О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕСОМ

Айрапетян Г.М. (hhairapet@seua.am)

Государственный Инженерный Университет Армении

1. Пусть B_1 – класс гармонических функций $u(z)$ в верхней полуплоскости $G^+ = \{z;\ \operatorname{Im} z > 0\}$ удовлетворяющих для любого $y_0 > 0$, неравенству

$$|u(z)| < C \exp|z|^{\gamma}, \quad \gamma < 1,\ \operatorname{Im} z > y_0 > 0, \qquad (1)$$

где C – постоянная, не зависящая от $x = \operatorname{Re} z$, но зависящая, вообще говоря, от y_0. В данной работе рассматривается задача Дирихле в классе B_1 в следующей постановке: определить действительную гармоническую функцию $u(x,\ y) \in B_1$, так чтобы имело место граничное условие

$$\lim_{y \to +0} \| u(x,\ y) - f(x) \|_{L^1(\rho)} = 0, \qquad (2)$$

где $\rho(x)$ – измеримая неотрицательная функция на действительной оси такая, что $\rho(x) \in L^\infty(-A,\ A)$, $\rho^{-1}(x) \in L^\infty(-A,\ A)$ для любого $A > 0$.

Задачу (2) будем называть нормально разрешимой, если множество функций $f(x) \in L^1(\rho)$, для которых она имеет решение, является замкнутым подпространством в $L^1(\rho)$.. Число

$$\alpha = \sup\left\{\beta :\ \rho(x)(1 + |x|)^{\beta} \in L^\infty(-\infty;\ +\infty)\right\} < \infty, \qquad (3)$$

будем называть порядком особенности функции $\rho(x)$ в бесконечно удаленной точке. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $0 \le \alpha < \infty$.

Граничные задачи в классах аналитических функций и тесно связанная с ними теория сингулярных интегралов в весовых пространствах $L^p(d\mu)$, $(d\mu = \rho(x)dx + d\mu_s$, где $d\mu_s$ – сингулярная часть $d\mu)$, исследованы в многочисленных работах (см. [1-8]). Было установлено, что для ограниченности сингулярного оператора в пространствах $L^p(d\mu)$, $p > 1$, необходимо и достаточно, чтобы мера $d\mu$ была абсолютно непрерывной и $\rho(x)$ удовлетворяла условию Макенхаупта (см. [6]). Отметим, что если мера удовлетворяет этому условию, то функция f из класса $L^p(d\mu)$ является также абсолютно интегрируемой по мере Лебега, то есть принадлежит классу L^1. Однако граничные задачи в классах аналитических функций и, в частности, задача Дирихле, когда граничные условия понимаются в смысле средней сходимости $L^p(d\mu)$ (см. [9] – [11]) допускают такое же полное исследование в весовых пространствах при нарушении условия Мекенхаупта. Задача Дирихле в единичном круге, когда весовая функция имеет конечное число особенностей конечного порядка, исследована в [9]. Там же описаны весовые функции обеспечивающие разрешимость этой задачи для любой функции $f \in L^p(\rho(x)dx)$. Задача Дирихле для $RO-$меняющейся (опр. см. ниже) в особых точках весовой функции исследована в [11]. Задача (2) в полуплоскости в случае степенной весовой функции (вида $O\left(|x-x_0|^\alpha\right)$, где $\alpha-$неотрицательное целое число) была исследована в [12].

В настоящей работе задача (2) исследуется в предположении, что $\rho(x)-RO-$меняющаяся в бесконечно удаленной точке.

Функцию $g(x)$, определенную в $(A_0,\ \infty)$, будем называть $RO-$меняющейся в бесконечно удаленной точке слева [13], если ее можно представить в виде.

$$g(x)=\exp\left(g_1(x)+\int_{A_1}^{x}\frac{g_2(t)}{t}dt\right), \qquad x\in(A_0,\ \infty), \tag{4}$$

где $A_1 > A_0$, а $g_1(x)$ и $g_2(x)-$измеримые и ограниченные функции на $(A_0,\ \infty)$. Аналогично определяется класс функций $RO-$меняющихся в бесконечно удаленной точке справа. Если функция в бесконечно удаленной точке является $RO-$меняющейся слева и $RO-$меняющейся справа, то скажем, что функция $RO-$меняющаяся в бесконечно удаленной точке.

