ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1981 Естественные науки

Математика

УДК 514

В. А. НЕРСЕСЯН

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ДОПУСТИМЫХ КОМПЛЕКСОВ ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В $\mathbf{R}^6$

Задачи интегральной геометрии давно уже привели к необходимости изучать n-параметрические семейства (комплексы) многомерных плоскостей в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$, обладающие следующим свойством: пусть Q-произвольная точка на плоскости h, K_Q—конус, образованный плоскостями комплекса, проходящими через точку Q, π (Q; h)—касательная плоскость к конусу K_Q, содержащая плоскость h. Плоскости π(Q; h) существуют и не зависят от выбора h. Такие комплексы называются допустимыми.

В работе найдены некоторые новые классы допустимых комплексов двумерных плоскостей в $\mathbf{R}^6$. Даются их классификация и полное геометрическое описание. Другие классы таких семейств в пространствах размерности n=5,6 изучены в работах [2, 3].

1. Изучение допустимых комплексов многомерных плоскостей $\mathbf{R}^n$ возникло в связи с задачей интегральной геометрии Гельфанда и Граева [1].

Пусть $H_{2,n}$—многообразие двумерных плоскостей в $\mathbf{R}^n$; $K\subset H_{2,n}$—n-мерный комплекс в $H_{2,n}$; K_Q—четырехмерный конус, образованный двумерными плоскостями комплекса K, проходящими через точку $Q\in\mathbf{R}^n$; $\pi(Q;\ h)$—касательная плоскость к конусу K_Q, проходящая через $h\in K_Q$.

Определение. Комплекс K называется допустимым, если для почти всех $Q\in\mathbf{R}^n$ и $h\in K_Q$ плоскость $\pi(Q;\ h)$ определена и зависит только от h. В дальнейшем индексы принимают следующие значения:

$$i,\ j,\ k=\overline{1,\ n};\quad \alpha,\ \beta=\overline{5,\ n};\quad \xi,\ \eta=\overline{1,\ 4};\quad N, L=\overline{1,\ 2}.$$

Обозначим через π семейство четырехмерных плоскостей $\pi(Q;\ h)$. К каждой плоскости $\pi(Q;\ h)$ присоединим семейство ортонормированных реперов $\{M;\ e_i\}$ так, чтобы $M\in h$, $e_N\subset h$, $e_\xi\subset\pi(Q;\ h)$. Тогда

$$dM=\omega^i e_i,\quad de_i=\omega^j_i e_j.$$

Главными на многообразии $H_{2,n}$ являются формы

$$\omega^3,\quad \omega^4,\quad \omega^\alpha,\quad \omega_N^3,\quad \omega_N^4,\quad \omega_N^\alpha, \tag{1}$$

а на семействе π—

$$\omega^\alpha,\quad \omega_\xi^\alpha. \tag{2}$$

В работе [2] показано, что если K—допустимый комплекс, то

$$\omega_N^\alpha = A_{N\beta}^\alpha \omega^\beta. \tag{3}$$

Там же содержится описание всех допустимых комплексов двумерных плоскостей R^5. В работе [3] рассматривался один класс допустимых комплексов двумерных плоскостей R^6, когда плоскости комплекса огибают некоторую четырехмерную поверхность в R^6.

В настоящей работе изучаются некоторые новые классы допустимых комплексов двумерных плоскостей R^6.

2. Из (2) и (3) при $n=6$ следует, что семейство π зависит не более чем от шести параметров.

Теорема 1. Если семейство π зависит от двух параметров, то R^6 расслаивается на двухпараметрическое семейство четырехмерных плоскостей, а допустимый комплекс образует произвольное шестипараметрическое семейство двумерных плоскостей, пересекающееся с каждой плоскостью семейства π по четырехпараметрическому семейству двумерных плоскостей.

Доказательство. Из условия теоремы и формул (3) следует, что

$$\omega_\xi^\alpha = A_{\xi\beta}^\alpha \omega^\beta.$$

Это значит, что система уравнений $\omega^\alpha=0$ вполне интегрируема, а R^6 расслаивается на двухпараметрическое семейство четырехмерных плоскостей. Так как $\dim K=6$, то утверждение теоремы очевидно.

Теорема 2. Если семейство π зависит от трех параметров, то R^6 расслаивается на трехпараметрическое семейство трехмерных плоскостей E^3 так, что каждая плоскость E^3 лежит в плоскости семейства π, а допустимый комплекс образует множество всех двумерных плоскостей, лежащих в плоскостях E^3.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что, кроме формул (3), имеются также уравнения

$$\omega_3^\alpha = B^\alpha \omega_4^5 + t_\beta^\alpha \omega^\beta,\quad \omega_4^6 = C\omega_4^5 + u_\alpha \omega^\alpha. \tag{4}$$

Если продифференцировать (3) внешним образом, учитывать соотношения (4), то увидим, что формы

$$\left.\begin{aligned} &B^5\omega_N^3 + \omega_N^4 - A_{N5}^5(B^5\omega^3 + \omega^4) - A_{N6}^5(B^6\omega^3 + C\omega^4)\\ &B^6\omega_N^3 + C\omega_N^4 - A_{N5}^6(B^5\omega^3 + \omega^4) - A_{N6}^6(B^6\omega^3 + C\omega^4)\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

—главные на семействе π. Из (5) следует, что и формы

$$(B^5C - B^6)\omega_N^3 - (A_{N5}^5C - A_{N5}^6)(B^5\omega^3 + \omega^4) - (A_{N6}^5C - A_{N6}^6)B^6\omega^3 + C\omega^4) \tag{6}$$

—главные на семействе π. Легко заметить, что при условии $B^5C - B^6 = 0$ формы (6) пропорциональны и что в каждой плоскости $\pi(Q;\, h)$ выделяется некоторая трехмерная плоскость. Действительно, определитель, составленный из коэффициентов, при ω^3 и ω^4 из

$$\begin{vmatrix} (A^5_{15}C-A^6_{15})B^5+(A^5_{16}C-A^6_{16})B^6 & (A^5_{15}C-A^6_{15})+C(A^5_{16}C-A^6_{16}) \\ (A^5_{25}C-A^6_{25})B^5+(A^5_{26}C-A^5_{26})B^6 & (A^5_{25}C-A^6_{25})+C(A^5_{26}C-A^6_{26}) \end{vmatrix}=0$$

в силу условия $B^5C-B^6=0$. Пусть теперь P—произвольная точка на плоскости $\pi(Q;\ h)$. Представим P в виде $P=M+x^\xi \mathbf{e}_\xi$. Найдем характеристические образы семейства π. Из того, что $dP \in \pi(Q;\ h)$, следует

$$1+x^N A^5_{N5}+x^3t^5_5=0, \quad x^N A^6_{N5}+x^3t^6_5=0, \quad x^4+x^3B^5=0,$$

$$x^N A^5_{N6}+x^3t^5_6=0, \quad 1+x^N A^6_{N6}+x^3t^6_6=0, \quad x^3B^6+x^4C=0.$$

Отсюда видно, что в силу $B^5C-B^6=0$ выделяется некоторая трехмерная плоскость $x^4+B^5x^3=0$. Канонизацией репера можно добиться, чтобы $B^5=0$. Тогда $B^6=0$,а уравнения (4) примут вид

$$\omega^\alpha_3=t^\alpha_\beta\omega^\beta, \quad \omega^6_4=C\omega^5_4+u_\alpha\omega^\alpha.$$

Если продифференцировать эти уравнения внешним образом, то получим, что ω^4_3 тоже выражается через ω^α, ω^5_4.

Геометрически это означает, что $\mathbf{R}^6$ расслаивается на трехпараметрическое семейство трехмерных плоскостей. Так как $\dim K=6$, то все двумерные плоскости, лежащие в трехпараметрическом семействе трехмерных плоскостей, образуют допустимый комплекс.

Теорема 3. Пусть семейство π зависит от четырех параметров. Тогда

а) либо двумерные плоскости комплекса K огибают некоторую четырехмерную поверхность $v^4 \subset \mathbf{R}^6$;

б) либо в $\mathbf{R}^6$ имеем четырехпараметрическое семейство трехмерных плоскостей E^3 со следующим свойством: если фиксировать произвольную точку, то через нее пройдет однопараметрическое семейство плоскостей, а четырехмерная касательная плоскость к этому конусу не будет зависеть от выбора точки на E^3 (т. е. семейство плоскостей E^3 является допустимым в нашем смысле). В качестве допустимого комплекса можно взять произвольное шестипараметрическое подсемейство двумерных плоскостей в семипараметрическом семействе двумерных плоскостей, плоскости которых лежат в E^3;

в) либо все двумерные плоскости $\mathbf{R}^6$, проходящие через прямые фокальной конгруэнции, составляют допустимый комплекс.

Доказательство. Так как семейство π зависит от четырех параметров, то

$$\omega^\alpha_3=C^\alpha_{3N}\theta^N+t^\alpha_{3\beta}\omega^\beta, \quad \omega^\alpha_4=C^\alpha_{4N}\theta^N+t^\alpha_{4\beta}\omega^\beta. \tag{7}$$

Если продифференцировать (3) внешним образом, подставить значения (7), то получим, что

$$C^\alpha_{3N}\omega^3_L+C^\alpha_{4N}\omega^4_L-A^\alpha_{L\beta}(C^\beta_{3N}\omega^3+C^\beta_{4N}\omega^4)$$

—главные на семействе π.

Так как $\dim K=6$, среди этих форм должно быть лишь четыре линейно независимых. Это дает условия

$$\left.\begin{aligned} &A^5_{L6}C^6_{3N}h-A^5_{L6}C^6_{4N}t-(A^6_{L5}C^5_{3N}+A_LC^6_{3N})q=0 \\ &A^5_{L6}C^6_{3N}p-A^5_{L6}C^6_{4N}m-(A^6_{L5}C^5_{4N}+A_LC^6_{4N})q=0 \\ &A^6_{L5}(C^5_{3N}m+C^5_{4N}t)-n(A^5_{L6}C^6_{3N}-A_LC^5_{3N})=0 \\ &A^6_{L5}(C^5_{3N}p-C^5_{4N}h)-n(A_LC^5_{4N}-A^5_{L6}C^6_{4N})=0 \end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

где

$$p=\begin{vmatrix} C^5_{41} & C^5_{42} \\ C^6_{41} & C^6_{42} \end{vmatrix},\quad q=\begin{vmatrix} C^5_{41} & C^5_{42} \\ C^5_{31} & C^5_{32} \end{vmatrix},\quad h=\begin{vmatrix} C^5_{41} & C^5_{42} \\ C^6_{31} & C^6_{32} \end{vmatrix},$$

$$m=\begin{vmatrix} C^6_{41} & C^6_{42} \\ C^5_{31} & C^5_{32} \end{vmatrix},\quad n=\begin{vmatrix} C^6_{41} & C^6_{42} \\ C^6_{31} & C^6_{32} \end{vmatrix},\quad t=\begin{vmatrix} C^5_{31} & C^5_{32} \\ C^6_{31} & C^6_{32} \end{vmatrix},\quad A_L=A^6_{L6}-A^5_{L5}.$$

Из (8) получим, что либо

а) $A^6_{N5}(h+m)+A_L n=0$, $A^5_{N6}(h+m)-A_L q=0$, $A^\alpha_{N\beta}\neq 0$ для $\alpha\neq\beta$;

либо

б) $h=0$, $q=0$, $A^\alpha_{N\beta}\neq 0$ для $\alpha\neq\beta$;

либо

в) $A^\alpha_{N\beta}=0$ для $\alpha\neq\beta$, $n\neq 0$, $q\neq 0$.

Рассмотрим каждый случай в отдельности.

В случае а) получим, что $A_L=0$, $h+m=0$. Из (8), учитывая также, что $\dim K=6$, получим, что $h=m=0$, $p\neq 0$. Тогда из (7) следует, что формы ω^5_3 и ω^6_3 можно представить в виде

$$\omega^5_3=\sigma\omega^6_4+a\omega^5+b\omega^6,\quad \omega^6_3=\nu\omega^5_4+c\omega^5+e\omega^6. \tag{9}$$

Если продифференцировать (3) внешним образом, учитывая соотношения $A_L=0$ и (9), получим, что

$$A^6_{N5}=u_N\nu,\quad A^5_{N6}=u_N\sigma.$$

Найдем характеристические образы плоскостей семейства π. Пусть $P=M+x^\xi e_\xi$ —произвольная точка на $\pi(Q;\, h)$. Так как $dP\in\pi(Q;\, h)$, то получим, что

$$x^3=x^4=0,\quad 1+x^N B_N=0,\quad x^N u_N=0,\ \text{где}\ B_N=A^\alpha_{N\alpha}.$$

Итак, характеристиками для семейства π являются точки. Этот случай детально изучен в работе [3].

В случае б) из (7) следует, что

$$\omega^5_3=\lambda\omega^5_4+u^5_{3\alpha}\omega^\alpha,\quad \omega^6_3=\mu\omega^5_4+u^6_{3\alpha}\omega^\alpha. \tag{10}$$

Если продифференцировать (3) внешним образом и применить соотношения (10), получим, что $\lambda=\mu$. Тогда в уравнениях (10) после канонизации можно привести λ к нулю. Окончательно имеем

$$\omega^\alpha_N=A^\alpha_{N\beta}\omega^\beta,\quad \omega^\alpha_3=u^\alpha_{3\beta}\omega^\beta.$$

Если продифференцировать уравнения $\omega^\alpha_3=u^\alpha_{3\beta}\omega^\beta$ внешним образом, то заметим, что форма ω^4_3—также главная на семействе π. Геометрически это все означает, что здесь имеем четырехпараметрическое семейство трехмерных пространств E^3, образующее допустимый комплекс в том же смысле, что и наш комплекс двумерных плоскостей h: если фиксировать точку, то через нее пройдет однопараметрическое семейство E^3, а касательная плоскость к этому конусу не будет зависеть от выбора точки на плоскости E^3. Допустимый комплекс двумерных плоскостей здесь семимерный. Из него можно взять произвольное шестимерное подсемейство.

В случае в) можно репер канонизировать так, чтобы $A^{\alpha}_{2\alpha}=0$. Тогда уравнения (3) примут вид

$$\omega^{\alpha}_{1}=B_1\omega^{\alpha}, \quad \omega^{\alpha}_{2}=0. \tag{11}$$

Если продифференцировать (11) внешним образом и подставить значения (7), то получим, что

$$\left.\begin{aligned}\omega^{3}_{1}&=B_1\omega^{3}+\sigma\omega^{3}_{2}+\nu\omega^{4}_{2}+\gamma\omega^{5}+\psi\omega^{6}\\ \omega^{4}_{1}&=B_1\omega^{4}+\lambda\omega^{3}_{2}+\chi\omega^{4}_{2}+\mu\omega^{5}+\varkappa\omega^{6}\end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

Отсюда следует, что $\dim K=6$. Геометрически уравнения (7), (11), (12) означают, что плоскости комплекса проходят через прямую I, описываемую точкой $M-\frac{1}{B_1}e_1+ve_2$, где v—параметр, а плоскость $\pi(Q;\ h)$ касается многообразия V, описываемого прямой l, вдоль этой прямой. Допустимый комплекс получим в случае, когда многообразие V трехмерное, а семейство прямых l зависит от двух параметров. Эти прямые обладают двумя фокусами на каждой прямой l и называются фокальными конгруенциями. Допустимый комплекс образован всевозможными двумерными плоскостями, проходящими через прямые фокальной конгруенции.

Теорема 4. Если семейство π зависит от пяти параметров, то в R^6 можно выделить двухпараметрическое семейство гиперплоскостей, в каждой из которых лежат трехпараметрические подсемейства π_0 четырехмерных плоскостей E^4 семейства π такие, что $E^4\subset E^5$. При этом в каждой гиперплоскости E^5 для подсемейства π_0 существует характеристическая прямая, а допустимый комплекс образует произвольное шестипараметрическое семейство двумерных плоскостей, которые лежат в плоскостях E^4 и проходят через характеристические прямые подсемейства π_0.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что, скажем,

$$\omega^{5}_{3}=B^{54}_{35}\omega^{5}_{4}+B^{53}_{36}\omega^{6}_{3}+B^{54}_{36}\omega^{6}_{4}+t_z\omega^{\alpha}. \tag{13}$$

Если продифференцировать (3) внешним образом и подставить значения (13), то увидем, что формы

$$\left.\begin{aligned}&B^{54}_{35}(\omega^{3}_{N}-A^{5}_{N5}\omega^{3})+(\omega^{4}_{N}-A^{5}_{N5}\omega^{4}), &&-A^{6}_{N5}(B^{54}_{35}\omega^{3}+\omega^{4})\\ &B^{53}_{36}(\omega^{3}_{N}-A^{5}_{N5}\omega^{3})-A^{5}_{N6}\omega^{3}, &&\omega^{3}_{N}-A^{6}_{N5}B^{53}_{36}\omega^{3}-A^{6}_{N6}\omega^{3}\\ &B^{54}_{36}(\omega^{3}_{N}-A^{5}_{N5}\omega^{3})-A^{5}_{N6}\omega^{4}, &&\omega^{4}_{N}-A^{6}_{N5}B^{54}_{36}\omega^{3}-A^{6}_{N6}\omega^{4}\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

—главные на семействе π. Если $A^{6}_{N5}=0$, то $\dim K<6$. При $A^{6}_{N5}\neq 0$ из (14) следует, что форма $A^{6}_{N5}(B^{54}_{36}+B^{54}_{35}B^{53}_{36})\omega^{3}$—тоже главная на семействе π. Если $B^{54}_{36}+B^{54}_{35}B^{53}_{36}\neq 0$, то формы ω^{3}, ω^{4}, ω^{3}_{N}, ω^{4}_{N} становятся главными на семействе π, откуда следует, что $\dim K<6$. При условии $B^{54}_{36}+B^{54}_{35}B^{53}_{36}=$ $=0$ можно канонизировать репер так, чтобы $B^{54}_{35}=0$, $B^{53}_{36}=0$, и, следовательно, $B^{54}_{36}=0$. Несложные выкладки показывают, что $\dim K=6$ тогда и только тогда, когда

$$\omega^{\alpha}_{N}=A_N\omega^{\alpha}, \quad \omega^{5}_{3}=t_5\omega^{5},$$

где $A_N = A^{\alpha}_{N\alpha}$. Дифференцируя эти соотношения внешним образом, увидим, что $\omega^5_6 = p\omega^5 + q\omega^6$.

Геометрически это все означает, что в R^6 выделяется двухпараметрическое семейство гиперплоскостей, а в каждой из них—трехпараметрическое семейство четырехмерных плоскостей $\pi(Q;\ h)$. Это семейство обладает характеристикой. Ею является прямая, через которую проходят двумерные плоскости $h \in K$.

Автор выражает искреннюю признательность А. М. Васильеву за внимание к работе и полезные советы.

Кафедра высшей алгебры и геометрии *Поступила 2.06.1980*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гельфанд И. М., Граев М. И.**, Комплексы прямых в C^n. Функц. анализ и его прил-я, т. 2, вып. 3, 1968.
2. **Нерсесян В. А.** ДАН Арм. ССР, 70, № 3, 1980.
3. **Нерсесян В. А.**, ДАН Арм. ССР, 70, № 5, 1980.

Վ. Ա. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

R^6-ՈՒՄ ԵՐԿՉԱՓ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԹՈՒՅԼԱՏՐԵԼԻ ԿՈՄՊԼԵՔՍՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիցուք $H_{2,n}$*-ը երկչափ հարթությունների դիֆերենցելի բազմաձևությունն է* R^n*-ում* $K \subset H_{2,n}$*-ը* n*-չափանի կոմպլեքս է* $H_{2,n}$*-ում;* K_Q*-ն քառաչափ կոն է, որի ծնիչները* $Q \in R^n$ *կետով անցնող երկչափ հարթություններ են,* $\pi(Q;\ h)$*-ը* K_Q *կոնին* $h \in K_Q$ *կետում շոշափող հարթությունն է։*

Սահմանում: *K կոմպլեքսը կոչվում է թույլատրելի, եթե համարյա բոլոր* $Q \in R^n$*-ի և* $h \in K_Q$*-ի համար* $\pi(Q;\ h)$ *հարթությունը որոշված է և կախված միայն h-ից։*

Երբ $n=6$*, ապա* $\pi(Q;\ h)$ *հարթությունների* π *ընտանիքը կախված է ոչ ավելի քան վեց պարամետրերից։*

Տրվում է երկչափ հարթությունների թույլատրելի կոմպլեքսների լրիվ դասակարգումը և նրանց երկրաչափական բնութագրումը R^6 *-ում այն դեպքում, երբ հարթությունների* π *ընտանիքը կախված է համապատասխանաբար 5, 4, և 2 պարամետրերից։*