Математические заметки

том 75 выпуск 4 апрель 2004

УДК 517.55

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ЛИТТЛВУДА–ПЭЛИ ДЛЯ n-ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПОЛИКРУГЕ

К. Л. Аветисян

Для n-гармонических функций в единичном поликруге пространства $\mathbb{C}^n$ определены g-функции типа Литтлвуда–Пэли и установлены связанные с ними L^p-неравенства. Основные теоремы настоящей статьи распространяют на поликруг и обобщают на дробные производные произвольного порядка некоторые результаты Литтлвуда, Пэли, Флетта. Этим дается ответ на один вопрос, поставленный Литтлвудом.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Пусть

$$U^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

– единичный поликруг пространства $\mathbb{C}^n$ и

$$T^n = \{w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n : |w_j| = 1,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

– n-мерный тор (остов поликруга). В поликруге U^n будем рассматривать *n-гармонические* функции, т.е. функции, гармонические по каждой переменной z_j в отдельности.

Исследования в теории рядов Фурье в 30-х годах привели Литтлвуда и Пэли [1] к так называемой *g-функции*, носящей их имя:

$$g(f)(\theta) = \left(\int_0^1 (1-r)|f'(re^{i\theta})|^2\,dr\right)^{1/2}, \qquad \theta \in (-\pi, \pi), \tag{1}$$

где $f(z)$ – голоморфная функция в единичном круге U^1. Один из основных результатов Литтлвуда и Пэли в связи с g-функцией – это эквивалентность норм $\|g(f)\|_{L^p}$ и $\|f\|_{L^p}$ на единичной окружности при $p > 1$ (см. [1], [2, гл. 14]). Аналогичный результат в верхнем полупространстве пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ установлен Стейном [3, гл. 4]. Ряд исследователей, в частности, Флетт [4], значительно расширили определение g-функции в единичном круге с помощью дробной производной и применили это в теоремах о мультипликаторах. Литтлвуд [5, задача 28, с. 43] высказал предположение о справедливости L^p-неравенств для g-функции в случае двух комплексных переменных и выразил желание обойтись без “плоских” комплексных методов.

В настоящей заметке с помощью дробных производных D^α (α – произвольный положительный мультииндекс) определены g-функции типа Литтлвуда–Пэли и установлены связанные с ними L^p-неравенства для n-гармонических функций в поликруге. Хотя примененный в доказательстве теоремы 1 метод интерполяции операторов хорошо известен и применялся еще Зигмундом [2], но тем не менее, в отличие от [1], [2], [4] наши доказательства независимы от комплексных методов и, тем самым, пригодны для распространения на другие области в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$. С другой стороны, распространение вещественных методов [3] (таких, как формула Грина, методы гильбертовых пространств) на дробные производные произвольного порядка и значения параметров $1 < p < \infty,\ 0 < q \leqslant \infty$ проблематично.

2. Обозначения и формулировка основных теорем. Пусть

$$I^n = [0,1)^n, \qquad \zeta \in \mathbb{C}^n, \qquad r \in I^n, \qquad dr = dr_1 \cdots dr_n, \qquad r\zeta = (r_1\zeta_1, \dots, r_n\zeta_n).$$

Через $\mathbb{Z}_+^n$ обозначим множество всех мультииндексов $m = (m_1, \dots, m_n)$ с неотрицательными целыми координатами $m_j \in \mathbb{Z}_+$. Считая также, что $q \in \mathbb{R}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, положим

$$(1-r)^\alpha = \prod_{j=1}^n (1-r_j)^{\alpha_j}, \qquad r^\alpha = \prod_{j=1}^n r_j^{\alpha_j}, \qquad \Gamma(\alpha) = \prod_{j=1}^n \Gamma(\alpha_j),$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^m = \left(\frac{\partial}{\partial r_1}\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial r_n}\right)^{m_n}, \qquad \alpha q + 1 = (\alpha_1 q + 1, \dots, \alpha_n q + 1).$$

Произведение $\prod$ далее всюду распространено от $j = 1$ до $j = n$, если не указано иное.

Для функции $f(z) = f(rw)$, $r \in I^n$, $w \in T^n$, заданной в U^n, введем в рассмотрение оператор $D^\alpha \equiv D_r^\alpha$ дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля относительно переменной $r \in I^n$:

$$D^{-\alpha} f(z) = \frac{r^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_{I^n} (1-\eta)^{\alpha-1} f(\eta z)\, d\eta,$$
$$D^\alpha f(z) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^m D^{-(m-\alpha)} f(z),$$

где $\alpha_j > 0,\ m \in \mathbb{Z}_+^n,\ m_j - 1 < \alpha_j \leqslant m_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n$. Вместо D^α иногда будем писать $D^{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$. Некоторые из координат α_j мультииндекса α могут быть равны нулю, например, оператор $D^{(0, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n)}$ будем понимать как

$$D^{(0,-\alpha_2,\dots,-\alpha_n)} f(z) = \frac{\prod_{j=2}^n r_j^{\alpha_j}}{\prod_{j=2}^n \Gamma(\alpha_j)} \int_{I^{n-1}} \prod_{j=2}^n (1-\eta_j)^{\alpha_j - 1} f(\eta z)\, d\eta_2 \cdots d\eta_n.$$

Из определения оператора D^α ясно, что для любого $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \geqslant 0$,

$$D^{\pm\alpha} f = D_{r_1}^{\pm\alpha_1} D_{r_2}^{\pm\alpha_2} \cdots D_{r_n}^{\pm\alpha_n} f, \tag{2}$$

где $D_{r_j}^{\alpha_j}$ обозначает тот же оператор, действующий лишь по переменной r_j. В частности,

$$D^1 f \equiv D^{(1,1,\dots,1)} f = D_{r_1}^1 D_{r_2}^1 \cdots D_{r_n}^1 f.$$

Символы $C(\alpha, \beta, \dots)$, c_α и т.п. всюду будут обозначать положительные постоянные, возможно различные в разных местах и зависящие только от указанных параметров

$\alpha, \beta, \dots$. Для любого p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, число p' означает сопряженный индекс, т.е. $p' = p/(p-1)$ (мы полагаем $1/(+\infty) = 0$ и $1/0 = +\infty$). Все неравенства $A \leqslant B$ в формулировках следует понимать в следующем смысле: если B конечно, то и A конечно и $A \leqslant B$.

Для заданной в U^n функции $f(z)$ и параметров $\alpha_j > 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $0 < q \leqslant \infty$ определим *g-функцию типа Литтлвуда–Пэли* (ср. [4]):

$$g_{q,\alpha}(f)(w) \equiv g_q(D^\alpha f)(w) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{I^n} (1-r)^{\alpha q - 1} |D^\alpha f(rw)|^q \, dr \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{r \in I^n} (1-r)^\alpha |D^\alpha f(rw)|, & q = \infty. \end{cases}$$

Легко видеть, что при $q = 2$ и $\alpha = (1, 1, \dots, 1)$ функция $g_{q,\alpha}(f)$ соответствует классической g-функции (1).

Основными результатами заметки являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\alpha_j > 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $1 < p < \infty$, $2 \leqslant q < \infty$ и $u(z)$ – интеграл Пуассона функции $f \in L^p(T^n)$. Тогда функция*

$$g_q(r^\alpha D^\alpha u)(w) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_{I^n} (1-r)^{\alpha q - 1} |r^\alpha D^\alpha u(rw)|^q \, dr \right)^{1/q}, \qquad w \in T^n, \tag{3}$$

удовлетворяет неравенству

$$\|g_q(r^\alpha D^\alpha u)\|_{L^p} \leqslant C(p, q, \alpha, n) \|f\|_{L^p}. \tag{3$'$}$$

Если, к тому же, α_j целые либо $0 < \alpha_j < 1$, $1 \leqslant j \leqslant n$, то имеет место более сильное неравенство

$$\|g_q(D^\alpha u)\|_{L^p} \equiv \|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p} \leqslant C(p, q, \alpha, n) \|f\|_{L^p}. \tag{3$''$}$$

Для произвольных $\alpha_j > 0$ неравенство (3$''$) имеет место при дополнительном предположении

$$D^{(k_1, \dots, k_n)} u(rw) = 0 \tag{4}$$

при всех $r = (r_1, \dots, r_n)$, $\prod r_j = 0$, $k_j \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leqslant k_j \leqslant [\alpha_j] - 1$.

Теорема 2. *Пусть $\alpha_j > 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $1 < p < \infty$, $0 < q \leqslant 2$, $u(z)$ – n-гармоническая функция в U^n, удовлетворяющая условию (4), и $g_{q,\alpha}(u) \in L^p(T^n)$. Тогда $u(z)$ является интегралом Пуассона своей граничной функции $f \in L^p(T^n)$, причем*

$$\|f\|_{L^p} \leqslant C(p, q, \alpha, n) \|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}.$$

В случае $0 < \alpha_j < 1$, $1 \leqslant j \leqslant n$, предположение (4) становится излишним.

Замечание. При $n = 2$, $q = 2$, $\alpha = (1, 1)$ теоремы 1 и 2 дают положительный ответ на вопрос Литтлвуда [5, с. 39, 43].

3. Вспомогательные утверждения. Ядро Пуассона в поликруге U^n задается формулой

$$P(z,\zeta)=\prod P(z_j,\zeta_j)=\prod\frac{1-|z_j|^2}{|\zeta_j-z_j|^2},\qquad z\in U^n,\quad \zeta\in T^n.$$

Лемма 1. *Если* $\alpha_j\geqslant 0$, $1\leqslant j\leqslant n$, *то*

$$|r^\alpha D^\alpha P(z,\zeta)|\leqslant C(\alpha,n)\prod\frac{1}{|\zeta_j-z_j|^{\alpha_j+1}},\qquad z\in U^n,\quad \zeta\in T^n.$$

А если, к тому же, α_j *целые, то сомножитель* r^α *в левой части можно удалить.*

Доказательство получается прямой оценкой.

Лемма 2. *Пусть* $f(z)$ – n*-гармоническая функция в* U^n *и* $0<p,q\leqslant\infty$, $\alpha_j>0$, $1\leqslant j\leqslant n$. *Тогда*

$$|r^\alpha D^\alpha f(z)|\leqslant C(p,q,\alpha,n)\|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p}\prod\frac{1}{(1-|z_j|)^{\alpha_j+1/p}},\qquad z\in U^n.$$

Доказательство мы опускаем, поскольку оно довольно стандартно и сводится к неравенству Гёльдера и n-субгармоническому поведению функции $|r^\alpha D^\alpha f|^p$, $p>0$.

Следующая лемма, в частности, показывает, что функция $g_{q,\alpha}(f)$ "существенно" возрастающая по α.

Лемма 3. *Пусть* $f(z)$ – n*-гармоническая функция в* U^n, $1\leqslant q<\infty$, $\alpha_j,\beta_j>0$, $1\leqslant j\leqslant n$, $D^{-\alpha}D^{\alpha+\beta}f=D^\beta f$. *Тогда*

$$g_{q,\beta}(f)(w)\leqslant C(\alpha,\beta,q,n)\,g_{q,\beta+\alpha}(f)(w),\qquad w\in T^n.$$

Доказательство получается n-кратным повторением одномерного варианта этого же неравенства (см. [4]). Заметим, что если $0<\alpha_j+\beta_j<1$, то тождество $D^{-\alpha}D^{\alpha+\beta}f=D^\beta f$ заведомо выполнимо.

Далее, при фиксированных δ, $0<\delta<1$, и $\zeta=e^{i\theta}\in T^1$ будем рассматривать стандартную область $\Gamma_\delta(\zeta)\equiv\Gamma_\delta(\theta)$ в единичном круге U^1, ограниченную двумя касательными к окружности $|z|=\delta$, проведенными из точки $\zeta=e^{i\theta}$, и наибольшей дугой окружности $|z|=\delta$. При фиксированных δ_j, $0<\delta_j<1$, $1\leqslant j\leqslant n$, и $\zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_n)\in T^n$ определим $\Gamma_\delta(\zeta)$ как $\Gamma_\delta(\zeta)=\Gamma_{\delta_1}(\zeta_1)\times\dots\times\Gamma_{\delta_n}(\zeta_n)$.

Лемма 4. *Пусть* $\alpha_j>0$, $\delta_j>0$, $1\leqslant j\leqslant n$, *и* $f(z)$ – n*-гармоническая функция в* U^n. *Тогда для ее некасательной максимальной функции*

$$f^*_\delta(\zeta)=\sup\bigl\{|f(z)|:z\in\Gamma_\delta(\zeta)\bigr\}$$

справедлива оценка

$$|r^\alpha D^\alpha f(rw)|\leqslant C(\alpha,\delta,n)\,\frac{f^*_\delta(w)}{(1-r)^\alpha},\qquad z=rw\in U^n. \tag{5}$$

А если, к тому же, α_j *целые, то сомножитель* r^α *в левой части* (5) *можно удалить.*

Доказательство. Зафиксируем точку $z = rw \in U^n$. Обозначим через $B = B_z$ поликруг с центром в этой точке и радиусом $(\delta_1(1-r_1)/2, \dots, \delta_n(1-r_n)/2)$ и заметим, что $B \subset \Gamma_\delta(w)$. Запишем представление Пуассона функции f в B:

$$f(z) = \int_{T_B} P_B(z,\zeta) f(\zeta)\, dm_n(\zeta),$$

где P_B – ядро Пуассона в поликруге B, T_B – остов поликруга B, m_n – поверхностная мера Лебега на T_B. Дифференцируя посредством оператора D^α и используя оценки ядра Пуассона, получаем требуемое неравенство (5).

4. Доказательство основных теорем. Для n-гармонической в U^n функции $u(z)$ и посредством области $\Gamma_\delta(\zeta)$ определим вариант интеграла площадей Лузина:

$$S_\delta(u)(\zeta) = \left(\int_{\Gamma_\delta(\zeta)} |D^1 u(z)|^2\, dm_{2n}(z)\right)^{1/2}, \qquad \zeta \in T^n,$$

где m_{2n} – мера Лебега на поликруге U^n. Нам понадобится следующая лемма, доказанная Марцинкевичем и Зигмундом [2, с. 315] в единичном круге для $k = 1$ и классической g-функции (1).

Лемма 5. *Пусть $u(z)$ – n-гармоническая функция в U^n, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $k_j \geqslant 1$, $0 < \delta_j < 1$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Тогда*

$$g_{2,k}(u)(\zeta) \leqslant C(n,k,\delta)\, S_\delta(u)(\zeta), \qquad \zeta \in T^n. \tag{6}$$

Доказательство. Вначале докажем лемму при $n = 1$, т.е. для единичного круга U^1. Зафиксируем точку $z = re^{i\theta} \in U^1$ и рассмотрим круг

$$B = \left\{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - z| < \frac{\delta(1-r)}{2}\right\} \subset \Gamma_\delta(e^{i\theta}) \equiv \Gamma_\delta(\theta).$$

Из интегральной формулы Пуассона в круге B нетрудно получить неравенство

$$|D^k u(re^{i\theta})|^2 \leqslant \frac{C(k)}{|B|(1-r)^{2(k-1)}} \iint_B |D^1 u(\rho e^{it})|^2 \rho\, d\rho\, dt,$$

где $|B|$ – площадь круга B. При $\rho e^{it} \in B$ имеем $C'_\delta(1-r) < 1-\rho < C''_\delta(1-r)$, и поэтому

$$(1-r)^{2k-1} |D^k u(re^{i\theta})|^2 \leqslant C(k,\delta) \iint_B |D^1 u(\rho e^{it})|^2 \frac{\rho\, d\rho\, dt}{1-\rho}. \tag{7}$$

Теперь рассмотрим два случая. Вначале положим $0 \leqslant r \leqslant \delta/(2+\delta)$. Тогда расширим область интегрирования в (7) до круга

$$E \equiv E(r,\delta) = \left\{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < r_2 \equiv r + \frac{\delta(1-r)}{2}\right\}.$$

Легко видеть, что $E(r,\delta)\subset\Gamma_\delta(\theta)$, и поэтому

$$(1-r)^{2k-1}|D^k u(re^{i\theta})|^2\leqslant C(k,\delta)\iint_{\Gamma_\delta(\theta)}\mathscr{X}_{(0,r_2)}(\rho)|D^1u(\rho e^{it})|^2\frac{\rho\,d\rho\,dt}{1-\rho},$$

где через $\mathscr{X}$ обозначена характеристическая функция интервала, указанного в индексе. Интегрирование по r и оценка внутреннего интеграла приводят к

$$\begin{aligned}\int_0^1&(1-r)^{2k-1}|D^k u(re^{i\theta})|^2\,dr\\&\leqslant C(k,\delta)\iint_{\Gamma_\delta(\theta)}\biggl(\int_0^1\mathscr{X}_{(0,r_2)}(\rho)\,dr\biggr)|D^1u(\rho e^{it})|^2\frac{\rho\,d\rho\,dt}{1-\rho}\\&\leqslant C(k,\delta)\iint_{\Gamma_\delta(\theta)}|D^1u(\rho e^{it})|^2\rho\,d\rho\,dt.\end{aligned}$$

Теперь положим $\delta/(2+\delta)<r<1$. Тогда расширим область интегрирования в (7) до кольцевого сектора, стороны которого касаются круга B:

$$(1-r)^{2k-1}|D^k u(re^{i\theta})|^2\leqslant C(k,\delta)\int_{r_1}^{r_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}|D^1u(\rho e^{it})|^2\frac{\rho\,d\rho\,dt}{1-\rho},\tag{8}$$

где обозначено

$$r_{1,2}=r\mp\frac{\delta(1-r)}{2},\qquad\theta_{1,2}=\theta\mp\arcsin\frac{\delta(1-r)}{2r}.$$

Интегрирование неравенства (8) по r приводит к оценке

$$\begin{aligned}\int_0^1&(1-r)^{2k-1}|D^k u(re^{i\theta})|^2dr\\&\leqslant C(k,\delta)\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\biggl(\int_0^1\mathscr{X}_{(r_1,r_2)}(\rho)\,\mathscr{X}_{(\theta_1,\theta_2)}(t)\,dr\biggr)|D^1u(\rho e^{it})|^2\frac{\rho\,d\rho\,dt}{1-\rho}.\end{aligned}\tag{9}$$

Остается должным образом оценить внутренний интеграл. Имеем

$$\mathscr{X}_{(r_1,r_2)}(\rho)\,\mathscr{X}_{(\theta_1,\theta_2)}(t)=\begin{cases}1, & \text{если } r_1<\rho<r_2,\theta_1<t<\theta_2,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Условие $r_1<\rho<r_2$ равносильно условию $\rho_1<r<\rho_2$, где $\rho_{1,2}=(\rho\mp\delta/2)/(1\mp\delta/2)$. Кроме того, $\theta_1<t<\theta_2$ равносильно условию

$$r<r_0\equiv\frac{1}{1+2/(\delta\sin|t-\theta|)}.$$

Следовательно,

$$\int_0^1\mathscr{X}_{(r_1,r_2)}(\rho)\,\mathscr{X}_{(\theta_1,\theta_2)}(t)\,dr=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\mathscr{X}_{(0,r_0)}(r)\,dr\leqslant\begin{cases}\rho_2-\rho_1, & \text{если } \rho_1<r_0<1,\\ 0, & \text{если } 0<r_0\leqslant\rho_1.\end{cases}$$

Определим множество $G_\delta = \{\xi = \rho e^{it} \in U^1 : \rho_1 < r_0\}$ и подсчитаем $\rho_2 - \rho_1 = C_\delta(1-\rho)$. После подстановки в (9) получаем

$$\int_0^1 (1-r)^{2k-1} |D^k u(re^{i\theta})|^2 \, dr \leqslant C(k,\delta) \iint_{G_\delta} |D^1 u(\rho e^{it})|^2 \rho \, d\rho \, dt. \tag{10}$$

Теперь остается доказать вложение $G_\delta \subset \Gamma_\delta(\theta)$. Пусть $\xi = \rho e^{it} \in G_\delta$ и $\delta \leqslant \rho < 1$. Множество $\Gamma_\delta(\theta) \setminus \{|\xi| < \delta\}$ характеризуется тремя условиями:

$$\delta \leqslant \rho < 1, \qquad |t| = |\arg \xi| < \arccos \delta, \qquad |\arg(1-\xi)| < \arcsin \delta. \tag{11}$$

В то же время множество G_δ определяется условием $\rho_1 < r_0$ или

$$\sin|t| < \frac{\delta}{2} \frac{1-\rho}{\rho - \delta/2}.$$

Из двух справедливых оценок

$$\sin|t| < \frac{\delta}{2} \frac{1-\rho}{\rho - \delta/2} \leqslant 1 - \delta < \sqrt{1-\delta^2},$$
$$\sin|t| < \frac{\delta}{2} \frac{1-\rho}{\rho - \delta/2} \leqslant \frac{\delta}{\rho} \sqrt{1 - 2\rho \cos t + \rho^2}$$

вытекают два последних условия в (11), что доказывает вложение $G_\delta \subset \Gamma_\delta(\theta)$. Таким образом, из (10) получаем требуемое неравенство

$$\int_0^1 (1-r)^{2k-1} |D^k u(re^{i\theta})|^2 \, dr \leqslant C(k,\delta) \iint_{\Gamma_\delta(\theta)} |D^1 u(\xi)|^2 \, dm_2(\xi). \tag{12}$$

Случай $n = 1$ доказан. Общий случай $n > 1$ получается n-кратным применением (12) с использованием разложения (2). Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 1. Сначала докажем теорему для целых значений $\alpha_j \geqslant 1$. Дифференцирование функции u посредством оператора D^α и оценка с помощью леммы 1 приводят к

$$|D^\alpha u(z)| \leqslant \int_{T^n} |D^\alpha P(z,\zeta)| \, |f(\zeta)| \, dm_n(\zeta) \leqslant \frac{C(\alpha,n)}{(1-|z|)^\alpha} \int_{T^n} P(z,\zeta) \, |f(\zeta)| \, dm_n(\zeta).$$

Отсюда получаем поточечную оценку через некасательную максимальную функцию u_δ^*:

$$g_{\infty,\alpha}(u)(w) \leqslant C(\alpha,n) \sup_{r \in I^n} \int_{T^n} P(rw,\zeta) \, |f(\zeta)| \, dm_n(\zeta) \leqslant C(\alpha,n) \, u_\delta^*(w), \qquad w \in T^n,$$

где $0 < \delta_j < 1$, $1 \leqslant j \leqslant n$, фиксированы. Используя максимальную теорему Зигмунда [6]

$$\|u_\delta^*\|_{L^p} \leqslant C \|f\|_{L^p}, \tag{13}$$

имеем

$$\|g_{\infty,\alpha}(u)\|_{L^p} \leqslant C \|f\|_{L^p}. \tag{14}$$

С другой стороны, последовательно применяя лемму 5, теорему Ганди–Стейна [7] об эквивалентности L^p-норм функций $S_\delta(u)$ и u^*_δ, а затем вновь неравенство (13), получаем оценку

$$\|g_{2,\alpha}(u)\|_{L^p} \leqslant C\|S_\delta(u)\|_{L^p} \leqslant C\|u^*_\delta\|_{L^p} \leqslant C\|f\|_{L^p}. \tag{15}$$

Согласно одному варианту интерполяционной теоремы Рисса–Торина для пространств со смешанной нормой (см. [8, с. 316]) неравенства (14) и (15) влекут $(3'')$ для всех q, $2 \leqslant q \leqslant \infty$, и целых $\alpha_j \geqslant 1$.

В общем случае $m_j - 1 < \alpha_j \leqslant m_j$, $m_j \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leqslant j \leqslant n$, докажем теорему сначала при $n = 1$. Производную D^α представим в виде (см., например, [9, с. 52])

$$D^\alpha u = D^{-(m-\alpha)} D^m u + \sum_{k=1}^{m} D^{m-k} u(0) \, \frac{r^{m-\alpha-k}}{\Gamma(1+m-\alpha-k)}, \tag{16}$$

$$|r^\alpha D^\alpha u| \leqslant D^{-(m-\alpha)} |D^m u| + C_\alpha \sum_{k=1}^{m} |D^{m-k} u(0)|, \tag{17}$$

что ввиду леммы 3 позволяет свести оценку к рассмотренному случаю целых α. Интегрирование неравенства (17) с q-й степенью и мерой $(1-r)^{\alpha q-1} dr$ на $(0,1)$, а затем на окружности T^1 с p-й степенью приводит к $(3')$. При $0 < \alpha < 1$ получаем более сильное неравенство $(3'')$, так как расходимости интеграла в нуле не возникает и можно оценить (16) без умножения на r^α.

При $n = 2$ представление (16) приобретает вид

$$\begin{aligned} D^{(\alpha_1,\alpha_2)} u(z_1,z_2) &= D^{(-(m_1-\alpha_1),-(m_2-\alpha_2))} D^{(m_1,m_2)} u(z_1,z_2) \\ &+ \sum_{k_1=1}^{m_1} D^{m_1-k_1}_{r_1} D^{\alpha_2}_{r_2} u(0,z_2) \, \frac{r_1^{m_1-\alpha_1-k_1}}{\Gamma(1+m_1-\alpha_1-k_1)} \\ &+ \sum_{k_2=1}^{m_2} D^{\alpha_1}_{r_1} D^{m_2-k_2}_{r_2} u(z_1,0) \, \frac{r_2^{m_2-\alpha_2-k_2}}{\Gamma(1+m_2-\alpha_2-k_2)} \\ &- \sum_{k_1=1}^{m_1} \sum_{k_2=1}^{m_2} D^{(m_1-k_1,m_2-k_2)} u(0,0) \, \frac{r^{m-\alpha-k}}{\Gamma(1+m-\alpha-k)}. \end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения с использованием оценки одномерного случая ведут к $(3')$ и $(3'')$. Ясно, что процедуру можно распространить на все $n \geqslant 1$.

Доказательство теоремы 2. Ввиду леммы 3 и условий (4) достаточно доказать теорему лишь для $0 < \alpha_j < 1$. Вначале положим $1 < q \leqslant 2$. Для произвольного фиксированного $r \in I^n$ рассмотрим линейный функционал на $L^{p'}(T^n)$, порожденный функцией $u(z)$:

$$F_u(v) = \int_{T^n} u(rw) v(w) \, dm_n(w), \qquad v(w) \in L^{p'}(T^n).$$

Считая, что $v(rw)$ – интеграл Пуассона функции $v(w)$ и $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ – малый положительный мультииндекс такой, что $0<\alpha_j+\gamma_j<1$, и воспользовавшись тождеством $r^\alpha D_r^\alpha=\eta^\alpha D_\eta^\alpha$, будем иметь

$$
\begin{aligned}
F_u(v)&=\int_{T^n} D_r^{-\alpha-\gamma}\,D_r^{\alpha+\gamma}u(rw)v(w)\,dm_n(w)\\
&=\frac{r^\gamma}{\prod\Gamma(\alpha_j+\gamma_j)}\int_{I^n}(1-\eta)^{\alpha+\gamma-1}\eta^\alpha\biggl[\int_{T^n} v(w)\,D_\eta^\alpha\,D_r^\gamma u(\eta rw)\,dm_n(w)\biggr]\,d\eta.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Преобразуем внутренний интеграл:

$$
\begin{aligned}
&\int_{T^n} v(w)\,D_\eta^\alpha\,D_r^\gamma u(\eta rw)\,dm_n(w)\\
&\quad=\int_{T^n} v(w)\,D_r^\gamma\biggl[\int_{T^n} P(\sqrt{\eta}\,rw,\zeta)\,D_\eta^\alpha u(\sqrt{\eta}\,\zeta)\,dm_n(\zeta)\biggr]\,dm_n(w)\\
&\quad=\int_{T^n} D_\eta^\alpha u(\sqrt{\eta}\,\zeta)\biggl[\int_{T^n} D_r^\gamma P(\sqrt{\eta}\,rw,\zeta)\,v(w)\,dm_n(w)\biggr]\,dm_n(\zeta)\\
&\quad=\int_{T^n} D_\eta^\alpha u(\sqrt{\eta}\,\zeta)\,D_r^\gamma v(\sqrt{\eta}\,r\zeta)\,dm_n(\zeta).
\end{aligned}
$$

Подставляя полученное в (18) и меняя порядок интегрирования, приходим к

$$
F_u(v)=C(\alpha,\gamma,n)\,r^\gamma\int_{T^n}\biggl[\int_{I^n}\eta^\alpha(1-\eta)^{\alpha+\gamma-1}D_\eta^\alpha u(\sqrt{\eta}\,\zeta)\,D_r^\gamma v(\sqrt{\eta}\,r\zeta)\,d\eta\biggr]\,dm_n(\zeta).
$$

Обозначая

$$
h_{q',\gamma}(r\zeta)=\biggl(\int_{I^n}(1-\eta)^{\gamma q'-1}\bigl|D_r^\gamma v(\sqrt{\eta}\,r\zeta)\bigr|^{q'}\,d\eta\biggr)^{1/q'}
$$

и дважды применяя неравенство Гёльдера, а затем теорему 1, получаем

$$
\begin{aligned}
|F_u(v)|&\leqslant C\int_{T^n} g_{q,\alpha}(u)(\zeta)\,h_{q',\gamma}(r\zeta)\,dm_n(\zeta)\\
&\leqslant C\|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}\,\|h_{q',\gamma}(r\zeta)\|_{L^{p'}(T^n)}\\
&\leqslant C(p,q,\alpha,\gamma,n)\|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}\,\|v\|_{L^{p'}(T^n)}.
\end{aligned}
$$

В силу двойственности $(L^{p'})^*=L^p$ будем иметь

$$
\|u(rw)\|_{L^p(T^n)}=\sup\bigl\{|F_u(v)|:\|v\|_{L^{p'}}=1\bigr\}\leqslant C\|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}.
$$

Теперь положим $0<q<1$ (при $q=1$ теорема очевидна). По лемме 4

$$
\begin{aligned}
|u(rw)|&\leqslant\frac{1}{\prod\Gamma(\alpha_j)}\int_{I^n}(1-\eta)^{\alpha-1}|D^\alpha u(\eta rw)|\,d\eta\\
&\leqslant C(\alpha,\delta,n)\bigl(u_\delta^*(w)\bigr)^{1-q}\int_{I^n}\frac{(1-\eta)^{\alpha-1}}{(1-\eta r)^{\alpha(1-q)}}|D^\alpha u(\eta rw)|^q\,d\eta\\
&\leqslant C(\alpha,\delta,n)\bigl(u_\delta^*(w)\bigr)^{1-q}\int_{I^n}(1-\eta)^{\alpha q-1}|D^\alpha u(\eta rw)|^q\,d\eta,
\end{aligned}
$$

где $u_\delta^*(w)$ – некасательная максимальная функция. Далее, применяя неравенство Гёльдера с индексами $1/q$ и $1/(1-q)$, получаем

$$\|u(rw)\|^p_{L^p(T^n)} \leqslant C\|u_\delta^*\|^{p(1-q)}_{L^p}\|g_{q,\alpha}(u)\|^{pq}_{L^p}.$$

Следовательно, в силу неравенства (13)

$$\|f\|_{L^p} = \|u(rw)\|_{L^p(T^n)} \leqslant C\|u_\delta^*\|^{1-q}_{L^p}\|g_{q,\alpha}(u)\|^q_{L^p} \leqslant C\|f\|^{1-q}_{L^p}\|g_{q,\alpha}(u)\|^q_{L^p},$$

что завершает доказательство теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Littlewood J. E., Paley R. E. A. C. Theorems on Fourier series and power series I // J. London Math. Soc. 1931. V. 6. P. 230–233; II // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1936. V. 42. P. 52–89.
[2] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. II. М.: Мир, 1965.
[3] Стейн И. М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
[4] Flett T. M. Mean values of power series // Pacific J. Math. 1968. V. 25. P. 463–494.
[5] Littlewood J. E. Some Problems in Real and Complex Analysis. Massachusetts: Raytheon Education Company, 1968.
[6] Zygmund A. On the boundary values of functions of several complex variables I // Fund. Math. 1949. V. 36. P. 207–235.
[7] Gundy R., Stein E. M. H^p theory for the poly-disc // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1979. V. 76. №3. P. 1026–1029.
[8] Benedek A., Panzone R. The spaces L^p with mixed norm // Duke Math. J. 1961. V. 28. P. 301–324.
[9] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

Ереванский государственный университет, Армения
E-mail: avetkaren@ysu.am

Поступило
25.02.2002