Функцию $\rho(x)$ отнесем к классу R, если функция

$$\rho_1(x)=\left(1+|x|\right)^\alpha\rho(x) \tag{5}$$

$RO-$меняющаяся в бесконечно удаленной точке, причем функция $g_2(x)$ из представления (4) удовлетворяет соотношениям

$$\overline{\lim}\, g_2(x)<1-\{\alpha\},\ \ |x|\to\infty,\ \ \underline{\lim}\, g_2(x)>-\{\alpha\},\ \ |x|\to\infty, \tag{6}$$

если $\alpha-$нецелое число, и

$$\overline{\lim}\, g_2(x)\le 0,\ \ |x|\to\infty,\ \ \underline{\lim}\, g_2(x)>-1,\ \ |x|\to\infty, \tag{7}$$

если $\alpha-$целое число.

2. **Лемма** 1. *Пусть $k>0-$целое число. Тогда*

$$\left|(x+iy)^k-(x-iy)^k\right|<Cy\left(y^{k-1}+|x|^{k-1}\right), \tag{8}$$

Если $|x|>2ky$, то

$$\left|(x+iy)^k-(x-iy)^k\right|>C_1y|x|^{k-1}, \tag{9}$$

где $C,\ C_1>0-$некоторые постоянные.

Доказательство. Пусть $|x|>y$. Тогда $|x+iy|<2|x|$, $|x-iy|<2|x|$ и

$$\left|(x+iy)^k-(x-iy)^k\right|<2y\sum_{j=0}^{k-1}|x+iy|^j|x-iy|^{k-j-1}<Cy|x|^{k-1}.$$

Если $|x|<y$, то $|x+iy|<2|y|$, $|x-iy|<2|y|$ и $\left|(x+iy)^k-(x-iy)^k\right|<Cy^k$ и (8) доказано. Теперь, пусть $|x|>2ky$, тогда

$$\left|(x+iy)^k-(x-iy)^k\right|=|x+iy|^k\left|1-\left(\frac{x-iy}{x+iy}\right)^k\right|=$$

$$=y|x+iy|^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1}\left|\frac{x-iy}{x+iy}\right|^j(\cos j\phi+i\sin j\phi),$$

где $\phi=2\arg(x-iy)$. Из условия $|x|>2ky$, следует, что $\cos j\varphi>0$, $j=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1$, следовательно (9) доказано.

Функцию $g(x)$ на промежутке $(a,\ b)$ будем называть почти монотонно возрастающей, если существует $A>0$ такое, что для любых $x'<x''$ из этого промежутка $g(x')<Ag(x'')$. Аналогично определяется почти монотонно убывающая функция. В следующей лемме собраны свойства функции $\rho(x)\in R$.

Лемма 2. *Пусть* $\rho(x)\in R$. *Справедливы следующие утверждения:*

А). Пусть $\alpha-$*нецелое число. Тогда существуют* $\delta_0\in(0,\ 1-\{\alpha_0\})$, $\delta_1\in(-\{\alpha_0\},\ 0)$, *такие, что для любого* $\delta>\delta_0$, *и для любого числа* A *функция* $|x+i|^\delta\rho_1(x)$ *почти монотонно возрастает в промежутке* $(A;\ \infty)$, *и почти монотонно убывает в промежутке* $(-\infty;\ A)$. *Соответственно* $|x+i|^{-\delta}\rho_1(x)$ *почти монотонно убывает на* $(A;\ \infty)$ *и почти монотонно возрастает на* $(-\infty;\ A)$ *для любого* $\delta<\delta_1$.

б). Если $\alpha-$*целое число, то для любого числа* A *функция* $|x+i|\,p_1(x)$ *почти монотонно возрастает на* $(A,\ \infty)$ *и почти монотонно убывает на* $(-\infty;\ A)$. *Функция же* $|x+i|^\delta\,p_1(x)$ *почти монотонно убывает на* $(A,\ \infty)$ *и почти монотонно возрастает на* $(-\infty;\ A)$ *для любого* $\delta<0$.

с). Для любого $\delta>0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho_1(x)dx}{(1+|x|)^{1+\delta}}<\infty. \qquad (10)$$

Доказательство. Пусть, согласно **(**6**)**, δ_0 выбрано так, чтобы имело место $\overline{\lim}g_2<\delta_0<1-\{\alpha_k\}$, $|x|\to\infty$. Тогда если $A<x'<x''$, то при $\delta>\delta_0$ из (4) имеем

$$\frac{|x'+i|^\delta\rho_1(x')}{|x''+i|^\delta\rho_1(x'')}=e^{g(x')-g(x'')}\cdot\exp\left(\int_{x'}^{x''}\frac{\delta-g_2(t)}{t}dt\right)<A\exp\left(\int_{x'}^{x''}\frac{\delta-g_2(t)}{t}dt\right).$$

Поэтому $|x'+i|^\delta\,\rho_1(x')\left(|x''+i|\rho_1(x'')\right)^{-1}<C.$

Аналогично доказываются остальные утверждения а), б) леммы. Утверждение с) непосредственно следует из определения класса R.

Лемма 3. *Пусть*

$$g(x) = \exp\left(\int_A^x \frac{g_2(t)dt}{t}\right),$$

где $g_2(x)$ *ограниченная функция на* $(A,\ \infty)$. *Тогда, если* $y \in (2^{-1}x,\ 2x)$, *то*

$$\left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| < C\left|\frac{g(x)}{x}\right|.$$

Доказательство. Из определения функции $g(x)$ имеем

$$\left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| = \left|\frac{g(x)}{x-y}\right|\left(1-\exp\left(\int_x^y \frac{g_2(t)dt}{t}\right)\right),$$

Так как $2^{-1} < yx^{-1} < 2$, то

$$\int_x^y \frac{g_2(t)dt}{t} < A\ln 2.$$

Поэтому

$$\left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| < C\left|\frac{g(x)}{x-y}\right|\left|\int_x^y \frac{g_2(t)dt}{t}\right| <$$

$$< C\left|\frac{g(x)}{x-y}\right|\left|\ln\frac{y}{x}\right| = C\left|\frac{g(x)}{x-y}\right|\left|\ln\left(1-\frac{y-x}{x}\right)\right|.$$

Используя неравенство $|y-x||x|^{-1} < 1$, завершаем доказательство леммы.

Лемма 4. *Пусть* $\rho(x) \in R$. *Тогда*

$$a)\ \sup_{t\in(-\infty,\ \infty)} \frac{|t+i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int \frac{y\rho_1(x)dx}{\left((x-t)^2+y^2\right)|x+i|^{\{\alpha_0\}}} < \infty \tag{11}$$

$$b)\ \sup_{t\in(-\infty,\ \infty)} \frac{|t+i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int \frac{y\rho_1(x)dx}{|t-x-iy||x+i|^{1+\{\alpha_0\}}} < \infty \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $t \in (0;\ \infty)$. В силу леммы 2 существует $\delta \in (0,\ 1-\{\alpha_0\})$ такое, что функция $|x+i|^{\delta}\rho_1(x)$ почти монотонно возрастает на $(0,\ \infty)$. Поэтому

$$\frac{|t+i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int_{-\infty}^{2^{-1}t} \frac{y\rho_1(x)dx}{\left((x-t)^2+y^2\right)|x+i|^{\{\alpha_0\}}} <$$

$$< C\frac{|t+i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int \frac{y|x+i|^{\delta}\rho_1(x)dx}{|t+i|^2|x+i|^{\delta+\{\alpha_0\}}} < C_1.$$

