ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ • СООБЩЕНИЯ

УДК 539.3:62.50

Ю.Дж. ЮСИФ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Исследуется задача об оптимальной стабилизации колебаниями прямоугольной ортотропной цилиндрической оболочки, шарнирно опертой по краям. Оболочка стабилизируется при помощи управляющего воздействия, приложенного на ее верхней поверхности. Задача решается методом Фурье, после чего получается бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по времени с разделяющимися переменными. Определяется оптимальное управляющее воздействие для каждого уравнения.

Рассмотрим задачу об оптимальной стабилизации колебаниями однородной ортотропной тонкой цилиндрической оболочки постоянной толщины h. Аналогичная задача для ортотропной прямоугольной пластинки была рассмотрена в [1]. Пусть оболочка перекрывает прямоугольник со сторонами a и b. Обозначим криволинейные ортогональные координаты точки на поверхности оболочки через α и β. Для рассматриваемой оболочки принята техническая теория [2].

В случае, когда оболочка загружена лишь нормально приложенной поверхностной нагрузкой $Q(\alpha,\beta,t)$ (t — время), получим следующее дифференциальное уравнение колебаний для потенциальной функции $\Psi(\alpha,\beta,t)$ [3]:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[L_2(C_{ji})\Psi]+\frac{g}{h\gamma}L_1(D_{ji})\Psi=\frac{g}{h\gamma}Q(\alpha,\beta,t), \tag{1}$$

где $L_2(C_{ji})$ и $L_1(D_{ji})$ — дифференциальные линейные операторы соответственно четвертого и восьмого порядка [2], g — ускорение силы тяжести γ — удельный вес материала, C_{ji},D_{ji} — жесткости.

Предположим, что оболочка шарнирно оперта по всему контуру [2,3], а начальные условия имеют вид

$$w/_{t=0}=f(\alpha,\beta), \qquad \frac{\partial w}{\partial t}/_{t=0}=\varphi(\alpha,\beta). \tag{2}$$

Здесь $f(\alpha,\beta)$, $\varphi(\alpha,\beta)$ — начальный прогиб и начальная скорость.

При решении этой задачи минимизируется функционал

$$I=V+K+\frac{g\varkappa}{h\gamma}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^b\int\limits_0^a Q^2ABd\alpha d\beta dt, \tag{3}$$

где V и K — соответственно потенциальная и кинетическая энергия оболочки [3], а последнее слагаемое характеризует интенсивность внешнего воздействия.

Краевым условиям [3] удовлетворим, представляя искомую функцию $\Psi(\alpha,\beta,t)$ и интенсивность поперечной нагрузки $Q(\alpha,\beta,t)$ в виде двойного ряда Фурье:

$$\Psi(\alpha,\beta,t) = \sum_{k,n=1}^{\infty} T_{k,n}(t) \sin\frac{k\pi}{a}\alpha \sin\frac{n\pi}{b}\beta, \tag{4}$$

$$Q(\alpha,\beta,t) = \sum_{k,n=1}^{\infty} u_{k,n}(t) \sin\frac{k\pi}{a}\alpha \sin\frac{n\pi}{b}\beta. \tag{5}$$

Подставляя значения $\Psi(\alpha,\beta,t)$ и $Q(\alpha,\beta,t)$ соответственно из (4) и (5) в (3), получим

$$I = \lambda \int_0^{\infty} \sum_{k,n=1}^{\infty} [\lambda_{k,n}^2 T_{k,n}'^2(t) + \lambda_{k,n} H_{k,n} T_{k,n}(t) + \frac{1}{2}\mu^2 \varkappa u_{k,n}^2(t)]\, dt, \tag{6}$$

где

$$\lambda_{k,n} = \frac{c_{11}}{\Omega A^4}\left(\frac{k\pi}{a}\right)^4 + \frac{1}{A^2B^2}\left(\frac{1}{C_{66}} - 2\frac{C_{12}}{\Omega}\right)\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \frac{C_{22}}{\Omega B^4}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4,$$

$$H_{k,n} = \frac{1}{2}\mu\Big\{ \lambda_{k,n}\Big[\frac{D_{11}}{A^4}\left(\frac{k\pi}{a}\right)^4 + \frac{2}{A^2B^2}(D_{12} + 2D_{66})\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 +$$

$$+ \frac{D_{22}}{B^4}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4\Big] + \frac{1}{A^4R^2}\left(\frac{k\pi}{a}\right)^4\Big\},$$

