ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1982 Естественные науки

УДК 517.538.5

Математика

Г. С. КОЧАРЯН

О ВЗВЕШЕННО-НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА ВСЕЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Исследовано взвешенно-наилучшее приближение дифференцируемых функций на действительной оси рациональными функциями с заданными полюсами вне действительной оси. Получены оценки сверху взвешенно-наилучших приближений.

1. В работе М. М. Джрбашяна [1] при некоторых ограничениях на приближаемую функцию и на вес были получены оценки взвешенно-наилучшего приближения полиномами на вещественной оси. В случае более общих весовых функций такие оценки были получены С. Н. Мергеляном [2] для ядра Коши $\frac{1}{x-a}$ ($\operatorname{Im} a \neq 0$) и В. А. Топяном [3] для некоторых классов функций, заданных на всей вещественной оси.

Пусть четная функция $p(x) \geqslant 0$ определена и непрерывна на оси $(-\infty, +\infty)$, монотонно возрастает, причем $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = +\infty$; $x=q(y)$ — обратная функция. Отнесем к классу $C[p(x)]$ все функции $f(x)$, непрерывные на оси $(-\infty, +\infty)$ и удовлетворяющие условию

$$\lim_{x\to\infty} e^{-p(x)} f(x) = 0.$$

Для данной последовательности чисел $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$ рассмотрим рациональные функции $R_n(z) = \frac{P_{n-1}}{\prod_{k=1}^{n}(z+i\lambda_k)}$ ($P_{n-1}(z)$ — произвольный полином степени $n-1$) и обозначим

$$E_n[f, p] = \inf_{\{R_n\}} \{ \max_{-\infty<x<+\infty} e^{-p(x)} |f(x) - R_n(x)| \}.$$

При условиях

$$\int_1^{+\infty} \frac{p(x)}{x^2} dx = +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty$$

было установлено [4], что если $f(x) \in C[p(x)]$ и

$$E_n[f,\ p] \leqslant K\left\{\int\limits_1^{\rho_n}\frac{dz}{q(z)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}\right\}^{-p-\delta},$$

где K—константа, не зависящая от n, $p \geqslant 0$—целое, $0<\delta\leqslant 1$, а число ρ_n определяется из уравнения

$$\rho_n = 4\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{\lambda_k+q(\rho_n)},$$

то на всякой конечной части вещественной оси функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до порядка p включительно.

В настоящей заметке получены оценки сверху взвешенно-наилучших приближений рациональными функциями с полюсами вне вещественной оси, которые зависят как от дифференциальных свойств приближаемой функции, так и от весовой функции и расположения полюсов.

2. Сначала займемся приближением ядра Коши. Пусть функция $p(x)$ имеет вид

$$p(x)=p(0)+\int\limits_0^{|x|}\frac{\omega(t)}{t}dt, \quad -\infty<x<+\infty,$$

где $0\leqslant\omega(t)<\infty$; $\omega(t)$ монотонно возрастает и

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{p(x)}{1+x^2}dx=+\infty.$$

Пусть θ—произвольное число в пределах $0<\theta<e^{-1}$,

$$\chi=\frac{(e\theta)^{2m+2}}{1-e^2\theta^2} \text{ и } \delta=\ln 19+p(1)-p(0)-1.$$

Обозначим

$$R_{mn}(z)=\frac{P_{m+n-1}(z)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(z-\alpha_k)}, \tag{1}$$

где $P_n(z)$—произвольный полином степени $\leqslant n$, а $\{\alpha_k\}_1^{\infty}$—последовательность комплексных чисел, $\operatorname{Jm}\alpha_k\neq 0$, и положим

$$E_{mn}(f)=\inf_{\{R_{mn}\}}\{\max_{-\infty<x<+\infty} e^{-p(x)}|f(x)-R_{mn}(x)|\}. \tag{2}$$

Лемма. Существует абсолютная постоянная $C>0$, такая, что неравенство

$$E_{mn}\left(\frac{1}{x-t}\right)\leqslant C\cdot\frac{e^{2p(1)-p(0)}}{(1-\chi)|\operatorname{Jm}t|}\exp\left\{-\frac{|\operatorname{Jm}t|}{\pi(1+|t|^2)}\nu_{mn}\right\} \tag{3}$$

($Jmt \neq 0$) справедливо для всех m и n, удовлетворяющих условиям $\chi<1$ и $m>\delta$, где

$$\nu_{mn}=\int_0^{\theta q(m-\delta)}\frac{p(\xi)}{1+\xi^2}d\xi+\sum_{k=1}^{n}\frac{|Jm\alpha_k|}{1+|\alpha_k|^2}, \tag{4}$$

$$Jmt\cdot Jm\alpha_k>0.$$

Доказательство. По теореме С. Н. Мергеляна [2] существует полином $P_m^*(z)$ с условиями

$$e^{-p(x)}|P_m^*(x)|\leqslant 1+|x|, \quad -\infty<x<+\infty \tag{5}$$

и

$$|P_m^*(t)|\geqslant C_0e^{p(0)-2p(1)}(1-\chi)\exp\left\{\frac{|Jmt|}{\pi(1+|t|^2)}\int_0^{\theta q(m-\delta)}\frac{p(\xi)}{1+\xi^2}d\xi\right\}. \tag{6}$$

Положим

$$R_{mn}^*(z)=P_m^*(z)B_n(z), \tag{7}$$

$$\tilde{R}_{mn}(z)=\frac{R_{mn}^*(z)-R_{mn}^*(t)}{(t-z)R_{mn}^*(t)},$$

где

$$B_n(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{z-\bar{\alpha}_k}{z-\alpha_k}.$$

Для $B_n(z)$ нетрудно получить оценку

$$|B_n(z)|^{-1}<\exp\left\{-\frac{|Jmz|}{1+|z|^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{|Jm\alpha_k|}{1+|\alpha_k|^2}\right\}. \tag{8}$$

Из (7) будем иметь

$$e^{-p(x)}\left|\frac{1}{x-t}-\tilde{R}_{mn}(x)\right|=\frac{e^{-p(x)}|P_m^*(x)|}{|x-t|\,|P_m^*(t)|\,|B_n(t)|},$$

откуда с учетом (5), (6) и (8) получаем (3).

3. Перейдем к основным результатам.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на всей оси $(-\infty, +\infty)$,

$$\max_{|t|<x}|f(t)|\leqslant M_1(x), \quad \max_{|t|<x}|f'(t)|\leqslant M_2(x). \tag{9}$$

Тогда при произвольном α, $0<\alpha<1$,

$$E_{mn}(f)\leqslant C_1\{\nu_{mn}^{-\alpha}+M_4[M_3^{-2}(\nu_{mn}^{-\alpha})]\},$$

где C_1—абсолютная константа,

$$M_3(x)=(2+x^2)[M_1(x)+M_2(x)],$$
$$M_4(x)=e^{-p(x)}M_1(x), \tag{10}$$

а ν_{mn} определяется из (4).

Доказательство. Распространим функцию $f(x)$ с действительной оси на всю плоскость следующим образом:

$$f(z)\equiv f(x) \quad \text{при} \quad z=x+iy.$$

Пусть D—прямоугольник $|x|\leqslant R$, $|y|\leqslant\mu$ ($R>0$ и $\mu>0$ пока произвольные), ограниченный отрезками L' и L'', параллельными оси x, и отрезками K' и K'', параллельными оси y; $L=L'UL''$, $K=K'UK''$ и $C=LUK$.

Применим известную формулу (аналог интегральной формулы Коши)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{f(t)dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\zeta\in D}\frac{f'(\xi)}{\zeta-z}d\xi d\eta=\begin{cases} f(z) & \text{при } z\in D\\ 0 & \text{при } z\bar{\in}\bar{D},\end{cases} \tag{11}$$

где $z=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$.

В. А. Топяном [3] доказано, что

$$\frac{1}{2\pi}\left|\iint\limits_{D}\frac{f'(\xi)}{\zeta-z}\,d\xi d\eta\right|\leqslant C_2M_2(R)\mu\ln\frac{R}{\mu} \tag{12}$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{K}\frac{f(t)}{t-x}dt\right|\leqslant\begin{cases} M_1(R) & \text{при } -\infty<x<+\infty\\ \mu M_1(R) & \text{при } |x|\leqslant R-1.\end{cases} \tag{13}$$

Обращаясь к интегралу

$$J_L(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'}\frac{f(t)dt}{t-x}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L''}\frac{f(t)dt}{t-x}, \tag{14}$$

заметим, что при $t\in L''$, $Jmt=\mu>0$, и по доказанной лемме, исходя из последовательности $\{\alpha_k\}$, $Jm\alpha_k>0$, можно найти рациональную функцию $\tilde{R}^{(2)}_{mn,t}(z)$ вида (1) с полюсами в точках $\{\alpha_k\}_1^n$, что при $t\in L''$

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} e^{-p(x)}\left|\frac{1}{x-t}-\tilde{R}^{(2)}_{mn,t}(x)\right|\leqslant\frac{C_3}{\mu}\exp\left\{-\frac{\mu\nu_{mn}}{\pi(1+|t|^2)}\right\}. \tag{15}$$