Так как $\rho(x) \in R$, то $\rho_1(x)$ представима в виде (4). Не нарушая общности, можно предположить, что $g_1(x) \equiv 0$. Применяя лемму 3 получим

$$\frac{|t+i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int_{2^{-1}t}^{2t} \frac{y\rho_1(x)dx}{\left((x-t)^2+y^2\right)|x+i|^{\{\alpha_0\}}} =$$

$$=\left|\frac{|t+i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1^{(t)}}\int\frac{y(\rho_1(x)-\rho_1(t))dx}{((x-t)^2+y^2)|x+i|^{\{\alpha_0\}}}+\int\frac{y|t+i|^{\{a_0\}}dx}{((x-t)^2+y^2)|x+i|^{\{\alpha_0\}}}\right|<$$

$$<A\left(1+\int_{2^{-1}t}^{2t}\frac{y|t+i|^{\{\alpha_0\}}|x-t|\,dx}{((x-t)^2+y^2)|x+i|^{\{\alpha_0\}}}\right)<A_1\left(1+\frac{y}{t}\ln\frac{t^2+y^2}{y^2}\right)<A_2.$$

В силу леммы 2 $\delta\in(-\{\alpha\},\ 0)$ можем подобрать так, чтобы функция $|x+i|^{-\delta}\rho_1(x)$ была почти монотонно убывающей на $(0,\ \infty)$ и поэтому

$$\frac{|t+i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)}\int_{2t}^{\infty}\frac{y\rho_1(x)dx}{((x-t)^2+y^2)|x+i|^{\{\alpha_0\}}}<$$

$$<C\int_{2t}^{\infty}\frac{y|t+i|^{\{\alpha\}-\delta}dx}{((x-t)^2+y^2)|x+i|^{\{\alpha_0\}-\delta}}<C_1.$$

Утверждение а) леммы, при $t\in(0,\ \infty)$, доказано. Аналогично устанавливаются другие утверждения.

3. Пусть $\rho'(x)=(1+|x|)^{-n_0}_{,}$ $x\in(-\infty,\ \infty)$, где $n_0=[\alpha]+1$. Если $u(x,\ y)$ удовлетворяет условию (2), то из леммы 2 следует, что

$$\lim_{y\to+0}\|u(x,\ y)-f(x)\|_{L^1(\rho')}=0, \qquad (13)$$

Поэтому $u(x,\ y)$ можно представить в виде (см. [12])

$$u(x,\ y)=u_0(x,\ y)+u_1(x,\ y), \qquad (14)$$

где

$$u_0(x,\ y)=\mathrm{Re}\sum_{p=0}^{n_0}ia_pz^p \qquad (15)$$

$$u_1(x,\ y)=\mathrm{Re}\left(\frac{(z+i)^{n_0-1}}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{(t+i)^{n_0-1}(t-z)}\right)+$$

$$+\mathrm{Re}\left(\frac{(z-i)^{n_0-1}}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{(t-i)^{n_0-1}(t-z)}\right) \qquad (16)$$

причем a_p, $p=0, 1, ..., n_0$ − произвольные действительные числа.

Скажем, что функция $\rho(x)$ удовлетворяет условию R_0, если α − нецелое число, либо α − целое число и выполняется соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho_1(x)dx}{1+|x|}<\infty, \qquad (17)$$

Теорема 1. *Пусть $\rho(x)\in R$. Справедливы следующие утверждения:*

а). Если $\rho(x)$ удовлетворяет условию R_0, то общее решение задачи (2) можно представить в виде (15).

б). Если $\rho(x)$ не удовлетворяет условию R_0, то общее решение однородной задачи (2) можно представить в виде (15), при $a_{n_0} = 0$.

Доказательство. Пусть $u(x,\ y)$ произвольное решение однородной задачи (2). Так как $\rho'(x)(\rho(x))^{-1} \in L^{\infty}(-\infty,\ \infty)$, то из (2) при $f \equiv 0$ имеем

$$\lim_{y\to+0}\|u(x,\ y)\|_{L^1(\rho')} = 0, \tag{18}$$

поэтому $u(x,\ y)$ представима в виде (18), где a_p – некоторые действительные числа. Для доказательства утверждения а) теоремы нам предстоит доказать, что функция (13) удовлетворяет однородному условию (2) для любого действительного числа a_p. Сначала предположим, что число α нецелое. Достаточно рассмотреть функцию $u(x,\ y) = \operatorname{Re} iz^{n_0-1}$. Так как в окрестности бесконечно удаленной точки $\rho_1(x) < C|x|^{\varepsilon}$, для любого $\varepsilon > 0$, то в силу леммы 1, с некоторой постоянной C_1,

$$\|u(x,\ y)\|_{L'(\rho)} < \int_{-\infty}^{\infty}\left|(x+iy)^{n_0-1} - (x-iy)^{n_0-1}\right|\rho(x)dx <$$

$$< C_1 y\left(1 + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+|x|)^{1+\{\alpha_0\}-\varepsilon}}\right),$$

