ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Բնական գիտություններ 2, 1989 Естественные науки

Математика

УДК 517.95

С.К.АФЯН

СИСТЕМА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕКАНОНИЧЕСКОГО ВИДА.I

Рассматривается уравнение $Ay'+By=f(t)$, где A,B — постоянные квадратные матрицы. Решение ищется в классе таких вектор- функций, компоненты которых вместе со своими производными растут на бесконечности не быстрее, чем некоторая степень t. Случай, когда $\det A\neq 0$, рассматривался многими авторами [1—4]. В этой работе рассматривается также этот случай, но по другому методу, сущность которого заключается в получении более легко проверяемых условий для разрешимости начальной и общей начальной задачи.

Рассматривается уравнение

$$Ay'+By=f(t),t\geqslant 0,$$

где $A=\|a_{ij}\|,B=\|b_{ij}\|$ — постоянные матрицы порядка n, $f(t)=\|f_i(t)\|$ — столбец заданных комплекснозначных функций, $y'=\frac{dy}{dt}$.

Многие краевые задачи для систем уравнений в частных производных приводятся к таким уравнениям, когда их решают методом преобразования Фурье, причем решения ищутся в таком классе M вектор-функций, компоненты которых вместе со своими производными растут на бесконечности не быстрее, чем некоторая степень t.

Случай, когда $\det A\neq 0$, рассматривался многими авторами [1—4]. В первой части работы рассматривается также этот случай по другому методу, сущность которого заключается в получении более легко проверяемых условий для разрешимости начальной и общей начальной задачи, и, кроме того, ставится цель распространить этот метод и для неканонического случая.

1^0. Рассмотрим однородное уравнение

$$y'=Dy. \tag{1.1}$$

Пусть γ — произвольная замкнутая кривая, охватывающая все корни характеристического уравнения

$$\det(\lambda E-D)=0. \tag{1.2}$$

Методом преобразования Лапласа можно доказать следующий результат.

Теорема I.I. Любое решение y(t) уравнения (1.1) в классе регулярных вектор-функций представим в виде

$$y(t)=J(t)y(0), \tag{1.3}$$

где

$$J(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}e^{\lambda t}(\lambda E-D)^{-1}d\lambda \tag{1.4}$$

(см. [5], стр.337).

Заметим, что совокупность столбцов матрицы J(t) составляет систему фундаментальных решений уравнения (1.1.).

Нетрудно видеть, что решение J(t) уравнения (1.1) можно представить также в виде

$$y(t)=e^{tD}y(0), \tag{1.5}$$

где

$$e^{tD}=E+tD+\frac{t^2}{2!}D^2+\ldots+\frac{t^k}{k!}D^{k}+\cdots \tag{1.6}$$

Из формул (1.3) и (1.5) следует, что

$$J(t)=e^{tD}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} e^{\lambda t}(\lambda E-D)^{-1}d\lambda. \tag{1.7}$$

Как известно, решение y(t) определяется однозначно, если известно значение y(0). Выясним, каким условиям должен удовлетворять вектор y(0), чтобы соответствующее решение принадлежало классу M.

Для этого рассмотрим матрицы

$$E^{+}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^{+}}(\gamma E-D)^{-1}d\lambda, E^{-}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^{-}}(\lambda E-D)^{-1}d\lambda, \tag{1.8}$$

где контур γ^{+} (соответственно γ^{-}) содержит все те корни λ_j характеристического уравнения (1.2), для которых $Re\lambda_j>0(Re\lambda_j\leqslant 0)$.

Лемма. Пусть Г — произвольный контур, не проходящий через корни характеристического уравнения (1.2). Тогда имеет место тождество

$$e^{tD}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\lambda E-D)^{-1}d\lambda\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}e^{\lambda t}(\lambda E-D)^{-1}d\lambda. \tag{1.9}$$

Доказательство. Легко убедиться, что

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\lambda^{n-1}E+\lambda^{n-2}D+\ldots+D^{n-1})d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\lambda E-D)(\lambda^{n-1}E+\lambda^{n-2}D+\ldots+D^{n-1})(\lambda E-D)^{-1}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\lambda^{n}E-D^{n})(\lambda E-D)^{-1}d\lambda,\quad n=1,2,\ldots.$$

Отсюда имеем

$$D^{n}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\lambda E-D)^{-1}d\lambda\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\lambda^{n}(\lambda E-D)^{-1}d\lambda.$$

Пользуясь равенством (1.10), будем иметь цепочку равенств

$$e^{tD}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\lambda E-D)^{-1}d\lambda\right)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t}{k!}D^{k}\right)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\lambda E-D)^{-1}d\lambda\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}D^{k}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\lambda E-D)^{-1}d\lambda\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\lambda^{k}(\lambda E-D)^{-1}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\lambda E-D)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\lambda^k}{k!}d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}e^{\lambda t}(\lambda E-D)^{-1}d\lambda,(D^{0}=E),$$

что и доказывает лемму.

Замечание. Аналогично можно доказать и равенство

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda E-D)^{-1}d\lambda\right)e^{tD}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}e^{\lambda t}(\lambda E-D)^{-1}d\lambda. \qquad (1.11)$$

Теорема 1.2. Решение y(t) уравнения (1.1) принадлежит классу M тогда и только тогда, когда

$$E^{+}y(0)=0. \qquad (1.12)$$

Доказательство. Пусть $y(t)=e^{tD}y(0)\in M$. Тогда $y(0)=e^{-tD}y(t)$, откуда имеем $E^{+}y(0)=E^{+}e^{-tD}y(t)$. Из формулы (1.11) имеем

$$E^{+}y(0)=\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^{+}}(\lambda E-D)^{-1}e^{-\lambda t}d\lambda\right)y(t). \qquad (1.13)$$

Так как $det(\lambda E-D)\neq 0$ на γ^{+}, то для $\lambda\in\gamma^{+}$ норма матрицы $(\lambda E-D)^{-1}$ ограничена:

$$\|(\lambda E-D)^{-1}\|\leqslant const. \qquad (1.14)$$

Выбирая $\delta\leqslant Re\lambda$, для $t\geqslant 0$ имеем

$$|e^{-\lambda t}|\leqslant e^{-\delta t}. \qquad (1.15)$$

Кроме того, поскольку $y(t)\in M$, то

$$\|y(t)\|\leqslant const\cdot(1+t)^{N}. \qquad (1.16)$$

В силу оценок (1.14) — (1.16) для $t\geqslant 0$ из (1.10) имеем

$$\|E^{+}y(0)\|\leqslant const,$$

откуда следует, что $E^{+}y(0)=0$.

Докажем обратное. Пусть $E^{+}y(0)=0$. Поскольку $E^{+}+E^{-}=E$, то $y(0)=Ey(0)=(E^{+}+E^{-})y(0)=E^{+}y(0)+E^{-}y(0)=E^{-}y(0)$, следовательно, в силу леммы имеем

$$y(t)=e^{tD}y(0)=e^{tD}E^{-}y(0)=\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^{-}}e^{\lambda t}(\lambda E-D)^{-1}d\lambda\right)y(0).$$

Вычисляя интегралы с помощью теоремы о вычетах, убеждаемся, что $y(t)\in M$. Теорема доказана.

Из теоремы 1.2 следует, что начальная задача

$$y'=Dy, \quad y(0)=b \qquad (1.17)$$

имеет решение в классе M тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$E^{+}b=0. \qquad (1.18)$$

Рассмотрим общую начальную задачу

$$y'=Dy+g(t), \quad Ky(0)=b, \qquad (1.19)$$

где K —заданная матрица размеров $m\times n$, а b — заданный столбец. Имеет место

Теорема 1.3. Для того чтобы общая начальная задача (1.19) имела решение (единственное решение) в классе M необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая система уравнений

$$E^{+}d=-\int_{0}^{+\infty}E^{+}e^{-\tau D}g(\tau)d\tau, \qquad (1.20)$$

$$Kd=b$$

имела решение (единственное решение).

Доказательство.

1).Сначала докажем, что из разрешимости системы (1.20), (1.21) следует разрешимость задачи (1.19) в M. Пользуясь теоремой 1.1 и формулой (1.5), легко покажем, что общее решение неоднородного уравнения задачи (1.19) имеет вид

$$y(t)=e^{tD}d+\int_0^t e^{(t-\tau)D}g(\tau)\,d\tau, \tag{1.22}$$

где d — произвольный столбец. Если в качестве d в (1.22) взять решение системы (1.20), (1.21), умножить все члены (1.22) на матрицу K и положить t=0, получим $Ky(0)=Kd=b$. Тем самым для выбранного d правая часть (1.22) будет решением задачи (1.19). Докажем, что оно принадлежит классу M. Для этого умножим (1.20) на e^{tD} и полученное вычтем из (1.22), получим

$$y(t)=e^{tD}(E-E^+)d+e^{tD}\int_0^t e^{-\tau D}g(\tau)\,d\tau-e^{tD}\int_0^{+\infty} E^+e^{-\tau D}g(\tau)\,d\tau,$$

отсюда имеем

$$y(t)=e^{tD}E^-d+\int_0^t E^-e^{-(\tau-t)D}g(\tau)\,d\tau-\int_t^{+\infty} E^+e^{-(\tau-t)}g(\tau)\,d\tau. \tag{1.23}$$

Согласно равенству (1.11)

$$E^-e^{SD}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-} e^{\lambda S}(\lambda E-D)^{-1}d\lambda=e^{SD}E^-, \tag{1.24}$$

$$E^+e^{(t-\tau)D}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} e^{(t-\tau)\lambda}(\lambda E-D)^{-1}d\lambda. \tag{1.25}$$

Пользуясь этими тождествами, оценим норму $\|y(t)\|$. Согласно (1.23)

$$\|y(t)\|\leqslant\|e^{tD}E^-d\|+\left\|\int_0^t E^-e^{(t-\tau)D}g(\tau)\,d\tau\right\|+\left\|\int_t^{+\infty} E^+e^{(t-\tau)D}g(\tau)\,d\tau\right\|. \tag{1.26}$$

Пользуясь теоремой о вычетах для вычисления интеграла в (1.24), можно убедиться, что для s> 0 любой член матрицы E^-e^{sD} растет не быстрее, чем некоторая степень s. Поэтому для первых двух членов в правой части (1.26) будем иметь оценки

$$\|e^{tD}E^-d\|\leqslant C(1+t)^{N_1},\quad \left\|\int_0^t E^-e^{(t-\tau)D}g(\tau)\,d\tau\right\|\leqslant C(1+t)^N, \tag{1.27}$$

т.к. $g\in M\,(C\equiv const)$.

Обратимся к оценке третьего члена. Поскольку кривые γ^- и γ^+ можно выбрать не проходящими через корни уравнения $det(\lambda E-D)=0$, поэтому на γ^- и γ^+ имеем

$$\|(\lambda E-D)^{-1}\|\leqslant C. \tag{1.28}$$

Для $\lambda\in\gamma^+\,(Re\lambda>0)$ существует $\delta>0$ такое, что при $s>0$ из (1.25) в силу (1.28) будем иметь

$$\|E^+e^{-sD}\|\leqslant C(1+s)^N e^{-\delta s}. \tag{1.29}$$

Наконец, пользуясь оценками (1.28), (1,29), имеем

$$\left\|\int_t^{+\infty} E^+e^{(t-\tau)D}g(\tau)\,d\tau\right\|=\left\|\int_t^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} e^{(t-\tau)\lambda}(\lambda E-D)^{-1}d\lambda\right)g(\tau)\,d\tau\right\|=$$

$$=\left\|\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} e^{-t_1\lambda}(\lambda E-D)^{-1}d\lambda\right)g(t_1)\,dt_1\right\|\leqslant C(1+t)^N\int_0^{+\infty} e^{-\delta t_1}g(t_1)\,dt_1=$$

$$=const(1+t)^N.$$

Отсюда и из (1.26) следует, что $y(t)\in M$.

2).Докажем, что из разрешимости задачи (1.19) в M следует разрешимость системы (1.20), (1.21). Действительно, мы знаем, что решение этой задачи имеет вид (1.22), поэтому, подставляя $t=0$, умножая обе части на матрицу K и учитывая (1.19), будем иметь $Kd=Ky(0)=b$. Далее, обе части (1.22) умножив на E^+e^{-tD}, получим

$$E^+e^{-tD}y(t)=E^+d+\int_0^t E^+e^{-\tau D}g(\tau)d\tau.$$

Поскольку $y(t)\in M$, то в силу (1.29) левая часть этого равенства стремится к нулю при $t\to+\infty$. Поэтому

$$E^+d+\int_0^{+\infty} E^+e^{-\tau D}g(\tau)d\tau=0,$$

т.е. d удовлетворяет (1.20). Таким образом система (1.20), (1.21) имеет решение.

3).Теперь докажем, что из единственности решения задачи (1.19) следует единственность решения системы (1.20), (1.21). Пусть задача (1.19) однозначно разрешима. Тогда, если d_1 и d_2 два решения системы (1.20), (1.21), то $y_1(t)$ и $y_2(t)$, построенные по формуле (1.22), будут решениями задачи (1.19) в M, поэтому $y_1(t)\equiv y_2(t)$. Тогда $e^{tD}d_1=e^{tD}d_2$, откуда следует, что $d_1 d_2$.

4).Обратно, пусть система (1.20), (1.21) однозначно разрешима. Тогда, если $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — два решения задачи (1.19), то существуют d_1 и d_2 такие, что

$$y_j(t)=e^{tD}d_j+\int_0^t e^{(t-\tau)D}g(\tau)d\tau,\quad j=1,2.$$

Но тогда d_1 и d_2 будут решениями системы (1.20), (1.21). Из $d_1=d_2$ следует $y_1(t)\equiv y_2(t)$. Теорема 1.3 доказана. Из этой теоремы следует, что для однозначной разрешимости задачи (1.19) необходимо и достаточно, чтобы

$$rang\begin{pmatrix}E^+\\K\end{pmatrix}=n. \qquad (1.30)$$

Кафедра высшей математики физ. факультета

Поступила 20.01.1988

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шилов Г.Е.** Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965.
2. **Дикополов Г.В., Шилов Г.Е.** О корректных краевых задачах для уравнения в частных производных в полупространстве. —Изв.АН СССР, сер. матем., 1960, т.24, с.369-380.
3. **Паламодов В.П.** О корректных краевых задачах для уравнения в частных производных в полупространстве. —Изв. АН СССР, сер. матем., 1960, т.24, с.381-386.
4. **Павлов А.Л.** Об общих краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве. — Матем. сб., т.103 (145), №3 (7), с.367-391, 1977.
5. **Хормандер Л.** Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, т.3, М.: Мир, 1987.

Ամփոփում

Դիտարկվում է $Ay' + By = f(t)$ հավասարումը, որտեղ A, B-ն հաստատուն քառակուսի մատրիցներ են: Լուծումը փնտրվում է այնպիսի վեկտոր-ֆունկցիաների դասում, որոնց բաղադրիչները իրենց ածանցյալների հետ մեկտեղ անվերջում ավելի արագ չեն աճում, քան t-ի որևէ աստիճանը: $detA \neq O$ դեպքը դիտարկվել է շատ հեղինակների կողմից [1—4]: Այս աշխատանքում նույնպես դիտարկվում է այդ դեպքը, բայց մի այլ մեթոդով, որի նպատակն է ստանալ հեշտությամբ ստուգվող պայմաններ սկզբնական և ընդհանուր սկզբնական խնդիրների լուծելիության համար:

SUMMARY

Equation $Ay' + By = f(t)$ is considered, where A and B are square matrices. The solution is sought in such a class of vector functions, whose components with their derivatives in infinition increase not faster than any degree of t. Many authors have considered the case $detA \neq 0$ [1—4]. In this paper the same case is considered but by means of a method, which allows to get easily controllable conditions for the solution of initial and general initial problems.