ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Բնական գիտություններ 3, 1984 Естественные науки

Математика

УДК 517.988

А. Г. ГАЛУМЯН

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ НА ПОЛУОСИ С ЯДРАМИ, СОСТАВЛЕННЫМИ ИЗ ЭКСПОНЕНТ

В работе изучаются интегральные уравнения с ядрами $K=K(ax+bt)$. Получены теоремы существования и единственности. В некоторых случаях получены явные решения.

Рассмотрим уравнение

$$y(x)=\int_0^{+\infty} K(x,t)y(t)\,dt+f(x) \quad (x>0). \tag{1}$$

В случае разностного ($K=K(x-t)$) или разностно-суммарного ($K=K_1(x-t)+K_2(x+t)$) ядра построена теория разрешимости уравнения (1) (см. [1]) и разработаны различные методы его решения (см. [2, 3]). В случае разностного ядра, представимого через экспоненты, теория продвинута особенно далеко (см. [4]). Однако все эти подходы оказываются, по сути, неэффективными, если ядро имеет вид $K=K(ax+bt)$ $(a\neq\pm b)$. Начнем изучение некоторых классов уравнений последнего типа.

§ 1. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ

Рассматривается уравнение (1), где $K(x, t)$ представляется с помощью интеграла Лебега-Стилтьеса

$$K(x,\ t)=\int_0^{+\infty} e^{-(ax+bt)\eta}\,d\mu(\eta) \text{ (несимметричный случай)} \tag{2}$$

либо в виде

$$K(x,\ t)=\int_0^{+\infty} [e^{-(ax+bt)\eta}+e^{-(bx+at)\eta}]\,d\mu(\eta) \quad \text{(симметричный случай)}. \tag{3}$$

Предполагается, что комплексные постоянные a и b удовлетворяют условиям

$$\alpha=\mathrm{Re}\,a>0,\ \ \beta=\mathrm{Re}\,b>0. \tag{4}$$

Предполагается также, что функция $\mu(\eta)$ имеет ограниченную вариацию на промежутке $[0, +\infty)$ и удовлетворяет условию

$$\varkappa=\int_0^{+\infty}|d\mu(\eta)|/\eta<+\infty. \tag{5}$$

Следующее утверждение проверяется непосредственно (см. [5, 6]).

Лемма 1. Пусть $f(x)$ представима в виде интеграла Лебега-Стилтьеса $f(x)=\int_0^{+\infty}e^{-x\xi}d\nu(\xi)$, где $\nu(\xi)$—функция ограниченной вариации на промежутке $[0,+\infty)$ такая, что $\int_0^{+\infty}|d\nu(\xi)|/\xi<+\infty$. Если непрерывная по x и ξ $(x,\xi>0)$ функция $\varphi(x,\xi)$ является решением уравнения

$$\varphi(x,\xi)=\int_0^{+\infty}K(x,t)y(t,\xi)dt+e^{-x\xi}\ (x,\xi>0), \tag{6}$$

то при выполнении условий (4) и (5), а также условия

$$|\varphi(x,\xi)|\leqslant c(1+1/\xi)\ (x,\xi>0,\ c=\mathrm{const}) \tag{7}$$

непрерывная функция $y(x)=\int_0^{+\infty}\varphi(x,\xi)d\nu(\xi)\ (x\geqslant 0)$ будет решением уравнения (1).

Обозначим через Q класс непрерывных ограниченных на промежутке $[0,+\infty)$ функций. Введем в Q метрику ρ следующим образом:

$$\rho(y_1,y_2)=\sup_{[0,+\infty)}|y_1(x)-y_2(x)|\quad (y_1,y_2\in Q).$$

Полученное таким образом метрическое пространство (Q,ρ) является полным.

1°. **Несимметричный случай.** Пусть имеет место (2). Тогда уравнение (1) принимает вид (см. [5])

$$y(x)=L_1y(x), \tag{8}$$

где

$$L_1y(x)=\int_0^{+\infty}e^{-ax\eta}d\mu(\eta)\int_0^{+\infty}e^{-bt\eta}y(t)dt+f(x).$$

А уравнение (6) при каждом $\xi>0$ примет вид

$$\varphi(x,\xi)=\int_0^{+\infty}e^{-ax\eta}d\mu(\eta)\int_0^{+\infty}e^{-bt\eta}\varphi(t,\xi)dt+e^{-x\xi}. \tag{9}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $f(x)\in Q$, имеют место условия (4) и $\varkappa<\beta$. Тогда уравнение (8) имеет единственное решение $y(x)\in Q$.

Доказательство. Пусть $y\in Q$, тогда из (4) и (8) имеем

$$|L_1y(x)|\leqslant\sup_{[0,+\infty)}|y(x)|\varkappa/\beta+\sup_{[0,+\infty)}|f(x)|<+\infty.$$

Откуда следует (см. [5, 6]), что $L_1y\in Q$. Пусть $y_1,y_2\in Q$, тогда

$$|L_1y_1(x)-L_1y_2(x)|\leqslant \varkappa\rho(y_1,\ y_2)/\beta\ (x\geqslant 0).$$

Следовательно,

$$\rho(L_1y_1,\ L_1y_2)\leqslant \varkappa\rho(y_1,\ y_2)/\beta.$$

Таким образом, при условиях теоремы 1 оператор L_1 осуществляет сжатое отображение Q в Q и теорема 1 доказана.

Решение $y(x,\ \xi)$ уравнения (6), очевидно, имеет вид (см. [5, 6])

$$y(x,\ \xi)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax\eta}\Phi(\xi,\ \eta)d\mu(\eta)+e^{-x\xi}\ (x,\ \xi>0). \tag{10}$$

Будем предполагать, что $\Phi(\xi,\ \eta)\in Q_\eta$ (индекс η показывает переменную, по которой функция принадлежит классу Q). Подставив (10) в (9), получим (см. [5])

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax\eta}\Phi(\xi,\ \eta)\,d\mu(\eta)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax\eta}\left[\frac{1}{\xi+b\eta}+\int\limits_0^{+\infty}\frac{\Phi(\xi,\ \zeta)}{a\zeta+b\eta}d\mu(\zeta)\right]d\mu(\eta). \tag{11}$$

Это соотношение имеет место, если $\Phi(\xi,\ \eta)$ является решением уравнения

$$\Phi(\xi,\ \eta)=M\Phi(\xi,\ \eta), \tag{12}$$

где

$$M\Phi(\xi,\ \eta)=\frac{1}{\xi+b\eta}+\int\limits_0^{+\infty}\frac{\Phi(\xi,\ \zeta)}{a\zeta+b\eta}d\mu(\zeta)\ (\xi,\ \eta>0).$$

Имеет место

Теорема 2. При выполнении условий (4) и при $\varkappa<\alpha$ уравнение (12) при каждом $\xi>0$ имеет в классе Q_η единственное решение $\Phi(\xi,\ \eta)$. При этом решение $\varphi(x,\ \xi)$ уравнения (6), определенная формулой (10), является непрерывной функцией по x и по $\xi (x\geqslant 0,\ \xi>0)$, удовлетворяющей условию (7).

Доказательство. Из (4), (5) и (12) следует, что для $\Phi(\xi,\ \eta)\in Q_\eta$ $(\xi>0)$ имеет место оценка

$$|M\Phi(\xi,\ \eta)|\leqslant 1/\xi+\varkappa\sup_{\eta\in[0,\ +\infty)}|\Phi(\xi,\ \eta)|/\alpha. \tag{13}$$

Из (13) следует, что $M\Phi(\xi,\ \eta)\in Q_\eta$. Пусть $\Phi_k(\xi,\ \eta)\in Q_\eta (k=1,\ 2)$, тогда $|M\Phi_1-M\Phi_2|\leqslant\dfrac{\varkappa\rho(\Phi_1,\ \Phi_2)}{\alpha}$. Откуда следует, что $\rho(M\Phi_1,\ M\Phi_2)\leqslant\varkappa\rho(\Phi_1\Phi_2)/\alpha$.

Таким образом, при условии, что $\varkappa<\alpha$, оператор M осуществляет сжатое отображение Q_η в Q_η, и тем самым доказаны существование и единственность решения $\Phi(\xi,\ \eta)$ уравнения (12) в классе $Q_\eta\ (\xi>0)$. Далее, из (13) имеем

$$\sup_{\eta\in[0,\ +\infty)}|\Phi(\xi,\ \eta)|\leqslant c/\xi\quad (c=(1-\varkappa/\alpha)^{-1}>1). \tag{14}$$

Из (12) и (14) следует непрерывность $\Phi(\xi,\ \eta)$ по ξ в любой точке $\xi_0>0$. Затем из (10) и (14) получаем, что непрерывная по x и по $\xi (x\geqslant 0,\ \xi>0)$ функция $\varphi(x,\ \xi)$ удовлетворяет условию (7), и доказательство теоремы 2 завершается.

Замечание 1. Из теорем 1 и 2 следует, что существует решение $\varphi(x,\ \xi)\in Q_x(\xi>0)$ уравнения (6) при условии, что $\varkappa<\max(\alpha,\ \beta)$.

Если же $\varkappa < \min(\alpha, \beta)$, то уравнение (6) имеет единственное решение $\varphi(x, \xi) \in Q_x (\xi > 0)$, которое определяется формулой (10) $\Phi(\xi, \eta)$ — решение уравнения (12)).

2°. **Симметричный случай.** Пусть имеет место (3). Тогда уравнение (1) принимает вид

$$y(x) = L_2 y(x), \tag{15}$$

где

$$L_2 y(x) = \int_0^{+\infty} \left[e^{-ax\eta} \int_0^{+\infty} e^{-bt\eta} y(t)dt + e^{-bx\eta} \int_0^{+\infty} e^{-at\eta} y(t)dt \right] d\mu(\eta) + f(x).$$

А уравнение (6) при каждом $\xi > 0$ примет вид

$$\varphi(x, \xi) = L_2 \varphi(t, \xi) + e^{-x\xi}. \tag{16}$$

Справедлива следующая

Теорема 3. Пусть $f(x) \in Q$, имеют место условия (4) и $\varkappa < \alpha\beta/(\alpha+\beta)$. Тогда уравнение (15) имеет единственное решение $y(x) \in Q$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1, причем для $y_1, y_2 \in Q$, из (15) имеем $|L_2 y_1(x) - L_2 y_2(x)| \leqslant \varkappa(1/\alpha + 1/\beta)\rho(y_1, y_2)$. Откуда следует, что оператор L_2—сжимающий при условии $\varkappa < \alpha\beta/(\alpha+\beta)$. Решение уравнения (16), очевидно, имеет вид

$$\varphi(x, \xi) = \int_0^{+\infty} [e^{-ax\eta}\Phi_1(\xi, \eta) + e^{-bx\eta}\Phi_2(\xi, \eta)]\, d\mu(\eta) + e^{-x\xi}. \tag{17}$$

Будем предполагать, что $\Phi_k(\xi, \eta) \in Q_\eta (\xi > 0;\ k = 1, 2)$. Подставим (17) в (16), получим

$$\int_0^{+\infty} [e^{-ax\eta}\Phi_1(\xi, \eta) + e^{-bx\eta}\Phi_2(\xi, \eta)] d\mu(\eta) = \int_0^{+\infty} [e^{-ax\eta}/(\xi + b\eta) +$$

$$+ e^{-bx\eta}/(\xi + a\eta)]\, d\mu(\eta) + \int_0^{+\infty} \left\{ e^{-ax\eta} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\Phi_1(\xi, \zeta)}{b\eta + a\zeta} + \frac{\Phi_2(\xi, \zeta)}{b(\eta+\zeta)} \right] d\mu(\zeta) + \right.$$

$$\left. + e^{-bx\eta} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\Phi_1(\xi, \zeta)}{a(\eta+\zeta)} + \frac{\Phi_2(\xi, \zeta)}{a\eta + b\zeta} \right] d\mu(\zeta) \right\} d\mu(\eta). \tag{18}$$

Это равенство выполняется, если Φ_1, Φ_2 удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \Phi_1(\xi, \eta) = \dfrac{1}{\xi + b\eta} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \left[\frac{\Phi_1(\xi, \zeta)}{b\eta + a\zeta} + \frac{\Phi_2(\xi, \zeta)}{b(\eta+\zeta)} \right] d\mu(\zeta), \\ \Phi_2(\xi, \eta) = \dfrac{1}{\xi + a\eta} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \left[\frac{\Phi_1(\xi, \zeta)}{a(\eta+\zeta)} + \frac{\Phi_2(\xi, \zeta)}{a\eta + b\zeta} \right] d\mu(\zeta). \end{cases} \tag{19}$$

Систему (19) можно записать в матричной форме следующим образом:

$$\Phi(\eta) = T\Phi(\eta), \tag{20}$$

где

$$\Phi(\eta)=(\Phi_1(\eta),\ \Phi_2(\eta))',\quad T=\|T\|,\ k=1,\ 2$$

$$T_{11}\Phi_k(\eta)=1/(\xi+b\eta)+\int\limits_0^{+\infty}\Phi_k(\zeta)d\mu(\zeta)/(b\eta+a\zeta),\ T_{12}\Phi_k(\eta)=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\Phi_k(\zeta)d\mu(\zeta)/b(\eta+\zeta),$$

$$T_{21}\Phi_k(\eta)=\int\limits_0^{+\infty}\Phi_k(\zeta)d\mu(\zeta)a(\eta+\zeta),\ T_{22}\Phi_k(\eta)=1/(\xi+a\eta)+$$

$$+\int\limits_0^{+\infty}\Phi_k(\zeta)d\mu(\zeta)/(a\eta+b\zeta)\ (k=1,\ 2). \tag{21}$$

(В (20), (21) фиксированный аргумент $\xi>0$ опущен). Рассмотрим класс R вектор-функций $\Phi(\eta)=(\Phi_1(\eta),\ \Phi_2(\eta))'$ ($\Phi_k\in Q$, $k=1,\ 2$).

Имеет место следующая

Теорема 4. При выполнении условий (3), (4) и при $\varkappa<\alpha\beta/(\alpha+\beta)$ система (19), (20) имеет в классе R, единственное решение $\Phi(\xi,\ \eta)=(\Phi_1(\xi,\ \eta),\ \Phi_2(\xi,\ \eta))'$. При этом уравнение (6) имеет единственное решение $\varphi(x,\ \xi)\in Q_x$ ($\xi>0$), которое дается формулой (17), $\varphi(x,\ \xi)$ является непрерывной функцией и по $\xi>0$ и удовлетворяет условию (7).

Доказательство. Введем в R метрику ρ следующим образом:

$$\rho(\Phi^1,\ \Phi^2)=\max_{k=1,\ 2}\ \sup_{\eta\in[0,\ +\infty)}|\Phi_k^{(1)}(\eta)-\Phi_k^{(2)}(\eta)|(\Phi^{(k)}=(\Phi_1^{(k)},\ \Phi_2^{(k)})'\in R,\ k=1,2).$$

Полученное метрическое пространство (R, ρ) является полным. Легко видеть, что T отображает R в R. Пусть $\Phi^{(k)}=(\Phi_1^{(k)},\ \Phi_2^{(k)})\in R$, $(k=1,\ 2)$ тогда легко увидеть, что

$$\left|\sum_{k=1}^{2}T_{jk}\Phi_k^{(1)}(\eta)-\sum_{k=1}^{2}T_{jk}\Phi_k^{(2)}(\eta)\right|\leqslant(1/\alpha+1/\beta)\varkappa\rho(\Phi^{(1)},\ \Phi^{(2)})(\eta\geqslant0,\ j=1,\ 2). \tag{22}$$

Из (22) следует, что $\rho(T\Phi^{(1)},\ T\Phi^{(2)})\leqslant\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\varkappa\rho(\Phi^{(1)},\ \Phi^{(2)})$. Тогда в силу условия теоремы получаем, что T осуществляет сжатое отображение R в R, и тем самым доказано существование и единственность решения $\Phi=(\Phi_1,\ \Phi_2)'$ системы (20) ((19)) в классе R. В силу теоремы 3 уравнение (6) имеет единственное решение $\varphi(x,\ \xi)\in Q_x$ ($\xi>0$), которое дается формулой (17). Введем обозначение $\max\limits_{k=1,2}\ \sup\limits_{\eta\in[0,\ +\infty)}|\Phi_k(\xi,\ \eta)|=\chi(\xi)$.

Тогда из (19) следует, что $\chi(\xi)\leqslant1/\xi+(1/\alpha+1/\beta)\varkappa\chi(\xi)$. Откуда имеем

$$\chi(\xi)\leqslant c/\xi\ \ (c=(1-(\alpha+\beta)\varkappa/\alpha\beta)^{-1}>1). \tag{23}$$

Из (17) и (23) следует, что

$$|\varphi(x,\ \xi)|\leqslant1+\frac{2c}{\xi}\int\limits_0^{+\infty}|d\mu(\eta)|. \tag{24}$$

Из (17) и (24) следует, что $\varphi(x, \xi) \in Q_x$ $(\xi>0)$ непрерывна по $\xi(\xi>0)$ и удовлетворяет условию (7). Теорема (4) доказана.

§ 2. ДИСКРЕТНАЯ МЕРА: НЕСИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

Пусть имеет место (2). Предположим также, что $\mu(\eta)$—N-ступенчатая функция, т. е.

$$\int_0^{+\infty} \varphi(\eta)\, d\mu(\eta) = \sum_{n=1}^{N} \theta_n \varphi(\nu_n), \tag{25}$$

где $\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_N$—положительные числа, а θ_n—отличные от нуля комплексные постоянные $(n=1, 2, \ldots, N)$. В рассматриваемом случае (10) примет следующий вид:

$$\varphi(x, \xi) = \sum_{n=1}^{N} \theta_n \Phi_n(\xi) e^{-a\nu_n x} + e^{-x\xi} \quad (x, \xi>0). \tag{26}$$

А (12) примет вид следующей системы:

$$\Phi_k(\xi) = \frac{1}{\xi+b\nu_k} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\theta_n}{a\nu_n+b\nu_k}\Phi_n(\xi) \quad \begin{matrix}(\xi>0)\\ (k=1, 2, \ldots, N).\end{matrix} \tag{27}$$

Система (27) в матричной форме запишется так:

$$A\Phi(\xi) = -B(\xi), \tag{28}$$

где

$$\Phi(\xi) = (\Phi_1(\xi), \ldots, \Phi_N(\xi))'; \quad B(\xi) = ((\xi+b\nu_1)^{-1}, \ldots, (\xi+b\nu_N)^{-1}).$$

$$A = \|a_{jk}\|_{j,k=1}^{N}, \quad a_{jk} = \theta_k/(a\nu_k+b\nu_j) \quad (j, k \in \{1, 2, \ldots, N\}, \quad j \neq k),$$

$$a_{kk} = [\theta_k - (a+b)\nu_k]/(a+b)\nu_k \quad (k=1, 2, \ldots, N).$$

Имеет место следующая

Теорема 5. В случае дискретной меры (см. (25)) при выполнении условий (2) и (4) уравнение (6) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$. Решение $\varphi(x, \xi)$ дается явно формулой (26), где $\Phi_n(\xi)$ $(n=1, 2, \ldots, N)$ определяется из системы (28). $\varphi(x, \xi)$ является непрерывной и ограниченной функцией и по x, и по ξ.

Таким образом, утверждение леммы 1 имеет место, если требовать только, чтобы $\nu(\xi)$ была функцией ограниченной вариации на промежутке $[0, +\infty)$.

Доказательство. Существование и единственность решения $\varphi(x, \xi)$ уравнения (6) очевидны, если учесть, что в рассматриваемом случае (11) и (12) эквивалентны. Из (28) следует, что

$$\Phi(\xi) = -A^{-1}B(\xi), \tag{29}$$

где $A^{-1}\|a_{jk}\|_{j,k=1}^{N}$ —матрица, обратная к А. Из (28) и (29) следует, что

$$|\Phi_j(\xi)| = \left|\sum_{k=1}^{N} \alpha_{jk}/(\xi+b\nu_k)\right| \leq \sum_{k=1}^{N} |\alpha_{jk}|/\beta\nu_1 (j=1, 2, \ldots, N). \tag{30}$$

Из (29) и (30) следует, что $\Phi_j(\xi)$ $(j=1, 2, \ldots, N)$ являются непрерывными, ограниченными функциями $\xi(\xi \geq 0)$. Тогда из (28) следует, что $\varphi(x, \xi)$ является непрерывной и ограниченной функцией (x, ξ) $(x, \xi \geq 0)$, и теорема 5 доказана.

Замечание 2. В частном случае, когда $N=1$, решение уравнения (6) имеет вид

$$\varphi(x, \xi)=e^{-x\xi}+\frac{(a+b)\nu_1\theta_1}{(a+b)\nu_1-\theta_1}\cdot\frac{1}{\xi+b\nu_1}\cdot e^{-a\nu_1 x}((a+b)\nu_1\neq\theta_1). \tag{31}$$

Легко проверить непосредственно, что формулой (31) дается решение $\varphi(x, \xi)$ при более общих предположениях, нежели при условиях (4), а именно: достаточно требовать, чтобы $\operatorname{Re}b>0$, $\operatorname{Re}(a+b)>0$. При этом $\operatorname{Re}a$ может быть отрицательной, и тогда $\varphi(x, \xi)$ будет экспоненциально расти с ростом x; также будет вести себя и решение $y(x)=\int\limits_0^{+\infty}\varphi(x, \xi)\,d\nu(\xi)$ уравнения (1).

Предположим теперь, что $\det A=0°$. Рассмотрим однородное уравнение

$$y(x)=\int\limits_0^{+\infty}K(x, t)y(t)dt \quad (x>0). \tag{1'}$$

Уравнение (1′) в рассматриваемом (несимметричном) случае дискретной меры примет следующий вид:

$$y(x)=\sum_{n=1}^{N}\theta_n e^{-a\nu_n x}\int\limits_0^{+\infty}e^{-b\nu_n t}y(t)dt. \tag{32}$$

Решение уравнения (32), очевидно, имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=1}^{N}\theta_k\Phi_k e^{-a\nu_k x}. \tag{33}$$

Подставив (33) в (32), получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\Phi_k=\sum_{n=1}^{N}\frac{\theta_n}{a\nu_n+b\nu_k}\Phi_n \quad (k=1, 2, \ldots, N). \tag{34}$$

(34) можно записать в виде (см. 28)).

$$A\Phi=0 \quad (\Phi=(\Phi_1, \ldots, \Phi_N)'). \tag{35}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 6. Пусть $\det A=0$ и $r(1\leqslant r<N)$—ранг матрицы A. Тогда решения уравнения (1′) имеют вид

$$y(x)=\sum_{k=1}^{N}\theta_k\left[\sum_{n=1}^{N-r}\lambda_n\Phi_k^{(n)}\right]e^{-a\nu_k x}, \tag{36}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{N-r}$ —произвольные постоянные, а $(\Phi_1^{(n)}, \ldots, \Phi_N^{(n)})'$ $(n=1, 2, \ldots, N-r)$ —линейно независимые решения системы (37).

Замечание 3. В частном случае, когда $r=N-1$ и линейно независимы, к примеру, первые $N-1$ строк и первые $N-1$ столбцов, однородное уравнение (1′) имеет решения вида (см. [7])

$$y(x)=\lambda\sum_{k=1}^{N-1}(-1)^{k+1}\theta_k A_{kN}e^{-a\nu_k x}+A_{NN}\theta_N e^{-a\nu_N x},$$

где λ—произвольная постоянная, а A_{jN} —минор элемента a_{jN} матрицы A $(j=1, 2, \ldots, N)$.

§ 3. ДИСКРЕТНАЯ МЕРА: СИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

Пусть имеют место (3) и (25). Тогда (17) примет следующий вид:

$$\varphi(x,\xi)=\sum_{n=1}^{N}\theta_n\left[\Phi_n^{(1)}(\xi)e^{-a\nu_n x}+\Phi_n^{(2)}(\xi)e^{-b\nu_n x}\right]+e^{-x\xi}. \tag{37}$$

А (19)—

$$\begin{cases}\Phi_k^{(1)}(\xi)=\dfrac{1}{\xi+b\nu_k}+\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{\theta_n}{a\nu_n+b\nu_k}\Phi_n^{(1)}(\xi)+\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{\theta_n}{b(\nu_k+\nu_n)}\Phi_n^{(2)}(\xi)\ (k=1,2,\ldots,N),\\[2ex] \Phi_k^{(2)}(\xi)=\dfrac{1}{\xi+a\nu_k}+\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{\theta_n}{a(\nu_k+\nu_n)}\Phi_n^{(1)}(\xi)+\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{\theta_n}{a\nu_k+b\nu_n}\Phi_n^{(2)}(\xi)\ (k=1,2,\ldots,N).\end{cases} \tag{38}$$

Систему (38) запишем в виде

$$T\Phi(\xi)=-S(\xi), \tag{39}$$

где

$$\Phi(\xi)=(\Phi_1^{(1)}(\xi),\ldots,\Phi_N^{(1)}(\xi),\Phi_1^{(2)}(\xi),\ldots,\Phi_N^{(2)}(\xi))',$$

$$S(\xi)=((\xi+b\nu_1)^{-1},\ldots,(\xi+b\nu_N)^{-1},(\xi+a\nu_1)^{-1},\ldots,(\xi+a\nu_N)^{-1})',$$

$$T=\|t_{jk}\|_{j,k=1}^{2N},$$

$$t_{kk}=t_{N+k\ N+k}=[\theta_k-(a+b)\nu_k]/(a+b)\nu_k\quad(k=1,2,\ldots,N),$$

$$t_{jk}=\theta_k/(a\nu_k+b\nu_j)\ (j\neq k),\ t_{N+j\ N+k}=\theta_k/(a\nu_j+b\nu_k)\ (j\neq k),$$

$$t_{N+j\ k}=\theta_k/a(\nu_j+\nu_k),\ t_{j\ N+k}=\theta_k/b(\nu_j+\nu_k)\ (j,\ k\in\{1,2,\ldots,N\}).$$

Имеет место следующая

Теорема 7. В случае дискретной меры уравнение (6) при выполнении условий (2) и (4) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\det T\neq 0$. Решение $\varphi(x,\xi)$ дается явно формулой (37), где $\Phi_n^{(k)}(\xi)$ $(n=1,2,\ldots,N;\ k=1,2)$ определяются из системы (38); $\varphi(x,\xi)$ является непрерывной и ограниченной функцией и по x, и по ξ $(x,\xi\geqslant 0)$.

Таким образом, утверждение леммы 1 имеет место, если требовать только, чтобы $\gamma(\xi)$ была функцией ограниченной вариации на промежутке $[0,+\infty)$.

Доказательство теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 5.

Предположим теперь, что $\det T=0$. Однородное уравнение (1′) при условиях (2) и (27) примет вид

$$y(x)=\sum_{n=1}^{N}\theta_n\int_0^{+\infty}\left[e^{-(ax+bt)\nu_n}+e^{-(bx+at)\nu_n}\right]y(t)\,dt. \tag{40}$$

Решение $y(x)$ уравнения (40), очевидно, имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=1}^{N}\theta_k\left[\Phi_k^{(1)}e^{-a\nu_k x}+\Phi_k^{(2)}e^{-b\nu_k x}\right]. \tag{41}$$

Подставив (41) в (40), получим следующую систему уравнений, записанную в матричной форме (см. (39))

$$T\Phi=0\quad(\Phi=(\Phi_1^{(1)},\ldots,\Phi_N^{(1)},\Phi_1^{(2)},\ldots,\Phi_N^{(2)})'). \tag{42}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 8. Пусть $\det T=0$ и $r(1\leqslant r<2N)$—ранг матрицы T. Предположим, что имеют место условия (2) и (27). Тогда решения уравнения (1′) имеют вид

$$y(x)=\sum_{k=1}^{N}\theta_k\left[e^{-a\nu_k x}\sum_{n=1}^{2N-r}\lambda_n\Phi_{kn}^{(1)}+e^{-b\nu_k x}\sum_{n=1}^{2N-r}\lambda_n\Phi_{kn}^{(2)}\right], \tag{43}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2N-r}$ —произвольные постоянные, а $(\Phi_{1n}^{(1)}, \ldots, \Phi_{Nn}^{(1)}, \Phi_{1n}^{(2)}, \ldots, \Phi_{Nn}^{(2)})'$ $(n=1, 2, \ldots, 2N-r)$—линейно независимые решения системы (42).

Замечание 4. В частном случае, когда $r=2N-1$ и, к примеру, линейно независимы первые $2N-1$ строк и первые $2N-1$ столбцов матрицы T, решения однородного уравнения (1′) имеют вид

$$y(x)=\lambda\sum_{k=1}^{N-1}(-1)^{k+1}\theta_k\left[T_{k2N}e^{-a\nu_k x}+(-1)^N T_{N+k\,2N}e^{-b\nu_k x}\right]+$$

$$+\lambda\theta_N[(-1)^{N+1}T_{N\,2N}e^{-a\nu_N x}+T_{2N\,2N}e^{-b\nu_N x}],$$

где λ—произвольная постоянная, а T_{j2N} —минор элемента t_{j2N} $(j=1, 2, \ldots, 2N)$.

В заключение выражаю свою глубокую признательность моему научному руководителю, доктору физ-мат. наук Нерсесяну А. Б. за постоянное внимание и поддержку в работе.

Кафедра высшей математики и математической физики

Поступила 7.05.1984

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.** Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978.
2. **Крейн М. Г.** Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов.—УМН, 1958, т. 13, № 5 (83), с. 3—120.
3. **Нерсесян А. Б.** Структура резольвент некоторых интегральных операторов.—Изв. АН Арм. ССР, Математика, 1982, т. 17, № 6, с. 442—463.
4. **Крейн М. Г., Шмульян Ю. Л.** Уравнения Винера-Хопфа, ядра которых допускают интегральное представление через экспоненты.—Изв. АН Арм. ССР, Математика, 1982, т. 17, № 4—5, с. 307—375.
5. **Камке Э.**, Интеграл Лебега-Стилтьеса. М.: Физматгиз, 1959.
6. **Рид М., Саймон Б.** Методы современной математической физики. Т. I. М.: Мир, 1977.
7. **Александров П. С.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1979.

Ա. Գ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

ՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ ԿԻՍԱՌԱՆՑՔԻ ՎՐԱ, ՈՐՈՆՑ ԿՈՐԻԶՆԵՐԸ ԿԱԶՄՎԱԾ ԵՆ ԷՔՍՊՈՆԵՆՏՆԵՐԻՑ

Ամփոփում

Աշխատանքում ուսումնասիրված են $K=K(ax+bt)$ *տեսքի կորիզներ ունեցող ինտեգրալային հավասարումներ, որտեղ* $K(x)$ *կորիզը ներկայացվում է էքսպոնենտների միջոցով։*

Ստացված են լուծումների գոյության և միակության թեորեմներ։ Այդպիսի որոշ հավասարումների համար ստացված են բացահայտ լուծումները։