: граница полупространства свободна от напряжений, на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений и на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений и в нормальном направлении. Трёхмерная поверхностная волна (3DSW) существует, когда поверхность полупространства свободна от напряжений и когда на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений. Во втором случае 3DSW обладает свойством дисперсии и угол распространения волны оказывает влияние на фазовую скорость.

Введение. Впервые о существовании поверхностных волн было указано Рэлеем [1], где рассмотрена задача плоской деформации для полупространства со свободной от напряжений границей. Решение трёхмерной задачи, обобщающая задачу Рэлея, получена Ноулсом [2]. Эти результаты приведены в монографии [3]. Другой вариант пространственной задачи исследован в [4]. В работе [5] исследованы трёхмерные задачи распространения упругих поверхностных волн в изотропном полупространстве с двумя вариантами условий на границе полупространства: свободная граница и когда на границе полупространства одно касательное перемещение, один из касательных напряжений и нормальное напряжение равны нулю. В монографии [6] приведён обзор по пространственным задачам распространения упругих волн. Исследование трёхмерных поверхностных волн для различных типов смешанных граничных условий на поверхности полупространства проведено в работе [7]. Показано, что дисперсионное уравнение имеет корень для двух типов граничных условий: свободная поверхность и поверхность, где запрещены перемещения в одном из касательных направлений. В работах [8-10] предложен асимптотический метод, позволяющий построить асимптотическое приближение решения, описывающего цилиндрическую поверхностную волну в случае смешанных граничных условий на поверхности полупространства.

В отличие от классической задачи Рэлея, вместо граничных условий свободной поверхности для упругого изотропного полупространства М.В.Белубекяном [11] рассмотрены два варианта усложнённых граничных условий. Предполагается, что либо нормальное напряжение стеснённо в направлении перпендикулярной к поверхности нормали, а касательное равно нулю, либо нормальное напряжение равно нулю, а касательное стеснённо. Устанавливаются условия, при которых поверхностная волна не может существовать. Пространственные задачи динамической теории упругости в результате применения интегрального преобразования Радона [12] сводятся к плоской задаче относительно образов преобразования Радона. В работе [13] исследован вопрос введения динамических потенциалов для решения трёхмерных задач динамической теории упругости, в которых не используется антиплоское движение (например, в задаче приповерхностной динамики упругого полупространства, когда вклад поверхностной волны доминирует). Применив преобразование Радона, решение трёхмерной задачи теории упругости сводится к решению соответствующей плоской задачи. Развитие асимптотических моделей поверхностной волны Рэлея, интерфейсных волн Стоунли и Шольте-Гоголадзе исследовано в работе [14]. В работе [15] исследована задача распространения волны в упругом полупространстве, когда на границе полупространства заданы условия стеснённого свободного края. Используя интегральное преобразование Радона, получено дисперсионное уравнение для определения скорости распространения поверхностной волны и проведён численный эксперимент для разных физико-механических параметров, характеризующих среду.

В настоящей работе получены дисперсионные уравнения трёхмерной задачи о распространении волн в полупространстве со следующими граничными условиями:

а) граница полупространства свободна от напряжений,

б) на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений,

в) на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений и в нормальном направлении.

Исследование задачи упрощается введением потенциальных функций по аналогу с задачами плоской деформации [5]. Трёхмерная поверхностная волна (3DSW) существует, когда поверхность полупространства свободна от напряжений и когда на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений. Во втором случае 3DSW обладает свойством дисперсии и угол распространения волны оказывает влияние на фазовую скорость.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропное упругое полупространство, которое в прямоугольной декартовой системе координат $(0xyz)$ занимает область: $\Omega\{-\infty < x < \infty, 0 \le y < \infty, -\infty < z < \infty\}$. Для уравнения распространения упругих волн в изотропной среде (уравнение Ламе)

$$(\lambda + \mu)\,\mathrm{graddiv}\,\vec{u} + \mu\Delta\vec{u} = \rho\ddot{\vec{u}} \tag{1.1}$$

введём следующее преобразование:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{1.2}$$

где $\vec{u}$ – вектор перемещения, λ, μ – параметры Ламэ, ρ – объёмная плотность.

