

Математика

УДК 517.948.25

Т. Н. АРУТՅՈՒՅԱՆ, Գ. Գ. ՏԱԱԿՅԱՆ

СУЩЕСТВОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ
 ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИРАКА

Доказывается теорема о существовании собственных значений для одной двупараметрической краевой задачи Дирака.

При исследованиях многопараметрических спектральных задач (см., напр., [1–7]) безусловно существенным является доказательство существования собственных значений для рассматриваемых задач. В данной статье приводится доказательство существования собственных значений для одной двупараметрической задачи Дирака, которое с успехом можно применить и для доказательства существования собственных значений в различных многопараметрических задачах.

Рассматривается следующая двупараметрическая задача Дирака на собственные значения:

$$\begin{cases} S \frac{dy^r(x_r)}{dx_r} + G_r(x_r)y^r(x_r) = \sum_{s=1}^2 \lambda_s A_{rs}(x_r)y^r(x_r), & 0 < x_r < \ell_r, \\ y^r(\ell_r) = \rho_r y^r(0), & r = 1, 2, \end{cases} \quad (1)$$

где ρ_r – комплексные числа, $|\rho_r| = 1$, $G_r(x_r)$, $A_{rs}(x_r)$ ($r, s = 1, 2$) – непрерывные на $[0, \ell_r]$ вещественные симметричные матрицы порядка 2×2 , λ_1, λ_2 – комплексные параметры и $y^r(x_r) = (y_1^r(x_r), y_2^r(x_r))$ – C^2 -значная искомая вектор-функция,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Приведем некоторые определения, необходимые для дальнейшего изложения.

Пусть $H = L^2[0, \ell_1] \otimes L^2[0, \ell_2]$,

$$A_0(x) = A_{11}(x_1) \otimes A_{22}(x_2) - A_{12}(x_1) \otimes A_{21}(x_2) \quad (4)$$

(по поводу тензорных произведений пространств и матриц см., напр., [1]), Δ_0 – оператор, порожденный матрицей $\Delta_0(x)$ и действующий в H по формуле $\Delta_0 h = \Delta_0(x)h(x)$.

Предположим, что имеет место условие определенности (см., напр., [4])

$$\Delta_0 \geq 0, \quad (5)$$

играющее существенную роль в многопараметрических спектральных задачах.

Определение 1. Пусть $f, g \in H$. Комплекснозначная функция $\phi(f, g)$ от двух переменных называется полуторалинейной формой, если она удовлетворяет следующим свойствам:

$$\begin{aligned} \phi(g, g_1 + g_2) &= \phi(g, g_1) + \phi(g, g_2), & \phi(g_1 + g_2, g) &= \phi(g_1, g) + \phi(g_2, g), \\ \phi(cg_1, g_2) &= c\phi(g_1, g_2), & \phi(g_1, cg_2) &= \bar{c}\phi(g_1, g_2) \end{aligned}$$

для любых $g, g_1, g_2 \in H$ и $c \in \mathbb{C}$.

Определение 2. Полуторалинейная форма $\phi(f, g)$ называется эрмитовой формой, если $\phi(f, g) = \overline{\phi(g, f)}$ для любых $f, g \in H$.

В частности, трехзначная форма $\phi = (\phi_0, \phi_1, \phi_2)$ называется эрмитовой, если каждая из полуторалинейных форм ϕ_k ($k = 0, 1, 2$) является эрмитовой.

Определение 3. Вектор h из H называется собственным вектором трехзначной эрмитовой формы ϕ , соответствующим собственному значению $\lambda = (1, \lambda_1, \lambda_2)$, если для любого h' из H имеет место равенство

$$\phi(h, h') = (\phi_0(h, h'), \lambda_1 \phi_1(h, h'), \lambda_2 \phi_2(h, h')) = (1, \lambda_1, \lambda_2) \phi_0(h, h').$$

Определение 4. Если для данного $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ система (1) имеет решение $(y^1(x_1, \lambda), y^2(x_2, \lambda)) \neq (0, 0)$, удовлетворяющее условиям (2), то λ называется собственным значением, а тензор $y^1(x_1, \lambda) \otimes y^2(x_2, \lambda)$ – собственной функцией задачи (1)–(2), соответствующей собственному значению λ .

