ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1.1996 Естественные науки

Математика

УДК 518. 9

М.С. ГАБРИЕЛЯН, В.Р. БАРСЕГЯН, Т.А. СИМОНЯН

ОБ УКЛОНЕНИИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ m ЦЕЛЕВЫХ МНОЖЕСТВАХ

Рассматривается стохастическая линейная дифференциальная игра уклонения от m целевых множеств в классе частично-программных стратегий. Второй игрок строит свою стратегию, отслеживая поводырь, построенный при помощи λ-функции при самом упорном сопротивлении со стороны первого игрока. Получена оценка, позволяющая определить величину расстояния фазового состояния системы от поводыря в любой момент времени.

1. Постановка задачи. Пусть движение конфликтно-управляемой системы описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)\mathrm{v}, \tag{1.1}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ $(t \geq t_0)$ - непрерывные матрицы-функции с соответствующими размерностями $(n\times n)$, $(n\times p)$ и $(n\times q)$ при $t\in[t_0,\infty)$. Управления u и v выбираются из компактных множеств P и Q:

$$u\in P\subset R^p;\ \ \mathrm{v}\in Q\subset R^q \tag{1.2}$$

Пусть заданы моменты времени $t_0=\vartheta_0<\vartheta_1<\cdots<\vartheta_m=\theta$.

В R^n заданы выпуклые, замкнутые и ограниченные множества $M_k\,(k=1,\cdots,m)$.

Пусть (t_0,x_0) - исходная позиция системы (1.1), где $x_0=x(t_0)$, а Δ_r есть разбиение полуоси $t_0\leq t<\infty$ узлами $\tau_1^{(r)},\tau_2^{(r)},\cdots$ с диаметром $\delta_r=\sup\limits_i\left(\tau_{i+1}^{(r)}-\tau_i^{(r)}\right)$.

Предполагается, что при любом r (т.е. разбиении Δ_r) моменты времени ϑ_k $(k=1,\cdots,m)$ являются узлами разбиения, т.е.

$$\tau_{i_0}^{(r)}=t_0=\vartheta_0,\ \ \tau_{i_1}^{(r)}=\vartheta_1,\cdots,\tau_{i_m}^{(r)}=\vartheta_m=\theta. \tag{1.3}$$

Рассмотрим дифференциальную игру уклонения от множеств M_k $(k=1,\cdots,m)$ при условиях (1.1)-(1.2), в которых управления u и v в любой момент времени являются случайными функциями от элементарных событий $\omega_i=\{\xi_1,\cdots,\xi_i\}$ из вероятностного пространства $\{\Omega_i,B_i,P_i\}$, которое строится по схеме, описанной в [1] (стр. 291).

Рассмотрим полуинтервал $\left[\tau_i^{(r)},\tau_{i+1}^{(r)}\right)\subset\left[\vartheta_{k-1},\vartheta_k\right), i_{k-1}\le i\le i_k \ (k=1,\cdots,m)$.

Определение 1.1. Стохастическим частично-программным управлением на полуинтервале $\left[\tau_i^{(r)},\tau_{i+1}^{(r)}\right)$ первого игрока назовем измеримое отображение вида

$$u_i:\left[\tau_i^{(r)},\tau_{i+1}^{(r)}\right)\times\Omega_i\times R^n\to P\subset R^p. \tag{1.4}$$

Аналогичным образом определяется стохастическое частично-программное управление на полуинтервале $\left[\tau_i^{(r)},\tau_{i+1}^{(r)}\right)$ второго игрока

$$\mathrm{v}_i:\left[\tau_i^{(r)},\tau_{i+1}^{(r)}\right)\times\Omega_i\times R^n\to Q\subset R^q. \tag{1.5}$$

Определим на полуинтервале $\left[\tau_i^{(r)},\tau_{i+1}^{(r)}\right)$ случайное движение

$$\begin{gathered}x\left[\tau_i^{(r)}[\cdot]\tau_{i+1}^{(r)};\ \cdot\ ;x\left[\tau_i^{(r)}\right]\right]=x\left[\cdot;\tau_i^{(r)};x\left[\tau_i^{(r)}\right];u_i(\cdot);\mathrm{v}_i(\cdot)\right]=\\ =\left\{x\left(t,\omega_i,x\left[\tau_i^{(r)}\right]\right)=x(\cdot);\tau_i^{(r)};x\left[\tau_i^{(r)}\right],u_i(\cdot)\mathrm{v}_i(\cdot),\right.\\ \left.\vartheta_{k-1}\le\tau_i^{(r)}\le t<\tau_{i+1}^{(r)}<\vartheta_k,\ \omega_i\in\Omega_i\right\}\end{gathered} \tag{1.6}$$

как решение стохастического уравнения

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u_i\left(t,\xi_1,\cdots,\xi_i,x\left[\tau_i^{(r)}\right]\right)+C(t)\mathrm{v}_i\left(t,\xi_1,\cdots,\xi_i,x\left[\tau_i^{(r)}\right]\right) \tag{1.7}$$

при частично-программных управлениях $u_i(\cdot)$ и $\mathrm{v}_i(\cdot)$ и начальной позиции $\left(\tau_i^{(r)},x\left[\tau_i^{(r)}\right]\right)$.

Определение 1.2. Измеримая по t,ω функция $u\left(t,\omega,x\left[\tau_i^{(r)}\right]\right)$ называется неупреждающей, если при почти всех $\omega_i\in\Omega_i$ выполняется

$$u\left(t,\omega,x\left[\tau_i^{(r)}\right]\right)=u\left(t,\xi_1,\cdots,\xi_i,x\left[\tau_i^{(r)}\right]\right),\ \tau_i^{(r)}\le t<\tau_{i+1}^{(r)}. \tag{1.8}$$

Аналогичным образом определяется неупреждающая функция

$$\mathrm{v}\left(t,\omega,x\left[\tau_i^{(r)}\right]\right)=\mathrm{v}\left(t,\xi_1,\cdots,\xi_i,x\left[\tau_i^{(r)}\right]\right),\ \tau_i^{(r)}\le t<\tau_{i+1}^{(r)}. \tag{1.9}$$

Определение 1.3. Стохастическим частично-программным управлением на интервале времени $[t_*,t)$ первого игрока назовем неупреждающее отображение вида

$$u:[t_*,t)\times\Omega\times R^n\to P\subset R^p. \tag{1.10}$$

Аналогичным образом определяется стохастическое частично-программное управление на $[t_*,t)$ второго игрока как неупреждающее отображение вида

$$\mathrm{v}:[t_*,t)\times\Omega\times R^n\to Q\subset R^q. \tag{1.11}$$

Таким образом, управляющие воздействия первого и второго игрока, которые являются кусочно-постоянными функциями, допустимы для любого промежутка $[t_*,\theta]$ и имеют вид

$$u(\cdot)=\left\{u_i(\cdot)\quad \text{при}\quad t\in\left[\tau_i^{(r)},\tau_{i+1}^{(r)}\right)\right\},$$
$$\mathrm{v}(\cdot)=\left\{\mathrm{v}_i(\cdot)\quad \text{при}\quad t\in\left[\tau_i^{(r)},\tau_{i+1}^{(r)}\right)\right\}. \tag{1.12}$$

Под случайным движением на $[t_*,\theta]$ понимается решение следующего уравнения:

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u(\cdot)+C(t)\mathrm{v}(\cdot). \tag{1.13}$$

Наряду с движением исходной системы (1.1) рассмотрим движение точки (поводырь) $w(t)$, которое формируется так, чтобы в процессе игры они взаимно отслеживались [2]. Динамика поводыря определяется следующим уравнением:

$$\dot{w}=A(t)w+B(t)u+C(t)\mathrm{v}. \tag{1.14}$$

Построим функцию Ляпунова и определим управляющее воздействие второго игрока, обеспечивающее соответствующие уклонения.

Пусть выполнены следующие условия [3].

Условие 1.1. При всех $t\in\left[t_0,\tau_i^{(r)}\right)$ и $\tau_i^{(r)}\in[t_0,\vartheta_k]$ функции

$$\chi_k(t,\vartheta_k,l)=-\left[\int_t^{\eta_i}\min_{u\in P}l'\left(\tau_i^{(r)},\tau\right)B(\tau)u\,d\tau+\right.$$
$$\left.+\int_t^{\eta_i}\max_{\mathrm{v}\in Q}l'X\left(\tau_i^{(r)},\tau\right)C(\tau)\mathrm{v}\,d\tau+\min_{-p\in M_k(\eta_i)}l'p\right] \tag{1.15}$$

выпуклы по l, $k=1,\cdots,m$. (Числа η_i - определим ниже).