Это преобразование такое же, что и для задачи плоской деформации в плоскости (Oxy) [1]. Преобразование (1.2) было применено в [2] для трёхмерной задачи статики пьезоактивной среды, в [5] при исследовании задачи распространения упругих поверхностных волн в изотропном полупространстве с двумя вариантами условий на границе полупространства. Подставляя (1.2) в уравнение (1.1), для потенциальных функций $\varphi(x,y,z,t)$ и $\psi(x,y,z,t)$ получим следующие уравнения:

$$c_t^2\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2},$$
$$\left(\Delta - c_t^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Delta\varphi - c_l^{-2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right) = 0 \tag{1.3}$$

При помощи (1.2) и (1.3) перемещения u, υ, w и потенциальные функции φ, ψ с учётом условий затухания $\lim\limits_{y\to\infty}\vec{u} = 0, \lim\limits_{y\to\infty}\varphi = 0, \lim\limits_{y\to\infty}\psi = 0$ определяются в виде [5]:

$$u(x,y,z,t) = -i\begin{bmatrix} Ak\cos\gamma e^{-\upsilon_1 ky} + \\ +\left(Bk\cos\gamma + Ck\sin\gamma\right)e^{-\upsilon_2 ky}\end{bmatrix}\exp i\left(\omega t - xk\cos\gamma - zk\sin\gamma\right),$$
$$\upsilon(x,y,z,t) = -k\left[A\upsilon_1 e^{-\upsilon_1 ky} + B\upsilon^{-1}{}_2 e^{-\upsilon_2 ky}\right]\exp i\left(\omega t - xk\cos\gamma - zk\sin\gamma\right),$$
$$w(x,y,z,t) = -i\begin{bmatrix} Ak\sin\gamma e^{-\upsilon_1 ky} + \\ +\left(Bk\sin\gamma - Ck\cos\gamma\right)e^{-\upsilon_2 ky}\end{bmatrix}\exp i\left(\omega t - xk\cos\gamma - zk\sin\gamma\right),$$
$$\varphi(x,y,z,t) = \left[Ae^{-\upsilon_1 ky} + Be^{-\upsilon_2 ky}\right]\exp i\left(\omega t - xk\cos\gamma - zk\sin\gamma\right),$$
$$\psi(x,y,z,t) = Ce^{-\upsilon_2 ky}\exp i\left(\omega t - xk\cos\gamma - zk\sin\gamma\right), \tag{1.4}$$

где k – волновое число, $\nu_1 = \sqrt{1-\theta\eta}$, $\nu_2 = \sqrt{1-\eta}$, $\theta = \frac{c_t^2}{c_l^2} < 1, \eta = \frac{\omega^2}{k^2 c_t^2} < 1$ – безразмерная фазовая скорость трёхмерной поверхностной волны, γ – острый угол распространения волны в плоскости $0xz$; A, B и C – произвольные постоянные.

Пусть на границе полупространства $y = 0$ заданы следующие граничные условия.

1. Граница полупространства $y = 0$ свободна от напряжений:

$$\sigma_{yy} = 0, \sigma_{yz} = 0, \sigma_{yx} = 0 \tag{1.5}$$

2. На границе полупространства $y = 0$ запрещено перемещение в одном из касательных направлений:

$$\sigma_{yy} = 0, \sigma_{yz} = 0, u = 0 \tag{1.6}$$

3. На границе полупространства $y = 0$ запрещено перемещение в одном из касательных направлений и в нормальном направлении

$$\upsilon = 0,\ u = 0,\ \sigma_{yz} = 0 \tag{1.7}$$

С использованием закона Гука и преобразования (1.2) граничные условия (1.5)-(1.7) приводятся к виду:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z}+\frac{\partial\upsilon}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\upsilon}{\partial z}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}=0,$$
$$\left(\lambda+2\mu\right)\frac{\partial\upsilon}{\partial y}+\lambda\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)=0 \tag{1.5a}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\upsilon}{\partial z}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}=0,$$
$$\left(\lambda+2\mu\right)\frac{\partial\upsilon}{\partial y}+\lambda\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)=0 \tag{1.6a}$$

$$\upsilon=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\upsilon}{\partial z}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}=0 \tag{1.7a}$$

2. Дисперсионные уравнения и численные результаты. Удовлетворяя решение (1.4) граничным условиям (1.5a),(1.6a) и (1.7a), из условия существования нетривиального решения системы однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A, B и C получаем следующие дисперсионные уравнения:

$$\left(1+\mathrm{tg}^2\gamma\right)\left(\left(2-\eta\right)^2-4\sqrt{\left(1-\eta\right)\left(1-\eta\theta\right)}\right)=0 \tag{2.1}$$

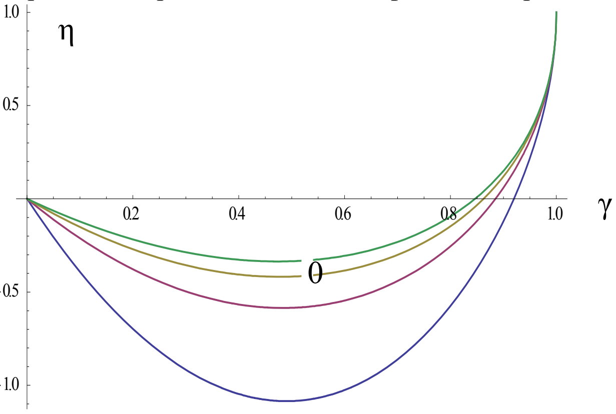
$$\left(2-\eta\right)^2-4\sqrt{\left(1-\eta\right)\left(1-\eta\theta\right)}-\eta\left(1-\eta\right)\mathrm{ctg}^2\gamma=0 \tag{2.2}$$

$$\eta\sqrt{1-\theta\eta}+\mathrm{ctg}^2\gamma\sqrt{1-\eta}\left(1-\sqrt{\left(1-\eta\right)\left(1-\theta\eta\right)}\right)=0 \tag{2.3}$$

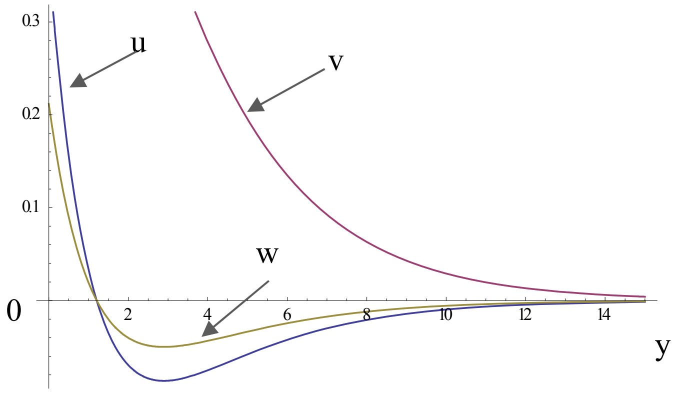
В случае, когда поверхность полупространства свободна от напряжений, получается известное уравнение Рэлея (2.1). Если же, на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений (стеснённая свободная поверхность) дисперсионное уравнения сводится к уравнению (2.2). В данном случае это уравнение имеет единственный корень $\eta<1$ и трёхмерная поверхностная волна (3DSW) обладает свойством дисперсии. На фиг. 1 представлена зависимость фазовой скорости 3DSW от угла распространения γ при θ=0.33. Когда на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений и в нормальном направлении, дисперсионное уравнение (2.3) относительно безразмерной фазовой скорости 3DSW не имеет корень, удовлетворяющий условию $\eta<1$. Как видно из фиг.1, если на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений, то с убыванием угла распространения волны γ значение фазовой скорости η 3DSW возрастает. При $\gamma=\pi/2$ значение фазовой скорости 3DSW в точности совпадает со значением фазовой скорости поверхностной волны Рэлея.

Проведены численные исследования дисперсионных уравнений (2.1) и (2.2) при разных значениях угла распространения волны γ. На фиг. 2-6 представлены результаты расчёта формы трёхмерной поверхностной волны (θ=0.33). Графики показывают, что в случае, когда на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений, угол распространения волны оказывает влияние на скорость затухания напряжённо-деформированного состояния при удалении от поверхности. При $\gamma = \pi / 2$ 3DSW в точности переходит в поверхностную волну Рэлея.

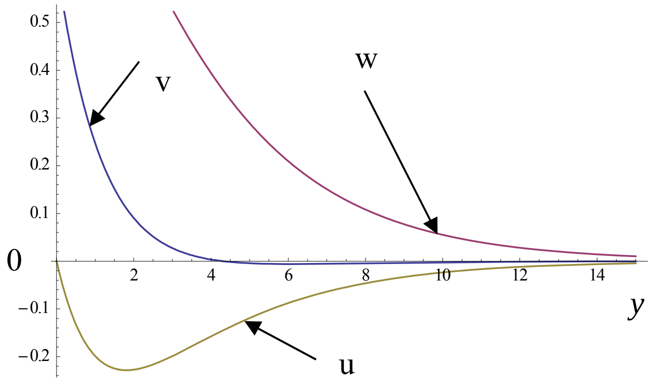
Заключение. Трёхмерная поверхностная волна (3DSW) существует лишь для двух видов граничных условий, когда поверхность полупространства свободна от напряжений и когда на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений (стеснённая свободная поверхность). В случае стеснённой свободной поверхности 3DSW обладает свойством дисперсии. Угол распространения волны оказывает влияние на фазовую скорость трёхмерной поверхностной волны. С убыванием этого угла значения фазовой скорости 3DSW возрастают, стремясь к значению фазовой скорости поверхностной волны Рэлея.



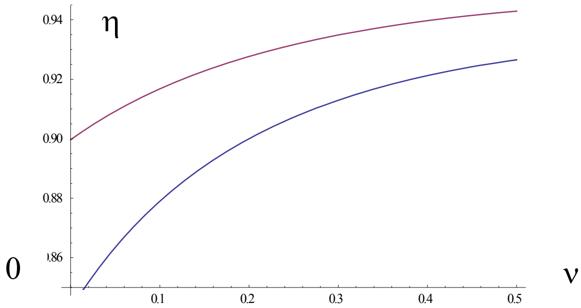
Фиг.1 График зависимости безразмерной фазовой скорости η 3DSW от угла распространения γ.



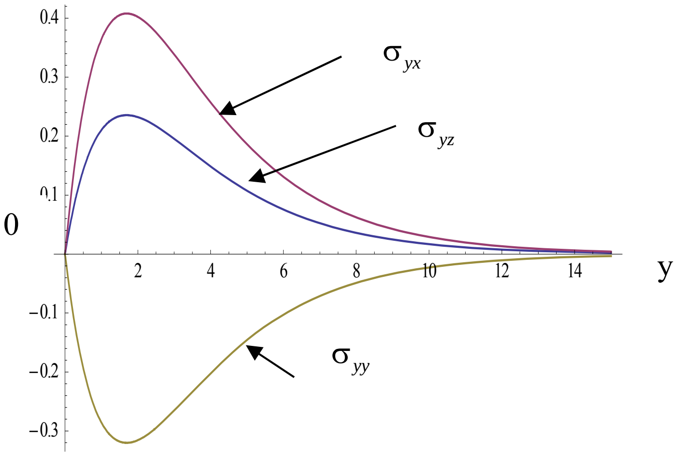
Фиг.2. График зависимости перемещений u, v, w от угла распространения $\gamma = \pi / 6$ в случае свободной границы.



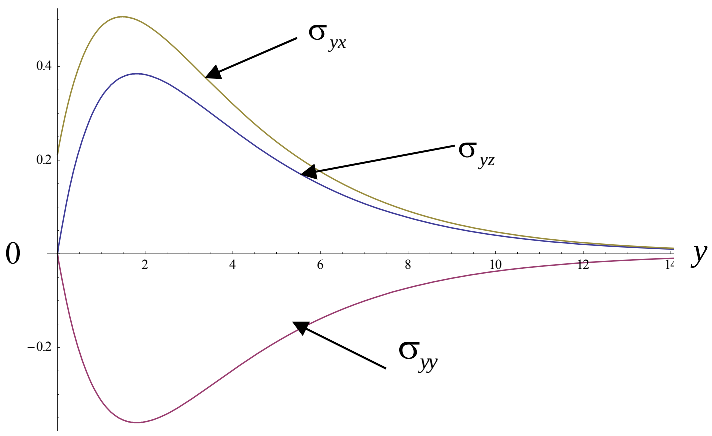
Фиг.3. График зависимости перемещений u, v, w от угла распространения $\gamma = \pi / 4$ в случае, когда на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений.



Фиг.4. График зависимости фазовой скорости от угла распространения $\gamma = \pi / 4, \ \pi / 3$ при различных значениях коэффициента Пуассона в случае, когда на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений.



Фиг.5. Форма поверхностной волны в случае свободной границы при угле распространения $\gamma = \pi / 3$.



