ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 1987 Естественные науки

Математика

УДК 519.217

Э. А. ДАНИЕЛЯН

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ В МОДЕЛИ $M|G|1|\infty$ ПРИ ЕДИНИЧНОЙ ЗАГРУЗКЕ

В модели $M|G|1|\infty$ для виртуального времени ожидания $w(t)$ в момент t при единичной загрузке и $t\to+\infty$ устанавливается предельная теорема. При этом не предполагается конечность второго момента времени обслуживания.

1°. Рассматривается модель $M|G|1|\infty$ с параметром $a>0$ поступления и функцией распределения $B(x)$, $B(+0)=0$, длительностей обслуживания вызовов при дисциплине обслуживания в порядке поступления. В момент $t=0$ модель свободна от вызовов.

Обозначим через $w(t)$ виртуальное время ожидания вызова в момент t.

Предположим, что при $s\downarrow 0$ для функции

$$\beta(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dB(x).$$

имеет место представление

$$\beta(s)=1-s\beta_1+\alpha s^\gamma(1+o_s(1)) \quad (1<\gamma<2), \tag{1}$$

где β_1 — среднее длительности обслуживания, α — положительная константа.

Положим $(s\geqslant 0)$:

$$\nu(s)=s-a+a\beta(s),\ \rho_1=a\beta_1,\ B=a\alpha,\ t^*=(Bt)^{1/\gamma}.$$

Основной результат содержится в утверждении.

Теорема. Пусть $\rho_1=1$ и выполнено условие (1).

1. Равномерно по $x\in(-\infty, +\infty)$ существует предел

$$\lim_{t\to+\infty} P\left\{\frac{w(t)}{t^*}<x\right\}=\tilde{G}_\gamma(x). \tag{2}$$

2. Положим $(s\geqslant 0)$:

$$\tilde{g}_\gamma(s)=\int_0^\infty e^{-sx}d\tilde{G}_\gamma(x).$$

Тогда $(s>0)$

$$\tilde{g}_\gamma(s)=e^{s^\gamma}\left\{1-\frac{s}{\Gamma(1/\gamma)}\int_0^1 e^{-s^\gamma\cdot v}\cdot v^{\frac{1}{\gamma}-1}dv\right\}, \tag{3}$$

где $\Gamma(x)$—гамма-функция Эйлера.

3. $\tilde{G}_\gamma(x)$ —бесконечно-дифференцируемая ФР.

Замечание. Так как

$$\frac{1}{\Gamma(1/\gamma)}\int_0^\infty e^{-s^\gamma v}\cdot v^{\frac{1}{\gamma}-1}dv=\frac{1}{s} \tag{4}$$

(см. [1], с. 56), то из (3) следует другое представление для $\tilde{g}_\gamma(s)$:

$$\tilde{g}_\gamma(s)=\frac{s}{\Gamma(1/\gamma)}\int_0^\infty e^{-s^\gamma\cdot v}(v+1)^{\frac{1}{\gamma}-1}dv \quad (s\geqslant 0). \tag{5}$$

Доказательство теоремы подразделим на несколько лемм.

2°. *Лемма 1.* Пусть выполнены условия теоремы. Для любого $x>0$ существует предел

$$\lim_{t\to\infty}\varphi_t(x)=\frac{1}{\Gamma(1/\gamma)}\int_0^x v^{\frac{1}{\gamma}-1}dv, \tag{6}$$

где обозначено $(t>0)$

$$\varphi_t(x)=t^{1-\frac{1}{\gamma}}B^{-\frac{1}{\gamma}}\int_0^x P\{w(tv)=0\}dv. \tag{7}$$

Доказательство. Для $w(t)$ имеет место интегральное уравнение Такача ([2] с. 31):

$$\omega(s,\ t)=Me^{-sw(t)}=e^{\nu(s)t}\left\{1-s\int_0^t e^{-\nu(s)u}P\{w(u)=0\}du\right\} \quad (s\geqslant 0), \tag{8}$$

где M—знак математического ожидания.

Так как $B(x)$ не сосредоточено в нуле, то при $s>0$ и $\rho_1<1$

$$\nu'(s)=1-a\int_0^\infty xe^{-sx}dB(x)>1-\rho_1\geqslant 0,$$

т. е. $\nu(r)$ при $s>0$—возрастающая функция. Далее, $0=\nu(0)<\nu(s)$ $(s>0)$ и, значит, $\nu(s)>0$ при $s>0$, $\rho_1<1$. Следовательно, ввиду $0<\omega(s,t)<1$ для всех $s>0$ и $t>0$ при $t\to+\infty$ из (8) получаем

$$\int_0^\infty e^{-\nu(s)u}P\{w(u)=0\}du=s^{-1} \quad (s>0,\ \rho_1\leqslant 1). \tag{9}$$

Полагая $s^*=s/t^*$, в условиях (1) при $t\to+\infty$ и $\rho_1=1$ выводим

$$\nu(s^*)=(s^\gamma/t)(1+o_t(1)),$$

т. е. для любого $\varepsilon\in(0,1)$ существует $t_\varepsilon(s)$ такое, что при всех $t\geqslant t_\varepsilon(s)$

$$[s(1-\varepsilon)]^\gamma\leqslant t\cdot\nu(s^*)\leqslant[s\cdot(1+\varepsilon)]^\gamma. \tag{10}$$

Подставляя в (9) вместо s величину s^* и произведя в интеграле замену переменной $u=vt$, с учетом обозначения (7) получаем

$$\int_0^\infty e^{-\nu(s^*)vt}d_v\varphi_t(v)=\frac{1}{s}\quad(s>0,\ \rho_1=1). \tag{11}$$

Неравенства (10), примененные при $t\geqslant t_\varepsilon(s)$, приводят к неравенствам ($s>0$, $\rho_1=1$)

$$\int_0^\infty e^{-[s(1+\varepsilon)]^\gamma v}d_v\varphi_t(v)\leqslant\frac{1}{s}\leqslant\int_0^\infty e^{-[s(1-\varepsilon)]^\gamma v}d_v\varphi_t(v)$$

(принята во внимание монотонность $\varphi_t(x)$ по x при каждом t), или

$$\frac{1-\varepsilon}{s}<\varliminf_{t\to+\infty}\int_0^\infty e^{-s^\gamma}d_v\varphi_t(v)\leqslant\varlimsup_{t\to+\infty}\int_0^\infty e^{-s^\gamma v}d_v\varphi_t(v)<\frac{1+\varepsilon}{s},$$

откуда в силу произвольности ε вытекает существование предела

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^\infty e^{-sx}d_x\varphi_t(x)=\frac{1}{s^{1/\gamma}}. \tag{12}$$

Поскольку $\varphi_t(x)$ при любом $t>0$ по x является мерой и согласно (4)

$$\frac{1}{s^{1/\gamma}}=\int_0^\infty e^{-sx}d\varphi(x),\quad \varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(1/\gamma)}\int_0^x v^{\frac{1}{\gamma}-1}dv,$$

то по обобщенной теореме непрерывности для преобразования Лапласа-Стильтьеса ([3], с. 488) при $t\to+\infty$ существует слабый предел $\varphi_t\Rightarrow\varphi$, где $\Rightarrow$—знак слабой сходимости. Непрерывность φ доказывает точечную сходимость (6).

3° *Лемма 2.* В условиях теоремы при $t\to+\infty$

$$P\left\{\frac{w(t)}{t^*}<x\right\}\Rightarrow\tilde{G}_\gamma(x), \tag{13}$$

где $\tilde{G}_\gamma(x)$—ФР, определяемая равенством (3).

Доказательство. С использованием (8) при любых $t>0$, $s>0$, $\rho_1<1$ выписывается цепочка неравенств

$$\int_0^t P\{w(u)=0\}du \le e^{\nu(s)t}\int_0^t e^{-\nu(s)u}P\{w(u)=0\}du \le$$

$$\le e^{\nu(s)t}\int_0^\infty e^{-\nu(s)u}P\{w(u)=0\}du = \frac{\exp\{\nu(s)t\}}{s}. \qquad (14)$$

Подставляя в (8) и (14) вместо s величину s^* и произведя в интегралах замену переменной $u=v\cdot t$, получаем ($s>0$, $\rho_1=1$)

$$\omega(s^*,\ t)=e^{\nu(s^*)t}\left\{1-s\int_0^1 e^{-\nu(s^*)tv}d_v\varphi_t(v)\right\}, \qquad (15)$$

$$\int_0^1 d_v\varphi_t(v)=\varphi_t(1)=\overset{1}{\underset{0}{V}}\varphi_t\le\frac{\exp\{\nu(s^*)t\}}{s}. \qquad (16)$$

В (16) V—знак вариации и приняты во внимание неотрицательность и монотонность $\varphi_t(v)$ по v при любом $t>0$.

В силу (10) при $s>0$, $\rho_1=1$ и всех $t\ge t_\varepsilon(s)$ из (15), (16) выводим

$$e^{[s(1-\varepsilon)]^\gamma}\left\{1-s\int_0^1 e^{-[s(1-\varepsilon)]^\gamma v}\,d_v\varphi_t(\,v\,)\right\}\le\omega(s^*,\ t)\le$$

$$\le e^{[s(1+\varepsilon)]^\gamma}\left\{1-s\int_0^1 e^{-[s(1+\varepsilon)]^\gamma}d_v\varphi_t(\,v\,)\right\}. \qquad (17)$$

$$\varphi_t(1)\le\frac{1}{s}\exp\{[s(1+\varepsilon)]^\gamma\}=q(s). \qquad (18)$$

Функция $q(s)$ в промежутке $(0,\ +\infty)$ достигает минимума в точке $s_0=\gamma^{-1/\gamma}(1+\varepsilon)^{-1}$. Поэтому при $t\ge t_\varepsilon(s_0)$ из (18) имеем

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}\varphi_t=\varphi_t(1)\le(1+\varepsilon)C_\gamma, \qquad (19)$$

где $C_\gamma=(e\cdot\gamma)^{1/\gamma}$.

Согласно (6) и (18) выполнены условия второй теоремы Хелли (см. [4], с. 219), поэтому существует предел ($s>0$)

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^1 e^{-s^\gamma v}d_v\varphi_t(v)=\frac{1}{\Gamma(1/\gamma)}\int_0^1 e^{-s^\gamma v}v^{\frac{1}{\gamma}-1}dv. \qquad (20)$$

Переходя в неравенствах (17) к пределу при $t\to+\infty$, используя (20), а затем устремляя $\varepsilon\downarrow0$, получаем: существует предел ($s>0$)

$$\lim_{t\to+\infty}\omega(s^*,\ t)=\tilde{g}_\gamma(s). \qquad (21)$$

Произведем выкладки ($s<0$):

$$\int_0^\infty e^{-ex} d_x P\left\{\frac{w(t)}{t^*}<x\right\}=\int_0^\infty e^{-s^*u} d_u\{w(t)<u\}=\omega(s^*,\ t),$$

которые позволяют в силу (21) по теореме непрерывности убедиться в справедливости (13), где $\tilde{G}_\gamma(x)$ —неубывающая функция. По тауберовой теореме и (3)

$$\lim_{x\to+\infty} \tilde{G}_\gamma(x)=\lim_{s\downarrow 0}\tilde{g}_\gamma(s)=1$$

и, следовательно, $\tilde{C}_\gamma(x)$—ФР.

4° *Лемма 3.* Определяемая равенством (5), ФР $\tilde{G}_\gamma(x)$ бесконечно дифференцируема.

Доказательство. Рассмотрим функцию ($n\geq 0$, $1<\gamma\leq 2$, $\tau_n=\frac{1}{\gamma}-n$, $\mathrm{Re}\, s>0$)

$$\phi_{n,\gamma}(s)=\frac{1}{s^{n\gamma}\Gamma(\tau_n)}\int_0^\infty e^{-s^\gamma v}(v+1)^{\tau_n-1}\,dv=\frac{\exp\{s^\gamma\}}{s\cdot\Gamma(\tau_n)}\Gamma(\tau_n,\ s^\gamma), \qquad (22)$$

где $\Gamma(x,\ y)$—неполная гамма-функция.

Равенства (22) с помощью интегрирования по частям позволяют связать функции $\phi_{0,\gamma}(s)$, $\phi_{n,\gamma}(s)$ при $s>0$ и любом $n\geq 1$:

$$\phi_{0,\gamma}(s)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s^{k\gamma}\cdot\Gamma(\tau_k+1)}+\phi_{n,\gamma}(s);$$

или, принимая во внимание тождества (см. [1], с. 56)

$$\frac{1}{s^{k\gamma}}=\frac{1}{\Gamma(k\gamma)}\int_0^\infty e^{-sx}x^{k\gamma-1}dx \qquad (k=\overline{1,n}),$$

имеем

$$\phi_{0,\gamma}(s)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(k\gamma)\Gamma(\tau_k+1)}\int_0^\infty e^{-sx}x^{k\gamma-1}dx+\phi_{n,\gamma}(s). \qquad (23)$$

Обе части (23) аналитичны в области $\mathrm{Re}\, s>0$, поэтому равенство (23) выполнено при $\mathrm{Re}\, s>0$.

Интерес к $\phi_{0,\gamma}(s)$ вызван равенством $\tilde{g}_\gamma(s)=s\cdot\phi_{0,\gamma}(s)$ (см. (5) и (22)).

В силу [5] (с. 143—144) для любого $\delta>0$ и $z\to+\infty$ имеет место асимптотическая формула

$$\Gamma(\tau_n,\ z)=e^{-z}z^{\tau_n-1}O_{|z|}(1) \qquad \left(|\operatorname{Arg} z|<\frac{3\pi}{2}-\delta\right),$$

где $O_{|z|}(1)$—ограниченная при $z\to+\infty$ функция (в дальнейшем пишем $O(1)$). Поэтому из (22) для $\varphi_{n,\gamma}(s)$ $(n\geqslant 0)$ при $s\to+\infty$ выписывается асимптотическая формула

$$\varphi_{n,\gamma}(s)=\frac{O(1)}{s^{\gamma(n+1)}\Gamma(\tau_n)}, \tag{24}$$

откуда возможно получить обращение $\varphi_{n,\gamma}(s)$ (нам же нужно лишь обращение $\varphi_{0,\gamma}(s)$). Из (24) вытекает (см. [6], с. 275—276), что для произвольного $\beta>0$

$$\varphi_{0,\gamma}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}g_\beta(x)dx \quad (\operatorname{Re}s>\beta),$$

причем при любом $c>\beta$ (i—мнимая единица)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{-sx}\varphi_{0,\gamma}(s)ds=\begin{cases}g_\beta(x), & x\geqslant 0,\\ 0\quad, & x<0.\end{cases}$$

Функция $g_\beta(s)$ $(\beta>0)$ от c не зависит, значит не зависит и от β. Следовательно, существует функция $\tilde{G}_\gamma(x)$ (именно $\tilde{G}_\gamma(x)$!), не зависящая от β, и такая, что

$$\varphi_{0,\gamma}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\tilde{G}_\gamma(x)dx \quad (\operatorname{Re}s>0). \tag{25}$$

При $\operatorname{Re}s>0$ из (23), (25) находим представление для $\varphi_{n,\gamma}(s)$ $(n\geqslant 1)$:

$$\varphi_{n,\gamma}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}F_{n,\gamma}(x)dx, \tag{26}$$

где

$$F_{n,\gamma}(x)=\tilde{G}_\gamma(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(k\gamma)\Gamma(\tau_k+1)}. \tag{27}$$

Из (24) выводится оценка: если $\operatorname{Re}s=\beta>0$ (β фиксировано), то $(n\geqslant 0,\ y\in(-\infty,+\infty))$

$$|\varphi_{n,\gamma}(\beta+iy)|\leqslant\frac{C(\gamma,n,\beta)}{|\beta+iy|^{\gamma(n+1)}\Gamma(\tau_n)}, \tag{28}$$

где $C(\nu, n, \beta)$—константа, откуда заключаем, что $\varphi_{n,\gamma}(s)$ принадлежит классу $L^k(-\infty,+\infty)$ $(k=\overline{1,n+1})$. Следовательно, в частности, к (26) применима теорема Планшереля (см. [7], с. 41), именно: п. в. на оси $(n\geqslant 1)$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixy}\varphi_{n,\gamma}(\beta+iy)dy=\begin{cases}\exp\{-\beta x\}F_{n,\gamma}(x), & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases} \tag{29}$$

Согласно (28) левая часть (29), значит, и правая часть n раз дифференцируемы. Тогда $n (n \geqslant 1)$ раз дифференцируема функция $F_{n,\gamma}(x)$ $(x \in (-\infty, +\infty))$, а из (27) вытекает, что $\tilde{G}_\gamma(x)$ n раз дифференцируема на $(-\infty, +\infty)$.

Доказательство теоремы. Утверждения 2 и 3 теоремы вытекают из лемм 2 и 3 соответственно. В силу непрерывности $\tilde{G}_\gamma(x)$ и леммы 2 из [8] (см. теорему 11, с. 26) следует утверждение 1 теоремы.

5°. Опишем модель $M_r|G_r|1|\infty$. В одноканальную систему массового обслуживания с ожиданием поступают независимые пуассоновские потоки 1-вызовов, ..., r-вызовов с параметрами $a_1, \ldots, a_r$ соответственно. Длительности обслуживания независимы в совокупности, не зависят от процесса поступления и для k-вызовов $(k=\overline{1, r})$ имеют ФР $B_k(x)$, $B_k(+0)=0$. В момент $t=0$ в модели отсутствуют вызовы.

Рассматривается дисциплина абсолютных (с дообслуживанием) приоритетов в модели $M_r|G_1|1|\infty$, а вызовы обслуживаются в порядке поступления.

Предположим, что при $s \downarrow 0$ имеют место представления $(k=\overline{1, r})$

$$\beta_k(s)=\int_0^\infty e^{-sx} dB_k(x)=1-\beta_{k1}s+\alpha_k s^{\gamma_k}(1+0(1)) \quad (1<\gamma_k\leqslant 2), \tag{30}$$

где β_{k1} — среднее время обслуживания k-вызова, а константы $\alpha_k>0$.

Пусть $\overline{w}_r(t)$ — условное виртуальное время ожидания r-вызова в момент t при условии прекращения с момента t доступа вызовов в модель.

Положим

$$\gamma=\min_{1\leqslant k\leqslant r}\gamma_k, \quad L=\{l:\gamma_l=\gamma, \quad l=\overline{1, r}\}, \quad B=\sum_{l\in L} a_l\alpha_l, \quad t^*=(B\cdot t)^{1/\gamma}.$$

Следствие. Пусть $a_1\beta_{11}+\cdots+a_r\beta_{r1}=1$ и выполнены условия (30). Тогда равномерно по $x \in (-\infty, +\infty)$ существует предел

$$\lim_{t\to+\infty} P\left\{\frac{\overline{w}_r(t)}{t^*}<x\right\}=\tilde{G}_\gamma(x). \tag{31}$$

Доказательство. Величина $\overline{w}_r(t)$ совпадает с $w(t)$ модели $M|G|1|\infty$ с параметром $a=a_1+\ldots+a_r$ поступления и с ФР

$$B(x)=a^{-1}\sum_{k=1}^{r} a_k\cdot B_k(x)$$

длительностей обслуживания вызовов.

Тогда $\rho_1=a\beta_1=a_1\beta_{11}+\ldots+a_r\beta_{r1}=1$ и для

$$\beta(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dB(x)=a^{-1}\sum_{k=1}^{r} a_k\beta_k(s)$$

при $s\downarrow 0$ имеет место представление (1) с $\beta_1=\frac{1}{a}\rho_1$, $\gamma=\min_{1\leqslant i\leqslant r}\gamma_i$, $\alpha=\frac{B}{a}$, откуда в силу (2) получаем (31).

Кафедра теории вероятностей
и математической статистики

Поступила 13.04.1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление. М.: Высшая школа, 1966, 406 с.
2. *Гнеденко Б. В.* и др. Приоритетные системы обслуживания. Изд-во МГУ, М., 1973, 447 с.
3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984, т. 2, 752 с.
4. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной; изд. 2. М.: Гостехиздат, 1957.
5. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978, 375 с.
6. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. М. Наука, 1968, 423 с.
7. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966, 671 с.
8. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 414 с.

Ամփոփում

$M|G|1|\infty$ *մոդելում, որի ներմուծող հոսքի պարամետրը հավասար է* a*-ի և սպասարկման ժամանակի բաշխման ֆունկցիան՝* $B(x)$*-ի,* $B(+0)=0$*, ուսումնասիրվում է* $w(t)$ *հնարավոր սպասման ժամանակի ասիմպտոտիկ վարքը, երբ* $t\to+\infty$

Ենթադրվում է, որ

$$\beta(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dB(x) \quad (s\geq 0)$$

ֆունկցիան թույլ է տալիս զրոյի միջակայքում վերլուծություն

$$\beta(s)=1-\beta_1\cdot s+as^{\gamma}(1+o_s(1)), \quad (1<\gamma<2),$$

որտեղ β_1*-ը միջին սպասարկման ժամանակն է,* α*-ն՝ դրական հաստատուն։*

Summary

In $M|G|1|\infty$ model the virtual waiting time $w(t)$, at epoch t has been considered at $t\to+\infty$ when the traffic intensity equals one. The second moment of the service time is not supposed to be finite.