Аналогично найдется рациональная функция $\tilde{R}^{(1)}_{mn,t}(z)$ вида (1) с полюсами в точках $\{\bar{\alpha}_k\}_1^n$ ($Jm\alpha_k>0$), что при $t\in L'$

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} e^{-p(x)}\left|\frac{1}{x-t}-\tilde{R}^{(1)}_{mn,t}(x)\right|\leqslant\frac{C_3'}{\mu}\exp\left\{-\frac{\mu\nu_{mn}}{\pi(1+|t|^2)}\right\}. \tag{15'}$$

Полагая

$$R_{mn}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L''} f(t)\tilde{R}^{(2)}_{mn,t}(z)dt-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} f(t)\tilde{R}^{(1)}_{mn,t}(z)dt, \tag{16}$$

будем иметь рациональную функцию вида (1) с полюсами в точках $\{\alpha_k\}_1^n$ и $\{\bar{\alpha}_k\}_1^n$. Из (14), (15), (15′) и (16) вытекает

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} e^{-p(x)}|J_L(x)-R_{mn}(x)|\leqslant$$

$$\leqslant C_4\frac{R}{\mu}M_1(R)\exp\left\{-\frac{\mu\nu_{mn}}{\pi(1+\mu^2+R^2)}\right\}=E'_{mn}. \tag{17}$$

Очевидно $\sup\limits_{-\infty<x<+\infty} e^{-p(x)}|f(x)-R_{mn}(x)|\leqslant$

$$\leqslant E'_{mn}+\sup_{-\infty<x<+\infty} e^{-p(x)}|f(x)-J_L(x)|. \tag{18}$$

Но в силу (11), (12), (13)

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} e^{-p(x)}|f(x)-J_L(x)|\leqslant \sup_{|x|\geqslant R} e^{-p(x)}|f(x)|+$$

$$+C_2M_2(R)\mu\ln\frac{R}{\mu}+\mu M_1(R)+e^{-p(R-1)}M_1(R). \tag{19}$$

Выбирая

$$\mu=\frac{\pi(2+R^2)}{\nu_{mn}}\log\nu_{mn}^2 \quad \text{и} \quad R=M_3^{-1}(\nu_{mn}^{1-\alpha})$$

($0<\alpha<1$ произвольное), из (18) и (19) получим оценку теоремы.

Аналогичными рассуждениями можно получить оценку наилучшего приближения в случае, когда допускается только рост произвольной аппроксимируемой функции.

Теорема 2. Если $f(x)$ дифференцируема на всей оси $(-\infty,+\infty)$, $|f(x)|\leqslant 1$, $\max\limits_{|t|<x}|f'(t)|\leqslant M(x)$, то

$$E_{mn}(f)\leqslant C_5\{\nu_{mn}^{-\alpha}\log^2\nu_{mn}+\exp[-p(\psi^{-1}(\nu_{mn}^{1-\alpha})-1)]\},$$

где $\psi(x)=(2+x^2)M(x)$; $0<\alpha<1$ произвольное.

В заключение выражаю искреннюю благодарность академику АН Арм. ССР М. М. Джрбашяну за обсуждение полученных результатов.

Кафедра высшей математики *Поступила 24.04.1981*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Джрбашян М. М.** Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области.—Мат. сборник, 1955, т. 36 (78), № 3, новая серия.

2 **Мергелян С. Н.** О наилучших приближениях с весом на прямой.—ДАН СССР, 1960, т. 132, № 2.

3. **Топян В. А.** О взвешенно-полиномиальном приближении на действительной оси.— Изв. АН Арм. ССР, физ.-мат. науки, 1958, т. XI, № 4.

4. **Кочарян Г. С.** О взвешенно-наилучшем приближении рациональными функциями на всей вещественной оси.—Изв. АН Арм. ССР, физ.-мат. науки, 1962, т. XV, № 1.

Հ. Ս. ՔՈՉԱՐՅԱՆ

ԱՄԲՈՂՋ ԻՐԱԿԱՆ ԱՌԱՆՑՔԻ ՎՐԱ ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐՈՎ ԿՇՌՅԱԼ-ԼԱՎԱԳՈՒՅՆ ՄՈՏԱՐԿՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում բերվում են ամբողջ իրական առանցքի վրա դիֆերենցելի ֆունկցիաների

$$R_{mn}(z)=\frac{P_{m+n-1}(z)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(z-\alpha_k)}, \quad Jm\alpha_k\neq 0$$

($P_n(z)$*-ը n-ից ոչ մեծ աստիճանի կամայական բազմանդամ է) տիպի ռացիոնալ ֆունկցիաներով կշռյալ-լավագույն մոտավորությունների գնահատականներ վերևից։*