$$\lambda = \frac{ab}{4\mu AB}, \qquad \mu = \frac{2g}{h\gamma}.$$

Подставляя выражения (4) и (5) в уравнение (1), умножая на $\sin\frac{k\pi}{a}\alpha \sin\frac{n\pi}{b}\beta$ и интегрируя на $([0,a] \times [0,b])$, получим

$$T_{k,n}''(t) + \frac{H_{k,n}}{\lambda_{k,n}} T_{k,n}(t) = \frac{1}{2\lambda_{k,n}} \mu u_{k,n}(t), \quad k,n = 1,2.... \tag{7}$$

Таким образом, мы получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка во времени с постоянными коэффициентами (7) и начальными условиями

$$T_{k,n}/_{t=0} = a_{k,n}, \qquad T_{k,n}'/_{t=0} = b_{k,n}, \tag{8}$$

где

$$a_{k,n} = \frac{4}{ab\lambda_{k,n}} \int_0^b \int_0^a f(\alpha,\beta) \sin\frac{k\pi}{a}\alpha \sin\frac{n\pi}{b}\beta AB d\alpha, d\beta,$$

$$b_{k,n} = \frac{4}{ab\lambda_{k,n}} \int_0^b \int_0^a \varphi(\alpha,\beta) \sin\frac{k\pi}{a}\alpha \sin\frac{n\pi}{b}\beta AB d\alpha d\beta, \quad (k,n = 1,2,...) -$$

коэффициенты разложения прогиба и скорости оболочки при $t = 0$. Так как каждое уравнение системы (7) не зависит от других уравнений, а функционал

$$I_{k,n} = \lambda \int_0^{\infty} [\lambda_{k,n}^2 T_{k,n}'^2(t) + \lambda_{k,n} H_{k,n} T_{k,n}(t) + \frac{1}{2}\mu^2 \varkappa u_{k,n}^2(t)]\, dt \quad (k,n = 1,2,...), \tag{9}$$

зависит только от переменных, входящих в (k,n)-ое уравнение системы (7), то можно минимизировать функционал (6), минимизируя каждое из независимых функционалов (9).

Таким образом, эта задача сводится к задаче аналитического конструирования оптимального регулятора [4] для каждого (k,n) $(k,n = 1,2,...)$.

При решении задачи об аналитическом конструировании оптимального регулятора функция $u_{k,n}$ ищется в виде

$$u^{(t)}_{k,n}=\gamma_{k1,n1}T_{k,n}(t)+\gamma_{k2,n2}T'^{(t)}_{k,n} \qquad (10)$$

где $\gamma_{k1,n1},\gamma_{k2,n2}$ — постоянные, затем записывается уравнение Ляпунова-Беллмана , и аналогично работе [4] получим решение в следующем виде:

$$\gamma_{k1,n1}=\frac{2}{\mu}[H_{k,n}-\sqrt{H^2_{k,n}+\frac{1}{2\varkappa}\lambda_{k,n}H_{k,n}}],$$

$$\gamma_{k2,n2}=-\frac{1}{\mu}\sqrt{2\lambda_{k,n}(\frac{\lambda_{k,n}}{\varkappa}-2\mu\gamma_{k1,n1})}, \quad k,n=1,2,.... \qquad (11)$$

Для определения функций $u_{k,n}$ как функций от времени нужно интегрировать систему (10) при начальных условиях (8). Решая системы (7),(8), затем подставляя $T_{k,n}$ и $T'_{k,n}$ в (10), получим

$$u_{k,n}(t)=\frac{1}{\theta_{k1,n1,}-\theta_{k2,n2}}[(b_{k,n}-a_{k,n}\theta_{k2,n2})(\gamma_{k1,n1}+\theta_{k1,n1}\gamma_{k2,n2})exp(\theta_{k1,n1}t)+$$

$$+(a_{k,n}\theta_{k1,n1}-b_{k,n})(\gamma_{k1,n1}+\theta_{k2,n2}\gamma_{k2,n2})exp(\theta_{k2,n2}t)],k,n=1,2,..., \qquad (12)$$

где

$$\theta_{ki,ni}=\frac{\mu}{4\lambda_{k,n}}\gamma_{k2,n2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu^2}{4\lambda^2_{k,n}}\gamma^2_{k2,n2}+\frac{2}{\lambda_{k,n}}+\mu\gamma_{k1,n1}-\frac{4}{\lambda_{k,n}}H_{k,n}}, \quad i=1,2. \qquad (13)$$

Таким образом, оптимальное значение стабилизирующего воздействия Q (α,β,t) (5) построено.