Запишем рассматриваемую задачу Дирака в виде

$$D_r y^r = (\lambda_1 A_{r1} + \lambda_2 A_{r2}) y^r, \quad y^r(l_r) = \rho_r y^r(0), \quad (6)$$

где

$$D_r = S \frac{d}{dx_r} + G_r, \quad r = 1, 2. \quad (7)$$

Область определения $D(D_r)$ оператора Дирака D_r состоит из вектор-функций $y^r(x_r) = (y_1^r(x_r), y_2^r(x_r))$, удовлетворяющих условиям:

$$1. \quad y^r(x_r) \in AC[0, \ell_r] \subset L^2[0, \ell_r].$$

$$2. \quad D_r y^r \equiv S \frac{dy^r}{dx_r} + G_r(x_r) y^r \in L^2[0, \ell_r], \quad r = 1, 2. \quad (8)$$

3. $y^r(x_r)$ удовлетворяет граничным условиям (2).

Определенные таким образом операторы D_r с областями определения $D(D_r)$, всюду плотными в пространствах $H_r = L^2[0, \ell_r]$, являются самосопряженными и имеют компактные резольвенты [9, 10], причем, не нарушая общности рассуждений, можно предположить, что $0 \in \rho(D_r)$ (резольвентное множество оператора D_r). Известно также (см., напр., [10]), что собственные значения операторов D_r образуют неограниченные ни снизу, ни сверху последовательности t_k^r ($k \in \mathbb{Z}$), причем $t_k^r \rightarrow \pm\infty$ при $k \rightarrow \pm\infty$ ($r=1,2$). Для каждого самосопряженного оператора D_r пронумеруем собственные значения в порядке возрастания их модулей:

$$|t_1^r| \leq |t_2^r| \leq \dots, \quad r=1,2.$$

Пусть H_{nr} – подпространства в H_r , натянутые на собственные функции оператора D_r , соответствующие собственным значениям $t_1^r, t_2^r, \dots, t_n^r$ ($r=1,2$), а P_{nr} – операторы проектирования пространства H_r на подпространства H_{nr} ($H_{nr} = P_{nr}H_r$). Положим $X_n = H_{n1} \otimes H_{n2}$, $H = H_1 \otimes H_2$, $n=1,2$. Заметим, что каждое X_n конечномерно ($\dim X_n = \dim H_{n1} \dim H_{n2} = n^2$) и $\dim X_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $v_{rn}(x_r)$ ($n=1,2,\dots$) есть нормированные собственные функции оператора D_r ($r=1,2$), пронумерованные в соответствии с вышеизложенной нумерацией собственных значений. Теоремы о полноте и разложении по собственным функциям самосопряженного оператора (в нашем случае D_r , $r=1,2$) утверждают, что если $f_r \in L^2[0, \ell_r]$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (f_r, v_{rn})v_{rn}$ – ряд Фурье функции f_r по системе $\{v_{rn}(x_r)\}_{n=1}^{\infty}$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\left\| f_r - \sum_{r=1}^n (f_r, v_{rn})v_{rn} \right\|_{L^2} = \|f_r - P_{nr}f_r\|_{L^2} \rightarrow 0. \quad (9)$$

Пусть $h = h_1 \otimes h_2$, $h' = h'_1 \otimes h'_2$, $h_r, h'_r \in D(D_r)$. Определим на $(D(D_1) \otimes D(D_2)) \times (D(D_1) \otimes D(D_2))$ трехзначную форму $\phi = (\phi_0, \phi_1, \phi_2)$, где

$$\begin{aligned} \phi_0(h, h') &= \det \begin{vmatrix} (A_{11}h_1, h'_1)_1 & (A_{12}h_1, h'_1)_1 \\ (A_{21}h_2, h'_2)_2 & (A_{22}h_2, h'_2)_2 \end{vmatrix}, \quad \phi_1(h, h') = -\det \begin{vmatrix} (A_{12}h_1, h'_1)_1 & (D_1h_1, h'_1)_1 \\ (A_{22}h_2, h'_2)_2 & (D_2h_2, h'_2)_2 \end{vmatrix}, \\ \phi_2(h, h') &= \det \begin{vmatrix} (A_{11}h_1, h'_1)_1 & (D_1h_1, h'_1)_1 \\ (A_{21}h_2, h'_2)_2 & (D_2h_2, h'_2)_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

(здесь $(\cdot, \cdot)_r$ означает скалярное произведение в пространстве H_r ($r=1,2$)).