Фиг.6. Форма поверхностной волны в случае, когда на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений при угле распространения $\gamma = \pi / 4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rayleigh J. On waves propagated along the surface of an elastic solid //Proc.Lond.Math.Soc. 1885, v.17, N253, p.4-11.
2. Knowles J. K., A note on surface waves // J. of Geophys. Res. 1966, vol. 21, № 22, p. 5480-5481.
3. Achenbach J. D., Wave propagation in elastic solids. North-Holland, 1984, 425 p.
4. Белубекян В. М. ,К задаче о поверхностных упругих волнах в толстой плите// Изд. НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. №1. С.9-15.// Belubekyan V. M., On the elastic surface waves in a thick plate // Mechanics. Proc. Nat. Acad. Sci. Arm, 1995, 48 (1), p. 9-15. (Russian).
5. Белубекян В. М., Белубекян М. В., Трехмерная задача поверхностных волн Рэлея // ДНАН Армении, 2005, т.105, № 4, с. 362-369.// Belubekyan V. M., Belubekyan M. V., Three-dimensional problem of Rayleigh wave propagation // NAS RA Repors, 2005, v. 105 (4), p. 362-369 (Russian).
6. Абрамян Б. Л. Пространственные задачи теории упругости. Ереван. Изд. НАН Армении, 1998. 275 с.// Abrahamyan B. L., Surface problems of elasticity theory. Yerevan, Academy of Sciences of Armenia, 1998. 275 p. (in Russian).
7. Ардазишвили Р. В., Трехмерная волна Рэлея в случае смешанных граничных условий на поверхности полупространстве // Сб. науч. тр. межд. конф. «Механика», посв. 70-летию основания НАН Армении, Цахкадзор, 2013, с.74-78.// Ardazishvili R.V. Three-dimensional Rayleigh wave in the case of mixed boundary conditions on the surface of half-space. Proceedings of International School-Conference of Young Scientists dedicated to the 70th of the National Academy of Sciences of Armenia «Mechanics 2013», 1-4 October, Tsakhkadzor, 2013, p. 74-78 (in Russian).
8. Vilde M.V. Higher order edge waves in a hollow cylinder with mixed boundary conditions at the end face // XI Russian conference of fundamental problems of theoretical and applied mechanics: Proceedings Kazan: Kazan federal university press, 2015. pages 752-754 (CD-ROM).

9. Ardazishvili R.V., Vilde M.V., Kossovich L.Y. Three-dimensional fundamental edge waves in thin shell // Vestnik ChSPY after I.Yakovlev. Seria: limit conditions mechanics. 2015, N4 (26) c.109-124.
10. Vilde M.V., Asymptotic approach for cylindrical surface wave in elastic half-space with mixed boundary conditions on the surface.// Works of 18th international conference, Rostov-on Don, v. 1, 2016, pages 130-134.
11. Белубекян М.В. Волна Рэлея в случае упруго–стесненной границы. //Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №4. С. 3–6. // Belubekyan M. V., The Rayleigh waves in the case of the elastically restrained boundary // Mechanics. Proc. Nat. Acad. Sci. Arm., 2011, vol. 64 (4), p. 3-6 (Russian).
12. Georgiadis H. G., Lykotrafitis G., A method based on the Radon transform for three-dimensional elastodynamic problems of moving loads // Journal of Elasticity, 2001, vol. 65. pp. 87-129.
13. Приказчиков Д.А., Коваленко Е.В. Выбор потенциалов в трехмерных задачах динамической теории упругости // Вестник МГТУ им. Баумана, Естественные науки, 2012, с. 131-137.// Prikazchikov D. A., Kovalenko E. V., Selection of potential problems in three-dimensional dynamic theory of elasticity // MSTU after Bauman, Natural Science, 2012, p. 131-137 (Russian).
14. Приказчиков Д.А. Развитие асимптотических моделей поверхностных и интер-фейсных волн // МТТ, Вест. Нижегородского унив. Им. Лобаческого, 2011, № 4 (4), с. 1713-1715.// Prikazchikov D.A., Development of asymptotic models of surface and interface waves // MTT, Nijni Novgorod University after Lobachevsky, 2011, vol. 4 (4), p. 1713-1715 (Russian).
15. Мелконян А.В., Саркисян С.В. Применение интегрального преобразования Радона в задаче о распространении волн в полупространстве// Труды межд. школы-конференции, 2013, Ереван, с. 181-184.// Melkonyan A.V., Sarkisyan S.V., Application of Radon integral transform in wave propagation problems for half-space. Proceedings of International School-Conference of Young Scientists dedicated to the 70th of the National Academy of Sciences of Armenia “Mechanics 2013”, 1-4 October, Tsakhkadzor, 2013, Yerevan, p. 181-184 (Russian).

<u>Сведения об автор</u>е:

Саркисян Самвел Владимирович – доктор физ.- мат. наук, професор, зав. кафедрой механики, факультета математики и механики ЕГУ,
(374 55) 73 13 13,6; **E-mail:** vas@ysu.am.