Замечание. Так как $\frac{\partial^8\Psi}{\partial\alpha^{8-j}\partial\beta^j},\frac{\partial^6\Psi}{\partial t^2\partial\alpha^{4-i}\partial\beta^i}(j=0,1,...,8,i=0,1,...,6)$ принадлежит по крайней мере классу $L_2([0,a]\times[0,b],[0,\infty])$, т.е. ряды

$$\sum_{k,n=1}^{\infty}(k^{8-j}n^ja_{k,n})^2, \quad j=0,1,2,...,8,$$

$$\sum_{k,n=1}^{\infty}(k^{6-i}n^ib_{k,n})^2, \quad i=0,1,2,...6, \qquad (14)$$

сходятся [5], то двойной ряд $\sum\limits_{k,n=1}^{\infty}u^2_{k,n}(t),t\geqslant 0$, равномерно сходится, а минимальное значение функционала (9)

$$minI=2\lambda\sum_{k,n=1}^{\infty}\Bigg\{\Bigg[-\sqrt{\lambda_{k,n}(H^2_{k,n}+\frac{\lambda_{k,n}}{2\varkappa}H_{k,n})(\frac{\lambda_{k,n}}{2\varkappa}-2H_{k,n}+}$$

$$\overline{+2\sqrt{H^2_{k,n}+\frac{\lambda_{k,n}}{2\varkappa}H_{k,n})}}\Bigg]\cdot a^2_{k,n}+$$

$$+2\lambda_{k,n}\left[\sqrt{H^2_{k,n}+\lambda_{k,n}H_{k,n}/2\varkappa}-H_{k,n}\right]a_{k,n}b_{k,n}+$$

$$\Bigg\{+\lambda_{k,n}\sqrt{\lambda_{k,n}(\frac{\lambda_{k,n}}{2\varkappa}-2H_{k,n}+2\sqrt{H_{k,n}+\frac{1}{2\varkappa}\lambda_{k,n}H_{k,n}})}\,b^2_{k,n}$$

ограничено.

Таким образом, определенная функция Q (α,β,t) принадлежит классу L_2 и оптимально стабилизирует колебательное движение оболочки при минимизации значения функционала (9).

Кафедра механики сплошной среды,
кафедра теоретической механики

Поступило 19.12.1988

ЛИТЕРАТУРА

1. **Саркисян В.С., Габриелян М.С., Юсиф Ю.Дж.** Об оптимальной стабилизации ортотропной прямоугольной пластинки. — Уч. зап.ЕГУ, 1987, №3.
2. **Амбарцумян С.А.** Теория анизотропных оболочек. М.:Госиздат физ.-мат. литературы, 1961.
3. **Саркисян В.С.** Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ер.:Изд-во ЕГУ, 1976.
4. **Летов А.М.** Автоматика и телемеханика, 1960, т. 21,№4, 5,6; 1961, т. 22,№4.
5. **Колмогоров А.М.,Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է եզրերով հոդակապորեն ամրացված ուղղանկյուն օրթոտրոպ գլանային թաղանթի տատանման օպտիմալ կայունացման խնդիրը: Կայունացումը կատարվում է կառավարող ազդեցությամբ, որը կիրառվում է թաղանթի վերևի մակերևույթին:

Խնդիրը լուծվում է Ֆուրյեի մեթոդով, որից հետո ստացվում է ժամանակից կախված, անջատվող փոփոխականներով երկրորդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների անվերջ համակարգ:

Որոշվում է օպտիմալ կառավարող ազդեցությունը յուրաքանչյուր հավասարման համար: Ուղղանկյուն օրթոտրոպ սալի համար նմանատիպ խնդիր դիտարկվել է:

SUMMARY

The optimum stabilization problem of the oscillations for an orthotropic rectangular cylindrical shell, fixed at the edges by hinges, has been studied.

The shell becomes stable by means of supplementary control action on its upper surface. The problem has been solved by Fourier's method,which gives an infinite system of second-order with ordinary differential equations and separable variables. The optimum control action for each equation has been determined. A similar problem for a rectangular orthotropic plate has been already considered[1].