Так как операторы D_r линейные и самосопряженные, а матрицы A_{rs} ($r, s = 1, 2$) симметричные, то каждая из форм ϕ_k ($k = 0, 1, 2$) будет эрмитовой. Следовательно, эрмитовой будет и форма ϕ . Заметим, что $\phi_0(h, h') = (\Delta_0 h, h')$, и в силу условия определенности (5) ϕ_0 будет положительно определена в H .

Если в определении ϕ положить $h_r, h'_r \in H_{nr}$ и заменить $A_{rs} h_r$ на $P_{nr} A_{rs} h_r$, то таким образом мы определим форму $\phi^{(n)}$ на $X_n \times X_n$.

Так как ϕ_0 положительно определена в H , то $\phi_0^{(n)}$ будет положительно определена в X_n .

Следующая теорема, по существу доказанная П. Брауном [6], выражает связь между собственными значениями и векторами формы ϕ и собственными значениями и векторами рассматриваемой задачи (1)–(2).

Теорема 1. Если $h = h_1 \otimes h_2$ – собственный вектор задачи (1)–(2) (соответственно ϕ), соответствующий собственному значению (λ_1, λ_2) (соответственно $(1, \lambda_1, \lambda_2)$), тогда он является собственным вектором ϕ (соответственно задачи (1)–(2)) с собственным значением $(1, \lambda_1, \lambda_2)$ (соответственно (λ_1, λ_2)).

Заметим, что согласно теореме 1 собственные векторы и собственные значения формы $\phi^{(n)}$ в пространстве X_n соответствуют собственным векторам и собственным значениям задачи (1)–(2), рассматриваемой в пространстве X_n .

С другой стороны, применительно к нашему случаю имеет место (см. [1], теорема 7.9.1)

Теорема 2. Если Δ_0 – оператор положительного типа в пространстве X_n , то для каждого $\phi^{(n)}$ существует множество разложимых тензоров $h_n^{(m)} = h_{1n}^{(m)} \otimes h_{2n}^{(m)}$ ($m = 1, 2, \dots, n^2$) из X_n , которые являются собственными векторами $\phi^{(n)}$, образующими базис X_n , ортогональными относительно $\phi_0^{(n)}$ и нормированными в смысле

$$\phi_0^{(n)}(h_n^{(m)}, h_n^{(m)}) = 1, \quad m = 1, 2, \dots, n^2.$$

Далее, воспользуемся известной (см. [1]) процедурой построения собственных значений, используемой в многопараметрических задачах.

Пусть $(1, \lambda_{1n}^{(m)}, \lambda_{2n}^{(m)})$ ($m = 1, 2, \dots, n^2$) – собственные значения $\phi^{(n)}$, повторяющиеся с учетом кратности. Для каждого n упорядочим пары $(\lambda_{1n}^{(m)}, \lambda_{2n}^{(m)})$ так, чтобы суммы

$$\sum_{s=1}^2 |\lambda_{sn}^{(m)}|^2 \tag{11}$$

не убывали по m при фиксированном значении n , а в случае, если они совпадут для двух или более различных собственных значений, расположим их лексикографически, т. е. по возрастанию чисел sn , составленных из номеров s и n .

Рассмотрим вопрос сходимости для последовательности

$$\lambda_n^{(m)} = \{\lambda_{1n}^{(m)}, \lambda_{2n}^{(m)}\} \quad (12)$$

при $n \rightarrow \infty$ для каждого фиксированного m .

Пусть $m = 1$. Если последовательность $\{\lambda_{1n}^{(1)}, \lambda_{2n}^{(1)}\}$ ограничена (т.е. для всех n величины (11) ограничены), то из нее извлечем сходящуюся подпоследовательность; если она не ограничена (одна или обе компоненты (12) стремятся к ∞), тогда мы можем выбрать подпоследовательность, стремящуюся к ∞ . Таким образом мы можем выбрать последовательность номеров n , $n_{11} < n_{12} < \dots$ так, чтобы при $m = 1$ соответствующая подпоследовательность последовательности (12) сходилась или стремилась к ∞ . Далее, из n_{11}, n_{12}, \dots выберем подпоследовательность $n_{21} < n_{22} < \dots$ так, чтобы вышеизложенное было бы верно для (12) и при $m = 2$. Продолжим этот процесс. Тогда диагональная последовательность n_{11}, n_{22}, \dots будет обладать следующим свойством: для каждого m соответствующие подпоследовательности последовательностей (12) будут сходиться или стремиться к ∞ .

Возможны два случая: либо когда n пробегает указанную выше диагональную последовательность для каждого m , соответствующие подпоследовательности последовательности (12) сходятся, либо найдется такое m_0 , что при $m > m_0$ последовательность (12) стремится к ∞ в силу способа нумерации собственных значений. Чтобы не загромождать статью формулами, будем считать, что в первом случае при каждом m сама последовательность (12) сходится к конечному пределу, который будем называть *предельным собственным значением*.

Для доказательства существования собственных значений нам понадобится (см. [8])

Теорема 3. Если оператор Δ_0 удовлетворяет условию $(\Delta_0 h, h) \geq \gamma \|h\|^2$ (для любого элемента $h \in H$) и для какого-то m существует предельное собственное значение, то оно является собственным значением задачи (1)–(2).

Имеет место

Теорема 4. При выполнении условия $(\Delta_0 h, h) \geq \gamma \|h\|^2$, $\gamma > 0$ (для любого элемента $h \in H$), задача (1)–(2) имеет по крайней мере одно собственное значение.

Доказательство. Пусть $P_n = P_{n1} \otimes P_{n2}$, $f^n = P_{n1} f_1 \otimes P_{n2} f_2$. Тогда ясно, что $f^n \in X_n$. Покажем, что если $f_m \rightarrow f_r$ в H_r при $n \rightarrow \infty$, то $P_{rn} f_m \rightarrow f_r$.

Действительно, имеем

$$P_{rn}f_{rn} - f_r = (P_{rn}f_r - f_r) + P_{rn}(f_{rn} - f_r).$$

Первое выражение справа стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, так как согласно (9) $P_{rn}f_r \rightarrow f_r$ при $n \rightarrow \infty$. Второе слагаемое также стремится к нулю, так как $f_{rn} \rightarrow f_r$ и $\|P_{rn}\|=1$. Следовательно, $P_{rn}f_{rn} \rightarrow f_r$ по норме пространства H_r . Отсюда вытекает, что при $n \rightarrow \infty$

$$f^n \rightarrow f. \quad (13)$$

Докажем, что если $f^n \rightarrow f$ в H , то

$$\phi_0^{(n)}(f^n, f^n) \rightarrow \phi_0(f, f). \quad (14)$$

Действительно, пусть $f^n = f_1^n \otimes f_2^n$, $f = f^1 \otimes f^2$. Тогда имеем

$$\phi_0^{(n)}(f^n, f^n) = \det \begin{vmatrix} (P_{n1}A_{11}f_1^n, f_1^n) & (P_{n1}A_{12}f_1^n, f_1^n) \\ (P_{n2}A_{21}f_2^n, f_2^n) & (P_{n2}A_{22}f_2^n, f_2^n) \end{vmatrix}.$$

В силу соотношения (14) каждая из компонент определителя $(P_{nr}A_{rs}f_r^n, f_r^n)$ будет стремиться к $(A_{rs}f^r, f^r)$ при $n \rightarrow \infty$, откуда и следует требуемая сходимость.

Пусть теперь $f = f_1 \otimes f_2$ — некоторый ненулевой элемент из H , $\phi_0(f, f) = a$, $f^n = P_{n1}f_1 \otimes P_{n2}f_2$. Тогда ясно, что $f^n \in X_n$. Так как $f^n \rightarrow f$ и $f \neq 0$, то найдется такое n_1 , что для $n > n_1$ будем иметь $f^n \neq 0$. Предположим, что $\phi_0^{(n)}(f^n, f^n) = a_n$. Так как $\phi_0^{(n)}(f^n, f^n) \rightarrow \phi_0(f, f)$ и $\phi_0(f, f) = (A_0f, f) \neq 0$, то $a_n \neq 0$ для $n > n_1$. Предположим теперь, что ни для какого m не существует предельного собственного значения, т.е. последовательности $\lambda_{sn}^{(m)}$ для любого m стремятся к бесконечности. Зафиксируем $m=1$ и для заданного достаточно большого M найдем такой номер n_0 , что при $n > n_0$ $\max(|\lambda_{1n}^{(1)}|, |\lambda_{2n}^{(1)}|) > M$.

В силу принципа упорядоченности пар $(\lambda_{2n}^{(m)}, \lambda_{1n}^{(m)})$ указанное выше неравенство будет справедливым и для всех пар $(\lambda_{2n}^{(m)}, \lambda_{1n}^{(m)})$ при $n > n_0$, т.е.

$$\max(|\lambda_{1n}^{(m)}|, |\lambda_{2n}^{(m)}|) > M \quad (15)$$

при $n > n_0$. Возьмем теперь $\bar{n} = \max(n_0, n_1) + 1$.

Выберем на плоскости некоторую конечную область S , содержащуюся в квадрате $|\lambda_1| \leq M$, $|\lambda_2| \leq M$.

Известно (см. [10], теорема 7.9.2), что если $\{u_{nm}\} - \phi_0^{(n)}$ — ортонормированная система собственных функций $\phi^{(n)}$, то имеет место равенство

Парсевала

$$\phi_0^{(n)}(f^n, f^n) = \sum_m |\phi_0^{(n)}(f^n, u_{nm})|^2 \quad (16)$$

для любого $f^n \in X_n$. Разделим сумму в правой части (16) на две суммы соответственно тому, попадут ли собственные значения в область S или нет:

$$\sum_m |\phi_0^{(n)}(f^n, u_{nm})|^2 = \sum_{\lambda \in S} |\phi_0^{(n)}(f^n, u_{nm})|^2 + \sum_{\lambda \notin S} |\phi_0^{(n)}(f^n, u_{nm})|^2. \quad (17)$$

Первая сумма в правой части будет пуста, так как для выбранного \tilde{n} все точки $(\lambda_{1n}^{(m)}, \lambda_{2n}^{(m)})$ в силу соотношения (15) окажутся вне области S . Согласно проведенным выше рассуждениям, вторую сумму можно сделать достаточно малой при достаточно большом M . Тогда мы получим, что

$$a_n = \phi_0^{(n)}(f^n, f^n) = \sum_m |\phi_0^{(n)}(f^n, u_{nm})|^2 < \delta_n,$$

где $\delta_n \rightarrow 0$. Полученное неравенство содержит противоречие, т.к. $a_n \rightarrow a \neq 0$, что и доказывает существование какого-то предельного собственного значения. Согласно теореме 3, это предельное собственное значение будет являться собственным значением задачи (1)–(2).

Теорема 4 доказана.

Авторы выражают благодарность профессору И.Г. Хачатряну, обратившему внимание на актуальность рассматриваемой проблемы, за ценные указания в процессе ее решения.

ЕГУ, АргУ

Поступила 31.05.2005

ЛИТЕРАТУРА

1. Atkinson F.V. Multiparameter Eigenvalue Problems. V.1. New York and London: Academic Press, 1972.
2. Faierman – J. Diff. Eq., 1969, v. 5, p. 197–213.
3. Sleeman B.D. Some aspects of Multi-parameter spectral theory. Scotland: Dep. Math. Univ. 1970, p. 81–94.
4. Sleeman B.D. – Bull. Inst. Poli. Jazzy, 1971, v. 17, № 21, p. 51–60.
5. Browne P.J. – J. Math. Anal. and Applications, 1972, v. 38, p. 553–568.
6. Browne P.J. – J. Math. Anal. and Appl., 1977, v. 60, p. 259–273.
7. Browne P.J. – Lect. Notes Math., 1982, v. 964, p. 95–109.
8. Sleeman B.D. – J. Math. Anal. and Appl., 1978, v. 65, p. 511–530.
9. Костюченко А.Г., Саргсян И.С. Распределение собственных значений. М.: Наука, 1979.
10. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.

Տ. Ն. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Գ. Հ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ՍԵՓԱԿԱՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ԳՈՅՈՒԹՅՈՒՆԸ ԴԻՐԱԿԻ ՄԻ
ԵՐԿՊԱՐԱՄԵՏՐԱՆՈՑ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Աշխատանքում ապացուցվում է սեփական արժեքների գոյության
թեորեմը Դիրակի մի երկպարամետրանոց եզրային խնդրի համար:

T. N. HARUTUNYAN, G. H. SAHAKYAN

THE EXISTENCE OF THE EIGENVALUES FOR DIRAC'S TWO-
PARAMETER BOUNDARY-VALUE PROBLEM

Summary

The existence of eigenvalues for Dirac's two-parameter boundary-value
problem is proved.