Взяв $\varepsilon < \{\alpha_0\}$ получим $\lim\left\|\operatorname{Re} iz^{n_0-1}\right\|_{L^1(\rho)} = 0$ $y \to +0$. Если α_0 – целое число, $u(x,\ y) = \operatorname{Re} iz^{n_0-1}$ и имеет место условие (17), то

$$\|u(x,\ y)\|_{L^1(\rho)} < Cy\left(1 + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho_1(x)dx}{1+|x|}\right),$$

и $\|u(x,\ y)\|_{L^1(\rho)} \to 0$ при $y \to +0$.

Рассмотрим случай, когда нарушено условие (17). Тогда в силу леммы 1, при $|x| > 2n_0 y$, функция $u(x,\ y) = \operatorname{Re} iz^{n_0-1}$ удовлетворяет неравенству $u(x,\ y) > ay|x|^{n_0-2}$ и поэтому принадлежит классу $L^1(\rho)$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть $\rho(x) \in R$. Тогда задача (2) разрешима для любой функции $f(x) \in L^1(\rho)$. Общее решение можно представить в виде*

$$u(x,\ y) = u_0(x,\ y) + u_1(x,\ y), \tag{19}$$

где $u_0(x,\ y)$ – общее решение однородной задачи, а $u_1(x,\ y)$ определяется формулой (16).

Доказательство. Пусть $u(x,\ y)$ удовлетворяет условию (2). Тогда выполняется (13) и $u(x,\ y)$ представима в виде (19). Нам следует показать, что для любой функции $f \in L^1(\rho)$ функция $u(x,\ y)$ из (20) удовлетворяет условию (2). Учитывая теорему 1 достаточно установить, что функция $u_1(x,\ y)$ из (16) удовлетворяет условию 2 при любой $f\in L^1(\rho)$. Для этого предварительно докажем оценку:

$$\|u_1(x,\ y)\|_{L^1(\rho)} < A\|f\|_{L^1(\rho)}. \tag{20}$$

Заметим, что $u_1(x,\ y)=I_1(x,\ y)+I_2(x,\ y)$, где

$$I_1(x,\ y)=\frac{(z+i)^{n_0-1}}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{(t+i)^{n_0-1}(t-z)}-$$

$$-\frac{(\bar z+i)^{n_0-1}}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{(t+i)^{n_0-1}(t-\bar z)},$$

$$I_2(x,\ y)=\frac{(\bar z-i)^{n_0-1}}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{(t-i)^{n_0-1}(t-z)}-$$

$$-\frac{(z-i)^{n_0-1}}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{(t-i)^{n_0-1}(t-\bar z)},$$

Далее имеем $I_1(x,\ y)=I_1^{(1)}(x,\ y)+I_2^{(1)}(x,\ y)$, где

$$I_1^{(1)}(x,\ y)=\frac{(z+i)^{n_0-1}-(\bar z+i)^{n_0-1}}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{(t+i)^{n_0-1}(t-z)},$$

$$I_1^{(2)}(x,\ y)=\frac{(\bar z+i)^{n_0-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{(t+i)^{n_0-1}(t-x)^2+y^2}.$$

Учитывая лемму 1 получим

$$\int_{\infty}^{\infty}\left|I_1^{(1)}(x,\ y)\right|\rho(x)dx=$$

$$\sup_{g\in B_0}\left|\int_{\infty}^{\infty}\left((z+i)^{n_0-1}-(\bar z+i)^{n_0-1}\right)\int_{\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{(t+i)^{n_0-1}(t-x-iy)}g(x)dx\right|<$$

$$<C\int_{\infty}^{\infty}|f(t)|\rho(t)\frac{|t+i|^{\{\alpha\}}}{\rho_1(t)}\int\frac{y\left(y^{n_0-2}+|x|^{n_0-2}\right)|x|^{1-\{\alpha\}}\rho_1(x)}{|x+i|^{n_0}|t-x-iy|}dxdt<$$

$$<C_1\int_{\infty}^{\infty}|f(t)|\rho(t)\frac{|t+i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)}\int_{\infty}^{\infty}\frac{y\rho_1(x)}{|x+i|^{1+\{\alpha_0\}}|t-x-iy|}dxdt,$$

где $B_0=\left\{g:\|g\|_{L^\infty(\rho^{-1})}\le 1\right\}$ Отсюда, учитывая (12), получаем оценку $\left\|I_1^{(1)}(x,\ y)\right\|_{L^1(\rho)}<C\|f\|_{L^1(\rho)}$. Повторяя те же выкладки и применяя (11) получим $\left\|I_1^{(2)}(x,\ y)\right\|_{L^1(\rho)}<C\|f\|_{L^1(\rho)}$. Следовательно $\|I_1(x,\ y)\|_{L^1(\rho)}<C\|f\|_{L^1(\rho)}$. Аналогично доказывается, что $\|I_2(x,\ y)\|_{L^1(\rho)}<C\|f\|_{L^1(\rho)}$. Тем самым оценка (20) доказана. Докажем, что из (20) следует, что функция (16) удовлетворяет условию (2). Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & |x| > n, \\ f(x), & |x| < n. \end{cases}$$

Получим последовательность функций $f_n(x)$, такую, что

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{L^1(\rho)} \to 0. \qquad (21)$$

Обозначив функцию (16) при $f(x) = f_n(x)$ через $u_n(x,\ y)$, будем иметь (см. [8])

$$\lim_{y \to +0} \|u_n(x,\ y) - f_n(x)\|_{L^1(\rho)} = 0, \qquad (22)$$

Далее, используя оценку (20) получим

$$\|u(x,\ y) - f(x)\|_{L^1(\rho)} < \|u(x,\ y) - u_n(x,\ y)\|_{L^1(\rho)} + \|u_n(x,\ y) - f_n(x)\|_{L^1(\rho)} +$$
$$+ \|f_n(x) - f(x)\|_{L^1(\rho)} < C\|f_n(x) - f(x)\|_{L^1(\rho)} + \|u_n(x,\ y) - f_n(x)\|_{L^1(\rho)}.$$

Из (21) и (22) теперь следует, что $u(x,\ y)$ удовлетворяет условию (2). Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Хведелидзе Б. Б. О разрывной задачие Римана-Привалова для нескольких функций. Сообщение АН Груз. ССР, 1956, 17, 10,865-872.

[2] Rosenblum M., “Summability of Fourier series in $L_p(d\mu)$”, Trans. Amer. Math. Soc., 1962, v. 165, pp. 326 – 342.

[3] Товмасян Н. Е. О существовании и единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в классе функций, имеющих особенности на границе. Сиб. Мат. Журн., т.2,2, 1961, 25-57.

[4] Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я. Введение в теорию одномерных сингулярных операторов. Кишинев, 1973.

[5] Hunt R. A., Muckenhout B. and Wheeden R. L., “Weighted norm inequalities for the conjugate functions and Hilbert transform”, Trans. Amer. Math. Soc., 1973, v. 176, pp. 227 – 251.

[6] Хведелидзе Б.В. Методы интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной. Современные проблемы математики. Москва, 1975, 7.

[7] Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. Москва, Мир, 1979.

[8] Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. Москва, Мир, 1984.

[9] Kazarian K. S. Weighted norm inequalities for some classes of singular integrals. Studia. Math. 1987, v. 86, p. 97 – 130.

[10] Hairapetian H. M. Dirichlet problem in weighted Spaces, Izvestia NAN Armenii, Mathematika, vol. 36, 3, 2001.

[11] Айрапетян Г.М. О задаче Дирихле в полуплоскости в пространствах с весом. Известия НАН Армении, Мат., том 36, 5,2001.

[12] Айрапетян Г.М. О задаче Гильберта в смысле $L^p -$сходимости, $p > 1$. Доклады АН России. Т. 328, 4, 1993.

[13] Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. Москва, Наука, 1985.