Условие 1.2. Для всякого вектора $u\in\tilde{P}=\mathrm{co}\{u:u\in P\}$ найдется вектор $\mathrm{v}\in\tilde{Q}=\mathrm{co}\{\mathrm{v}:\mathrm{v}\in Q\}$ такой, что для всех $t(t_0\le t\le\vartheta_m)$ и для всех векторов l будет справедливо неравенство

$$l'\left(B(t)u+C(t)\mathrm{v}\right)\ge\min_{u\in P}l'B(t)u+\max_{\mathrm{v}\in Q}l'C(t)\mathrm{v}. \tag{1.16}$$

Построим функцию Ляпунова

$$\lambda(t,w)=\sum_{j=k}^{m}\int_t^{\vartheta_j-\mu}\frac{d\tau}{\mathcal{E}_j^{(0)}(t,w,\tau)},$$
$$\left(\vartheta_i-\mu\le t\le\vartheta_k-\mu,\ \vartheta_0=t_0\right). \tag{1.17}$$

Здесь функции $\mathcal{E}_j^{(0)}(t,w,\vartheta_j)$ определяются выражением

$$\mathcal{E}_j^{(0)}(t,w,\vartheta_j)=\max_{\|l_j\|\le1}\left[l_j'X[\vartheta_j,t]w-\chi_j(t,\vartheta_j,l_j)\right]. \tag{1.18}$$

Единственность вектора $l_j^{(0)}$, максимизирующего (1.18), следует из условия 1.2, где $\mu > 0$ - сколь угодно малое число. Из вида функции $\lambda(t,w)$ (1.17) следует, что область G определения этой функции следующая:

$$\min_{\eta_j} \mathcal{E}_j^{(0)}(t,w,\tau) = C > 0, \quad j = 1,\cdots,m. \tag{1.19}$$

η_j является решением (1.17) [2].

Область G открыта, и при стремлении точки $(t, w(t))$ к границе этой области функция $\lambda(t,w)$ неограниченно возрастает. Область G не пересекается с множествами $\{(t,w): w \in M_k,\ t \in [t_0, \vartheta_i - \mu]\}$. Если удастся выбором стратегии второго игрока не допустить возрастания функции $\lambda(t, w(t))$, то этим будет обеспечено условие $\{t, w(t)\} \in G$, что и осуществит соответствующие уклонения до моментов ϑ_k.

Определим стратегию второго игрока на поводыре из условия

$$\left\{ \sum_{j=k}^{m} \int_{t}^{\vartheta_j - \mu} \frac{d\tau}{\left[\mathcal{E}_j^{(0)}(t,w,\tau)\right]^2} l_j^{(0)'} X(\tau,t) \right\} C(t) V_e[t,w] =$$
$$= \max_{v \in Q} \left\{ \sum_{j=k}^{m} \int_{t}^{\vartheta_j - \mu} \frac{d\tau}{\left[\mathcal{E}_j^{(0)}(t,w,\tau)\right]^2} l_j^{(0)'} X(\tau,t) \right\} C(t) v \tag{1.20}$$
$$(\vartheta_{k-1} - \mu \le t \le \vartheta_k - \mu;\ \vartheta_0 = t_0,\ k = 1,\cdots,m),$$

а при $\{t,w\} \overline{\in} G$ положим $\{V_e[t,w]\} = Q$.

Доказано [3], что стратегии второго игрока $\{V_e[t,w]\}$ обеспечивают уклонение каждого движения $w(t)$ от множеств $\{M_k\}$ до моментов времени $\vartheta_1,\cdots,\vartheta_m$, если $w_0 = w(t_0)$ не принадлежит множеству M_1.

Так как целью второго игрока является получение гарантированного результата, обеспечивающего соответствующие уклонения от целевых множеств $M_1,\cdots,M_m$ при самом упорном сопротивлении первого игрока, то второй игрок прицеливает движение на построенный поводырь.

Таким образом, пучок абсолютно-непрерывных функций, который является поводырем, будет решением

$$\dot{w}(t) = A(t)w + B(t)u[t] + c(t)\tilde{v}, \quad (w_0 = w(t_0)),$$

где $u[t]$ - любое допустимое управление, а $\tilde{v} \in Q$ определяется из (1.20).

2. *Оценка*. Пусть $t_* \subset [t_0; \vartheta]$, $x(t_*) = x_*$ есть позиция, которую занимает система при $t = t_*$ (назовем истинным положением системы).

Предполагается также, что второй игрок не может точно определить положение системы x_*; измеренное с ошибкой положение обозначим через $\hat{x}_*$. Условия прицеливания второго игрока на поводырь при самом упорном сопротивлении первого игрока будут

$$(w_* - x_*)' B(t_*)u^* = \min_{u \in P}(w_* - x_*)B(t_*)u, \tag{2.1}$$

$$(w_* - \hat{x}_*)' C(t_*)\mathrm{v}^* = \max_{\mathrm{v} \in Q}(w_* - \hat{x}_*)C(t_*)\mathrm{v}, \tag{2.2}$$

где w_* есть самое близкое положение точки x_*.

При этой постановке конкретное движение поводыря определяется из уравнения

$$\dot{w}(t) = A(t)w(t) + B(t)u^* + C(t)\tilde{\mathrm{v}} \quad (w_* = w(t_*)), \tag{2.3}$$

а движение точки определяется уравнением

$$\dot{x}[t] = A(t)x[t] + B(t)u(t) + C(t)\mathrm{v}^*, \tag{2.4}$$

где $u(t)$ -любое допустимое управление.

Построенное движение в виде ломаных Эйлера $(t, x[t])$ даже при $x_* = w_*$ может выйти из пучка, построенного поводырем, следовательно, целесообразно иметь мажорирующую оценку движения $(t, x[t])$ от пучка поводыря в любой момент времени $t \in [t_*, \theta]$.

Обозначим через

$$\rho(t) = \|w(t) - x[t]\| \tag{2.5}$$

евклидову норму вектора $w(t) - x[t]$.

В момент времени $t = t_*, \rho(t_*) = \|w(t_*) - x[t_*]\| = \|w_* - x_*\|$.

Тогда имеем

$$\frac{d\rho^2(t)}{dt} = 2[w(t) - x[t]]' [\dot{w}(t) - \dot{x}[t]] = 2[w(t) - x[t]]' \times$$
$$\times [A(t)w(t) + B(t)u^* + C(t)\tilde{\mathrm{v}} - A(t)x[t] - B(t)u - C(t)\mathrm{v}^*] \le 2\|A(t)\|\rho^2(t) + \tag{2.6}$$
$$+ 2[(w_* - x_*) + \psi(t - t_*)]' \{B(t_*)u^* + C(t_*)\tilde{\mathrm{v}} - B(t_*)u - C(t_*)\mathrm{v}^* + \psi_1(t - t_*)\};$$

предполагается, что $t - t_*$ - малая величина, причем $\psi \to 0$; $\psi_1 \to 0$ при $t \to t_*$.

Оценим величину $(w_* - x_*)' [B(t_*)u^* + C(t_*)\tilde{\mathrm{v}} - B(t_*)u - C(t_*)\mathrm{v}^*]$. Из условия (2.1) следует, что $(w_* - x_*)' [B(t_*)(u^* - u)] \le 0$. Следовательно, необходимо оценить величину

$$(w_* - x_*)' [C(t_*)(\tilde{\mathrm{v}} - \mathrm{v}^*)] = (w_* - \hat{x}_*)' [C(t_*)(\tilde{\mathrm{v}} - \mathrm{v}^*)] +$$
$$+ (\hat{x}_* - x_*)[C(t_*)(\tilde{\mathrm{v}} - \mathrm{v}^*)] \le (\hat{x}_* - x_*)' C(t_*)(\tilde{\mathrm{v}} - \mathrm{v}^*) \le \|\hat{x}_* - x_*\| cd, \tag{2.7}$$

где $\|C(t)\| \le c$; $\|A(t)\| \le \nu$; $\|\tilde{v} - v^*\| \le d$,

где d зависит от множества Q; $d = \max\limits_{v_1, v_2 \in Q} \rho(v_1, v_2)$.

Таким образом, из (2.6) и (2.7) получим

$$\frac{d\rho^2(t)}{dt} \le 2\nu\rho^2(t) + \overline{\varphi}(t - t_*) + \|\hat{x}_* - x_*\| cd, \tag{2.8}$$

где $\overline{\varphi}(t - t_*) \to 0$ при $t \to t_*$.

Интегрируя неравенство (2.8), получим

$$\rho^2(t) \le \rho^2(t_*) e^{2\nu(t - t_*)} + e^{2\nu t} \int_{t_*}^{t} e^{-2\nu\tau} \overline{\varphi}(\tau - t_*) d\tau + cde^{2\nu\tau} \int_{t_*}^{t} e^{-2\nu\tau} \|\hat{x}_* - x_*\| d\tau. \tag{2.9}$$

Обозначим $\varphi(t - t_*) = \max\limits_{\tau \in [t_*, t]} \overline{\varphi}(\tau - t_*)$, тогда из (2.9) имеем

$$\rho^2(t) \le \rho^2(t_*) e^{2\nu(t - t_*)} + \frac{\varphi(t - t_*)}{2\nu}\left(e^{2\nu(t - t_*)} - 1\right) + \frac{\|\hat{x}_* - x_*\|}{2\nu} cd\left(e^{2\nu(t - t_*)} - 1\right). \tag{2.10}$$

Предположим, что $t = t_* + \delta_1^{(r)}$, где $\delta_1^{(r)} = \tau_1^{(r)} - \tau_0^{(r)}$, тогда (2.10) будет иметь вид

$$\rho^2\left(t_* + \delta_1^{(r)}\right) \le \rho^2(t_*) e^{2\nu\delta_1^{(r)}} + \frac{\varphi\left(\delta_1^{(r)}\right)}{2\nu}\left(e^{2\nu\delta_1^{(r)}} - 1\right) + \frac{\|\hat{x}_* - x_*\|}{2\nu} cd\left(e^{2\nu\delta_1^{(r)}} - 1\right).$$

Продолжая эту итерацию, в итоге получим

$$\rho^2\left(t_* + \sum_{i=1}^{k+1} \delta_i^{(r)}\right) \le \rho^2(t_*) e^{2\nu \sum_{i=1}^{k+1} \delta_i^{(r)}} + \frac{1}{2\nu}\left[\varphi\left(\delta_1^{(r)}\right) + cd\mathcal{E}_1\right] \times$$
$$\left(e^{2\nu \sum_{i=1}^{k+1} \delta_i^{(r)}} - e^{2\nu \sum_{i=2}^{k+1} \delta_i^{(r)}}\right) + \frac{1}{2\nu} \sum_{j=2}^{k+1}\left[\varphi\left(\delta_j^{(r)}\right) + cd\mathcal{E}_j\right] \times \left(e^{2\nu \sum_{i=j}^{k+1} \delta_i^{(r)}} - 1\right), \tag{2.11}$$

где $\delta_i^{(r)} = \tau_i^{(r)} - \tau_{i-1}^{(r)}$; $\left\|\hat{x}\left(t_* + \sum_{i=1}^{j-1} \delta_i^{(r)}\right) - x\left(t_* + \sum_{i=1}^{j-1} \delta_i^{(r)}\right)\right\| \le \mathcal{E}_j$.

Нетрудно заметить, что в качестве точки (t_*, x_*) можно в полученную оценку вставить начальное положение (t_0, x_0). Полученная оценка (2.11) позволяет оценить математическое ожидание, дисперсию и т.д. отклонения системы от поводыря, следовательно, и от соответствующих целевых множеств.

Кафедра теоретической механики *Поступила 8.09.1995*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
2. **Красовский Н.Н.**, **Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. **Габриелян М.С.** Об оптимальном уклонении от областей.- Уч. записки ЕГУ, 1976, № 3.

Մ.Ս. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, Վ.Ռ. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ, Թ.Ա. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ՈՉ ՆՊԱՏԱԿԱՅԻՆ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻՑ ՍՏՈԽԱՍՏԻԿ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՇԵՂՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկված է մասնակի-ծրագրային ստրատեգիաների դասում շատ նպատակային բազմություններից շեղման ստոխաստիկ գծային դիֆերենցիալ խաղ: խաղի ընթացքում երկրորդ խաղացողը կառուցում է իր ստրատեգիան λ -ֆունկցիայի օգնությամբ առաջին խաղացողի ամենաուժեղ դիմադրության դեպքում: Ստացված է ժամանակի ցանկացած պահի համար ուղղորդիչ համակարգի ֆազային վիճակի հեռավորության գնահատականը: