УДК 517.9

Г.Р. ОГАНЕСЯН, Е.А. ТАРОЯН

УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Классическая теория корректности задачи Коши для строго гиперболических дифференциальных уравнений основана на методе энергетических оценок (теория Лере-Гординга). В основе вывода этих оценок лежит обобщение классической формулы энергии, которая применима для строго гиперболических уравнений, однако неприменима для слабо гиперболических уравнений. Для слабо гиперболических уравнений адиабатические инварианты дают обобщение формулы энергии, с помощью которой мы доказываем энергетические оценки. Из этих оценок можно вывести теоремы корректности задачи Коши для слабо гиперболических уравнений.

В настоящей работе мы демонстрируем применение адиабатического инварианта (см. [1]) в изучении задачи Коши для слабо гиперболического уравнения в частных производных IV порядка, имеющего вид

$$Pu=0, \quad 0<t\le T, \quad x\in R, \tag{1}$$

где

$$P=\partial_t^4-\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)\partial_t^2\partial_x^2+\omega_1^2\omega_2^2\partial_x^4+d_{30}\partial_t^3+d_{21}\partial_t^2\partial_x+$$
$$d_{12}\partial_t\partial_x^2+d_{03}\partial_x^3+d_{20}\partial_t^2+d_{11}\partial_t\partial_x+d_{02}\partial_x^2+d_{10}\partial_t+d_{01}\partial_x+d_{00},$$

все коэффициенты уравнения ω_i, d_{ij} зависят только от временной переменной t, причем функции ω_i вещественны и $\omega_i(0)=0$ $(i=1,2)$,

$$u(0,x)=u_0(x), \quad u_t(0,x)=u_1(x), \quad u_{tt}(0,x)=u_2(x), \quad u_{ttt}(0,x)=u_3(x), \tag{2}$$

где $u_i^{(\alpha-1)}\in L_2(R),\alpha,i=1,\dots,4.$

Слабая гиперболичность уравнения (1), т.е. вещественность корней его характеристического уравнения, следует из вещественности функций $\omega_{1,2}(t)$.

Определение. Задачу Коши (1), (2) назовем устойчивой с потерей гладкости, если для всех решений $u=u(t,x)$, удовлетворяющих условиям

$$\partial_t^\alpha\partial_x^\beta u\in C([0,T]\times R), \quad \left|\partial_t^\alpha\partial_x^\beta u\right|\le g(x)\in L_1(R), \quad \alpha+\beta\le 4, \tag{3}$$

имеют место энергетические оценки

$$\left\|\partial_t^{k-1}u(t,x)\right\|\le C\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{4}\left\|u_{i-1}^{(j-1)}(x)\right\|, \quad k=1,\dots,4, \tag{4}$$

где $\|f(t,x)\|=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t,x)|^2dx$ есть $L_2(R_x)$- норма функции f,C - абсолютная постоянная.

Задачу Коши назовем корректной, если ее решение класса (3) существует, единственно и выполнено условие устойчивости. Для строго гиперболических уравнений известна корректность задачи Коши в пространствах Соболева (теория Петровского-Лере [2-4]). В случае слабо гиперболических уравнений для корректности задачи Коши, кроме обычных условий гладкости коэффициентов, необходимо накладывать условия на младшие коэффициенты [5]. Для задачи (1), (2) мы находим условия для младших коэффициентов, при выполнении которых эта задача устойчива, а решение единственно.

Введем обозначения:

$$S_0 = i\omega_1,$$

$$S_1 = \frac{d_{02} + d_{12}\omega_1 + d_{21}\omega_1^2 + d_{30}\omega_1^3 - \omega_1'\left(\omega_2^2 - 5\omega_1^2\right)}{2\omega_1\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)},$$

$$S_2 = \frac{d_{02} + d_{12}\omega_1 + d_{21}S_1 - iS_0 d_{11} - d_{20}S_0^2 - \left(id_{21} + 3d_{30}S_0\right)\left(S_0S_1 + S_1'\right)}{2i\omega_1\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)} -$$

$$- \frac{6S_0S_1^2 + 6S_0\left(S_0S_1 + 2S_1S_0\right) + 4S_0S_0'' + 3S_0'^2 + \left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)\left(S_1^2 + S_1'\right)}{2i\omega_1\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)},$$

$$S_3 = -\frac{id_{01} + d_{10}S_0 + id_{11}S_1 + d_{20}\left(2S_0S_1 + S_0'\right) - d_{12}S_0 + id_{21}\left(S_1^2 - 2S_0S_2 + S_1'\right)}{2i\omega_1\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)} -$$

$$- \frac{3d_{30}S_0\left(S_1^2 + S_0S_2\right) + 3\left(S_0S_1 + S_0''\right) + 4S_0'S_1\left(S_1^2 + 3S_0S_2\right) + 4\left(S_0S_1'' + S_1S_0''\right)}{2i\omega_1\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)}$$

$$- \frac{6\left(S_0^2S_2' + 2S - 0S - 1S_1' + S_1^2S_0'\right) + S_0''' + \left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)\left(2S_1S_2 + S_2'\right)}{2i\omega_1\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)},$$

$$M_0 = -2S_0,$$

$$M_1 = \frac{d_{12} + \omega_1^2 d_{30} + 4S_0'S_0' + 2S_1\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)}{\omega_2^2 - \omega_1^2},$$

$$M_2 = \frac{d_{30}M_1S_0 + M_0' - id_{21}\left(M_1 + 2S_1\right) + id_{11} + 2S_0M_1\left(M_1 + 2S_1\right)\left(3M_0M_1 + M_0'\right)'}{\omega_2^2 - \omega_1^2} -$$

$$- \frac{6\left(S_0'M_1 + S_1'M_0\right) - 4\left(S_0M_1' + S_1M_0'\right) + \left(12S_0S_1 + 4S_0'\right)' - 2S_2\left(7\omega_1^2 + \omega_2^2\right)}{\omega_2^2 - \omega_1^2},$$

$$N_0 = i\left(\omega_1 + \omega_2\right),$$

$$N_1 = \frac{N_0N_0''\left(3M_1 + 4S_1\right) - d_{30}\omega_1 + 6S_0S_1 - 3S_0' + 8\left(S_1M_0 + S_0M_1\right) + 12S_0S_1 + id_{21}}{2\omega_1}.$$

Пусть коэффициенты уравнения удовлетворяют следующим условиям:

функции $\omega_1, \omega_2 \in C^6([0,T])$ вещественны, $\omega_{1,2}(0) = \omega_{1,2}'(0) = \omega_{1,2}''(0) = 0$, (5)

$$S_1 \in C^5([0,T]), S_2 \in C^4([0,T]), S_3, M_1, M_2, N_1 \in C^3([0,T]). \quad (6)$$

Теорема. Пусть условия (5), (6) выполнены. Тогда задача Коши (1), (2) устойчива с потерей гладкости.

Доказательство. Преобразование Фурье решения $u = u(t, x)$ обозначим через

$$\hat{u} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x)\exp(-i\lambda x)dx.$$

Функция $\hat{u} = \hat{u}(\cdot, \lambda) \in C^4([0, T])$ является решением уравнения

$$\hat{P}\hat{u} = 0, \quad 0 < t \le T, \quad -\infty < \lambda < \infty, \tag{7}$$

где

$$\hat{P} = D_t^4 + \lambda^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)D_t^2 + \lambda^4\omega_1^2\omega_2^2 + d_{30}D_t^3 + i\lambda d_{21}D_t^2 + d_{20}D_t^2 -$$
$$-\lambda^2 d_{12}D_t + i\lambda d_{11}D_t + d_{10}D_t - i\lambda^3 d_{03} - \lambda^2 d_{02} + i\lambda d_{01} + d_{00},$$

с данными Коши

$$D_t^i\hat{u}(0, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u_i(x)\exp(-i\lambda x)dx, \quad i = 0, \ldots 3.$$

Решение $\hat{u} = \hat{u}(t, \lambda)$ можно представить в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений уравнения (7). Возьмем вместо точной фундаментальной системы решений приближенные решения и представим решение $\hat{u}$ в виде

$$D_t^{k-1}\hat{u} = \sum_{i=1}^{4} u^i D_t^{k-1}\varphi_i, \quad i, k = 1, \ldots, 4, \tag{8}$$

где u^i - неизвестные функции, а функции φ_i при $|\lambda| > 1$ определим следующим образом:

$$\varphi_1 = \exp\int_0^t \left(\lambda S_0 + S_1 + \frac{S_2}{\lambda} + \frac{S_3}{\lambda^2}\right)dt, \quad \varphi_2 = \varphi_1\int_0^t \varphi_{21}dt,$$

$$\varphi_3 = \varphi_1\int_0^t \varphi_{31}dt, \quad \varphi_4 = \varphi_1\int_0^t \varphi_{41}dt,$$

где

$$\varphi_{31} = \varphi_{21}\int_0^t \varphi_{32}dt, \quad \varphi_{41} = \varphi_{21}\int_0^t \varphi_{42}dt, \quad \varphi_{42} = \varphi_{32}\int_0^t \varphi_{43}dt,$$

$$\varphi_{21} = \exp\int_0^t \left(\lambda M_0 + M_1 + \frac{M_2}{\lambda}\right)dt, \quad \varphi_{32} = \exp\int_0^t (\lambda N_0 + N_1)dt, \quad \varphi_{43} = \frac{1}{\varphi_1^4\varphi_{21}^3\varphi_{32}^2}.$$

Прямыми вычислениями получим

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = \varphi_1^4 W(\varphi_{21}, \varphi_{31}, \varphi_{41}) = \varphi_1^4\varphi_{21}^3 W(\varphi_{32}, \varphi_{42}) = \varphi_1^4\varphi_{21}^3\varphi_{32}^2\varphi_{43} = 1.$$

При $|\lambda| \le 1$ определим

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = t, \quad \varphi_3 = \frac{t^2}{2}, \quad \varphi_4 = \frac{t^3}{6}.$$

Из (8) дифференцированием получим систему уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 D_t^k\varphi_i D_t u^i = 0, \\ \sum_{i=1}^4 D_t^3\varphi_i D_t u^i = -\sum_{i=1}^4 u^i\hat{P}\varphi_i \end{cases} \quad k = 0, 1, 2,$$

откуда имеем

$$D_t u^i = -\frac{\Phi_{4i}\sum_{k=1}^4 u^k\hat{P}\varphi_k}{W(\varphi_1, \ldots, \varphi_4)} = -\Phi_{4i}\sum_{k=1}^4 u^k\hat{P}\varphi_k.$$

Умножив полученное выражение на $\bar{u}^i$ с обоих сторон и суммируя по индексу $i=1,\dots,4$, получим

$$\sum_{i=1}^{4} D_i\left|u^i\right|^2 \le C\sum_{i,k}\left|\Phi_{4i}\right|\left(\left|u^k\right|^2+\left|u^i\right|^2\right)\left|\bar{P}\varphi_k\right| =$$

$$= C\sum_{i,k}\left|\Phi_{4k}\bar{P}\varphi_i\right|\left|u^i\right|^2 + C\sum_{i,k}\left|\Phi_{4i}\bar{P}\varphi_k\right|\left|u^i\right|^2 \le C\max_{1\le i,k\le 4}\left\{\left|\Phi_{4i}\bar{P}\varphi_k\right|\right\}\sum_{i=1}^{4}\left|u^i\right|^2.$$

Обозначив $E=\sum_{i=1}^{4}\left|u^i\right|^2$ и интегрируя полученное неравенство по t, получим

$$E \le E(0,\lambda)\exp C\int_0^t \max_{1\le i,k\le 4}\left\{\left|\Phi_{4i}\bar{P}\varphi_k\right|\right\}dt.$$

Рассмотрим случай $|\lambda|>1$. Имеем

$$\Phi_{41} = W(\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4) = \varphi_1^3\begin{vmatrix}\int_0^t\varphi_{21}dt & \int_0^t\varphi_{31}dt & \int_0^t\varphi_{41}dt\\ \varphi_{21} & \varphi_{31} & \varphi_{41}\\ D_t\varphi_{21} & D_t\varphi_{31} & D_t\varphi_{41}\end{vmatrix} =$$

$$= \varphi_1^3\varphi_{21}^2\int_0^t\varphi_{21}dt\left(\varphi_{42}\int_0^t\varphi_{32}dt - \varphi_{32}\int_0^t\varphi_{42}dt\right) - \varphi_1^3\varphi_{21}^2\varphi_{42}\int_0^t\varphi_{31}dt + \varphi_1^3\varphi_{21}^2\varphi_{32}\int_0^t\varphi_{41}dt,$$

$$\Phi_{42} = \varphi_1^3\varphi_{21}^2\left(\varphi_{42}\int_0^t\varphi_{32}dt - \varphi_{32}\int_0^t\varphi_{42}dt\right),$$

$$\Phi_{43} = \varphi_1^3\varphi_{21}^2\varphi_{41},\quad \Phi_{44} = \varphi_1^3\varphi_{21}^2\varphi_{32},$$

так что $\left|\Phi_{4i}\right|\le C,\quad i=1,\dots,4$. Прямыми вычислениями также можно проверить, что $\left|\bar{P}\varphi_k\right|\le C,\quad k=1,\dots,4$. Следовательно,

$$E(t,\lambda)\le CE(0,\lambda),\quad t\in[0,T],\quad |\lambda|>1.$$

Очевидно, это неравенство выполнено также при $|\lambda|\le 1$. Из (8) также имеем

$$u^1 = \frac{W(\bar{u},\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)}{W(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)},\qquad u^2 = \frac{W(\varphi_1,\bar{u},\varphi_3,\varphi_4)}{W(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)},$$

$$u^3 = \frac{W(\varphi_1,\varphi_2,\bar{u},\varphi_4)}{W(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)},\qquad u^4 = \frac{W(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\bar{u})}{W(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)}.$$

Так как $\omega_i(0)=\omega_i'(0)=\omega_i''(0)=0,\quad i=1,2,$ то

$$E(0,\lambda) = \sum_{i=1}^{4}\left|u^i(0,\lambda)\right|^2 \le C\sum_{i=1}^{4}\left|D_t^{i-1}\bar{u}(0,\lambda)\right|^2.$$

Итак,

$$E(t,\lambda)\le C\sum_{i=1}^{4}\left|D_t^{i-1}\bar{u}(0,\lambda)\right|^2,\quad t\in[0,T],\quad \lambda\in R. \tag{9}$$

Если в качестве функций $\varphi_i, i=1,\dots,4,$ взять асимптотические решения уравнения (7) при $\lambda\to 0$ и $\lambda\to\infty$ (это можно сделать, наложив дополнительные условия на коэффициенты уравнения (1)), то величины $\left|u^i\right|^2$, $i = 1,\dots,4$, будут адиабатическими инвариантами уравнения (7) (см. [1]). Из (8) и (9) нетрудно получить следующую оценку:

$$\left|D_t^{k-1}\bar{u}\right|^2 = \left|\sum_{i=1}^{4} u^i D_t^{k-1}\varphi_i\right|^2 \le CE\sum_{i=1}^{k}\left|\lambda^{i-1}\right|^2 \le C\sum_{i=1}^{k}\left|\lambda^{i-1}\right|^2 \sum_{i=1}^{4}\left|D_t^{i-1}\bar{u}(0,\lambda)\right|^2.$$

Используя эту оценку и теорему Планшереля, получим следующие оценки:

$$\left\|u(t,x)\right\| = \left\|\bar{u}(t,\lambda)\right\| \le C\sum_{i=1}^{4}\left\|D_t^{i-1}u(0,\lambda)\right\| = C\sum_{i=1}^{4}\left\|\partial_t^{i-1}u(0,x)\right\|,$$

$$\left\|D_t u(t,x)\right\| = \left\|D_t\bar{u}(t,\lambda)\right\| \le C\sum_{i=1}^{4}\left\|D_t^{i-1}u(0,\lambda)\right\| + C\sum_{i=1}^{4}\left\|\lambda D_t^{i-1}u(0,\lambda)\right\| =$$

$$= C\sum_{i=1}^{4}\left\|\partial_t^{i-1}u(0,x)\right\| + C\sum_{i=1}^{4}\left\|u'_{i-1}(x)\right\|.$$

Окончательно получим оценки (4).

ИМ НАРА

Поступила 12.1996

ЛИТЕРАТУРА

1. Hovhannisyan G.R., Taroyan Y.A. Adiabatic invariants for N connected linear oscillators. - J. of Contemp. Math. Analysis, 1996, v. 32, № 6, pp. 47-58.
2. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. М.: Мир, 1961.
3. Лере Ж. Гиперболические дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.
4. Петровский И.Г. Системы уравнений с частными производными. М.: Наука, 1986.
5. Иврий В.Я., Петков В.М. Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрогогиперболических уравнений. - УМН, 1974, т. 29, № 5, с. 3-70.

Գ.Ռ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ, Ե.Ա. ՏԱՐՈՅԱՆ

ՉՈՐՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՀԻՊԵՐԲՈԼԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՇՈՒ ԽՆԴՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Խիստ հիպերբոլական հավասարումների համար Կոշու խնդրի կոռեկտության դասական տեսությունը հիմնված է էներգետիկ գնահատականների մեթոդի վրա (Լերե-Գորդինգի տեսություն): Այդ գնահատականների դուրս բերման հիմքում ընկած է էներգիայի դասական բանաձևի ընդհանրացումը, որը կիրառելի է խիստ հիպերբոլական հավասարումների համար, սակայն ոչ կիրառելի թույլ հիպերբոլական հավասարումների համար:

Վերջիններիս համար ադիաբատիկ ինվարիանտները տալիս են էներգիայի բանաձևի ընդհանրացում, որի օգնությամբ մենք ապացուցում ենք էներգետիկ գնահատականներ: Այդ գնահատականներից կարելի է դուրս բերել թույլ հիպերբոլական հավասարումների համար Կոշու խնդրի կոռեկտության թեորեմներ: