ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1,1995 Естественные науки

Математика

УДК 517.95

А. Г. БАГДАСАРЯН

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА РЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ. ЗАДАЧА ТИПА ДИРИХЛЕ

В статье приводится априорная оценка для одного класса регулярных операторов, причем анизотропия оператора не зависит от анизотропии пространства, в котором он рассматривается. Предлагаемая оценка обобщает известные априорные оценки для эллиптических и полуэллиптических операторов.

Настоящая заметка посвящена получению априорной оценки для некоторого класса дифференциальных операторов с постоянными комплексными коэффициентами (содержащего, в частности, однородные эллиптические и обобщенно однородные полуэллиптические операторы), являющегося подклассом регулярных операторов (см. [1]). Причем рассматриваемый дифференциальный оператор действует в пространствах типа Соболева - Лиувилля (см. [2]), отвечающих некоторому вполне правильному многограннику, анизотропия которого не зависит от анизотропии рассматриваемого оператора.

В случае совпадения анизотропий приводимая оценка является обобщением соответствующих априорных оценок для эллиптических полуэллиптических дифференциальных операторов, рассматриваемых в классических (изотропных и анизотропных) пространствах Соболева - Лиувилля.

Будем пользоваться следующими обозначениями: R_n - n-мерное евклидово пространство, Z_n^+ - множество мультииндексов, т. е. векторов с целыми неотрицательными координатами. Если $\xi \in R_n, \alpha \in Z_n^+$, то положим

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \quad \xi^\alpha = \prod_{i=1}^{n} \xi_i^{\alpha_i}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}.$$

Пусть N - вполне правильный многогранник (см. [3]) с вершинами $\alpha^0, \alpha^1, \cdots, \alpha^n, \beta^1, \beta^2, \cdots, \beta^N \in Z_n^+$, при этом вершина α^j находится на j - той координатной оси $(j=1,2,...n)$, $\alpha^0 = (0,\cdots,0)$ $\alpha^0 = (0,\cdots,0)$ и вершины $\beta^i (i = 1,\cdots, N)$ находятся в $Z_{n-1}^+ \equiv Z_n^+\Big|_{\alpha_n=0}$.

Многогранник N порождает функции

$$v(\xi) = \left(\xi_n^{2d} + \sum_{j=1}^{n-1} \xi^{2\alpha^j} + \sum_{i=1}^{N} \xi^{2\beta^i} \right)^{1/2}, \quad \mu(\xi) = \left[\left(1 + v^2(\xi)\right)^{\frac{1}{d}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad d = |\alpha^n|. \tag{1}$$

Положим далее,

$$v'(\xi') = \left(\sum_{j=1}^{n-1} \xi^{2\alpha^j} + \sum_{i=1}^{N} \xi^{2\beta^i} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \mu'(\xi') = \left[v'(\xi') \right]^{\frac{1}{d}} \tag{2}$$

Рассмотрим наряду с N вполне правильный многогранник M с вершинами $\alpha^0, \delta^1, \delta^2, \cdots, \delta^n, \gamma^1, \gamma^2, \cdots, \gamma^M; |\gamma^n| = m$, где вершина $\delta^j (j = 1,2, \cdots n)$ находится на j - той координатной оси и вершины γ^i находятся в $Z^+_{n-1} (i = 1,2, \cdots M)$.

Аналогично (1), (2) определяются функции σ, λ, σ', λ', отвечающие многограннику M .

Рассмотрим дифференциальный оператор $p(D)$ с постоянными комплексными коэффициентами и соответствующий ему многочлен $p(\xi)$:

$$P(D) = \sum_{\alpha \in |M|_m} a_\alpha D^\alpha, \quad P(\xi) = \sum_{\alpha \in |M|_m} a_\alpha \xi^\alpha, \quad \xi \in R_n \tag{3}$$

где M_n - множество некоординатных граней многогранника M .

Определение 1. Оператор $P(D)$ назовем регулярным, если для соответствующего многочлена $P(\xi)$ существует положительное число c такое, что

$$|P(\xi)| \geq c\sigma(\xi) \equiv c\left(\sum_{j=1}^{n} \xi^{2\delta^j} + \sum_{i=1}^{M} \xi^{2\gamma^i} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

Из неравенства (4) видно, что для фиксированного $\xi' \in R_{n-1}; \xi' \neq 0$ многочлен от (от τ) $P(\xi', \tau)$ не имеет действительных корней.

Пусть $\tau^+_k(\xi')$, $k = 1,2,\cdots,m^+$ $\left(\tau^-_k(\xi'),\ k = 1,2,\cdots,m^-\right)$, - корни многочлена $P(\xi', \tau)$ с положительной (отрицательной) мнимой частью, причем $m^+ + m^- = m$, $m^+ \neq 0$.

Предположим, что для многочлена $P(\xi', \tau)$ с некоторыми положительными константами имеют неравенства

$$|\tau^\pm_k(\xi')| \leq c_1 \lambda'(\xi'), \quad |I_m \tau^\pm_k(\xi')| \geq c_2 \lambda'(\xi'), \tag{5}$$

$$|\xi^\alpha D^\alpha \tau^\pm_k(\xi')| \leq c_3 \lambda'(\xi'), \tag{6}$$

где $\alpha_i = 0,1 \quad (i = 1, \cdots, n)$, $|\alpha| \leq n-1$, $\prod_{i=1}^{n-1} \xi_i \neq 0$.

Условиям (5), (6)удовлетворяют однородные эллиптические и обобщенно однородые полуэллиптические операторы. Нетрудно привести примеры более общих регулярных операторов, удовлетворяющих условиям (5), (6).

Пусть оператор $P(D)$ таков, что соответствующий многочлен $P(\xi)$ имеет вид

$$P(\xi) = P'(\xi') + \xi_n^{2m},$$

где $P'(\xi')$ - регулярный многочлен (в смысле определения 1) с действительными коэффициентами, $\xi' \in R_{n-1}$ и m - натуральное число. Легко убедиться, что условия (5), (6) выполнены.

Определим функциональные пространства типа H, B, в которых рассматриваются дифференциальный оператор и граничные значения.

Определение 2. Пусть $-\infty < s, r < \infty$, $1 < p < \infty$, S' - пространство медленно растущих распределений. Функции μ, λ определены выше. Положим,

$$H_p^{s,r}(\mu,\lambda;R_n)=\left\{f\in S',\ \|f\|_H=\left\|F^{-1}\left(1+\mu^2\right)^{\frac{s}{2}}\left(1+\lambda^2\right)^{\frac{r}{2}}Ff\right\|_{L_p(R_n)}<\infty\right\}$$

Положим далее, $H_p^{s,0}(\mu,\lambda;R_n)\equiv H_p^s(\mu;R_n)$.

Через $H_p^s(\mu;R_n^+)$ обозначим сужение пространства $H_p^s(\mu;R_n)$ на R_n^+ с нормой

$$\|f\|=\inf_{g/R_n^+=f}\|g\|_{H_p^s(\mu;R_n)}$$

Определение 3. Пусть функция $\mu(\xi)$ определена в (1) и $1<p<\infty$ Через $\Phi(\mu;R_n)$ обозначим множество систем функций $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$, обладающих свойствами

а) $\varphi_k\in S(R_n)$, $(F\varphi_k)(\xi)\geq 0$, $k=0,1,\cdots$;

б) $\operatorname{supp}F\varphi_k\subset\left\{\xi\in R_n;\ 2^{k-1}\leq\mu(\xi)\leq 2^{k+1}\right\}$, $k=1,2,\cdots$;

$\operatorname{supp}F\varphi_0\subset\left\{\xi\in R_n;\ \mu(\xi)\leq 2\right\}$;

в) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(F\varphi_k)(\xi)=1$, $\xi\in R_n$;

г) $\|F\varphi_k\|_{M_p}\leq c$, $k=1,2,\cdots;$ $c>0$

Здесь S - класс Шварца, M_p - пространство мультипликаторов Фурье типа (p,p).

В работе [3] приведен пример системы $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$, удовлетворяющей условиям а) - г).

Определение 4. Пусть $-\infty<s<\infty$, $1<p,q<\infty$, $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}\in\Phi(\mu;R_n)$

Положим,

$$B_{p,q}^s(\mu;R_n)=\left\{f\in S';\ \|f\|_B=\left(\sum_{k=0}^{\infty}2^{ksq}\|f*\varphi_k\|_{L_p(R_n)}^q\right)^{\frac{1}{q}}<\infty\right\}$$

Теорема. Пусть *P(D)* - регулярный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами вида (3) и выполнены условия (5) , (6). Пусть далее $1<p<\infty$, $s=0,1,2,\cdots$. Тогда существует число $c>0$ такое, что для всех $u\in H_p^{s+m^+}(\mu;R_n^+)$

$$\|u\|_{H_p^{s+m^+}(\mu;R_n^+)}\leq c\left(\|P\dot{u}\|_{H_p^{s+m^+,-m}(\mu,\lambda;R_n^+)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{m^+-1}\left\|\frac{\partial^j u(x',0)}{\partial x_n^j}\right\|_{B_{p,p}^{m^++s-j-\frac{1}{p}}(\mu';R_{n-1})}+\|u\|_{H_p^{s+m^+-1}(\mu;R_n^+)}\right)$$

Кафедра прикладного анализа

Поступила 23. 03. 1994

ЛИТЕРАТУРА

1. **Никольский С. М.** Первая краевая задача для одного линейного уравнения. - ДАН СССР, 1962, т. 146, № 4, с. 767 - 769.
2. **Багдасарян А. Г.** Об интерполяции и следах функций из некоторых анизотропных функциональных пространств. - Изв. АН Арм. ССР, сер. мат., 1988, т. 23, № 4, 353 - 365.
3. **Михайлов В. П.** О поведении на бесконечности одного класса многочленов. - Тр. МИАН СССР, 1967 т. 91, с. 59 - 81.

Ա. Գ. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

ԱՊՐԻՈՐԻԱԿԱՆ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆ ՌԵԳՈՒԼՅԱՐ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ԴԱՍԻ ՀԱՄԱՐ:ԴԻՐԻԽԼԵԻ ԽՆԴԻՐ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում բերվում է ապրիորիական գնահատական ռեգուլյար օպերատորների որոշ դասի համար, ըստ որում դիֆերենցիալ օպերատորի անիզոտրոպությունը կախված չէ տարածության անիզոտրոպությունից, որում այն դիտարկվում է:

Դիրիխլեի խնդրի լուծումների ներկայացվող գնահատականը ընդհանրացնում է էլիպտիկ և կիսաէլիպտիկ օպերատորների համար համապատասխան գնահատականները: