ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ • СООБЩЕНИЯ

УДК 513.813

Н. Г. ГАЛСТЯН

ОБ ИЗОТРОПНО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ В V_n.

В данной работе ставится задача существования изотропно-параллельных гиперповерхностей для данной V^1_{n-1} в V_n. Определяются ковариантные компоненты версора и метрического тензора $\overset{*}{V}{}^1_{n-1}$, тензор второй квадратичной формы. С помощью инвариантов указывается метод инвариантного оснащения.

I. **Введение.** В римановом пространстве V_n с метрикой $ds^2 = a_{\alpha\beta}(y) \times dy^\alpha dy^\beta$ рассмотрим изотропную гиперповерхность V^1_{n-1}

$$y^\alpha = y^\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}), \quad \text{ранг } (y_i^\alpha) = n-1, \text{ где } y_i^\alpha \equiv \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}, \tag{1.1}$$

с метрическим тензором

$$g_{ij} = a_{\alpha\beta} y_i^\alpha y_j^\beta, \text{ причем ранг } (g_{ij}) = n-2 \tag{1.2}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots = 1, 2, \ldots, n; \quad i, j, k, l, \ldots = 1, 2, \ldots, n-1),$$

и изотропным вектором нормали

$$\mu^\alpha = \mu^i y_i^\alpha; \quad \mu^i g_{ij} = 0; \qquad a_{\alpha\beta}\mu^\alpha y_i^\beta = 0; \quad a_{\alpha\beta}\mu^\alpha\mu^\beta = 0. \tag{1.3}$$

С помощью вектора λ_i, удовлетворяющего условию

$$\mu^i \lambda_i = 0, \tag{1.4}$$

однозначно определяется вектор оснащения V^1_{n-1}:

$$a_{\alpha\beta} n^\alpha y_i^\beta = \lambda_i; \quad a_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = 0; \quad a_{\alpha\beta} n^\alpha \mu^\beta = 1. \tag{1.5}$$

После оснащения определяются тензор второй квадратичной формы

$$b_{ij} = a_{\alpha\beta} y_i^\alpha \mu^\beta_{,\gamma} y_j^\gamma = \mu^l T^l_{ij}; \quad \mu^i b_{ij} = 0; \tag{1.6}$$

$$T_{l,ij} = \frac{1}{2}(\partial g_{il}/\partial x^j + \partial g_{jl}/\partial x^i - \partial g_{ij}/\partial x^l),$$

версор $C_{ij}=g_{ij}+\lambda_i\lambda_j$, ранг $(C_{ij})=n-1$,
и контравариантные компоненты метрического тензора

$$g^{ij}=C^{ij}-\mu^i\mu^j;\quad g^{ij}\lambda_j=0;\quad g^{ij}g_{jl}=\delta^i_l-\mu^i\lambda_l, \tag{1.7}$$

где

$$C^{ij}C_{jl}=\delta^i_l.$$

В данной работе рассматриваются просто-регулярные V^1_{n-1}, то есть ранг

$$(b_{ij})=n-2,\quad \sigma=g^{ij}b_{ij}\neq 0. \tag{1.8}$$

Будем считать, что произведен инвариантный выбор вектора нормали [1], то есть $\sigma=1$.

2. **Изотропно-параллельные** $\overset{*}{V}{}^1_{n-1}$. Если для данной изотропной гиперповерхности существуют функции $\varphi^\alpha(x^1, x^2, x^{n-1})$ такие, что $\varphi_i{}^\alpha=p_i\mu^\alpha$, где p_i —произвольное векторное поле, то уравнения

$$\overset{*}{y}{}^\alpha(x)=y^\alpha(x)+\varphi^\alpha(x) \tag{2.1}$$

определяют изотропную гиперповерхность $\overset{*}{V}{}^1_{n-1}$, которая имеет тот же самый метрический тензор, что и V^1_{n-1}:

$$\overset{*}{g}_{ij}=a_{\alpha\beta}\overset{*}{y}{}^\alpha_i\overset{*}{y}{}^\beta_j=g_{ij}(x). \tag{2.2}$$

Следовательно, вектор нормали $\overset{*}{V}{}^1_{n-1}$

$$\overset{*}{\mu}{}^i=\mu^i;\quad \overset{*}{\mu}{}^\alpha=\overset{*}{\mu}{}^i\overset{*}{y}{}^\alpha_i=\frac{1}{\gamma}\mu^\alpha;\quad \frac{1}{\gamma}=1+\mu^l p_l. \tag{2.3}$$

Задача существования $\overset{*}{V}{}^1_{n-1}$ сводится к задаче нахождения функций $\varphi^\alpha(x)$.

Однако, не ограничивая общности исследования, можем искать эти функции в виде решений уравнений $\varphi^\alpha_i=\delta^k_i\mu^\alpha$, где k—некоторое фиксированное число от ряда 1, 2, ..., $(n-1)$, из условий интегрируемости которых

$$\frac{\partial^2\varphi^\alpha}{\partial x^{[i}\partial x^{j]}}=\frac{1}{2}\delta^k_{[i}\partial_{j]}\mu^\alpha \tag{2.4}$$

следует, что $\partial_l\mu^\alpha=0$; $l\neq k$. Мы приходим к следующему заключению: если существует система координат, в которой все компоненты вектора нормали μ^α зависят только от одной координаты, то условия интегрируемости (2.4) выполняются, уравнения $\varphi^\alpha_i=\delta^k_i\mu^\alpha$ интегрируемы, уравнения (2.1) описывают изотропную гиперповерхность $\overset{*}{V}{}^1_{n-1}$, вообще говоря, отличную от данной, которая имеет ту же самую метрическую форму, что и данная V^1_{n-1}. Гиперповерхность $\overset{*}{V}{}^1_{n-1}$ называется изотропно-параллельной гиперповерхностью.

3. **Оснащение.** За вектор оснащения $\overset{*}{V}{}^1_{n-1}$ возьмем

$$\overset{*}{n}{}^\alpha=\gamma n^\alpha;\quad a_{\alpha\beta}\overset{*}{n}{}^\alpha\overset{*}{n}{}^\beta=0;\quad a_{\alpha\beta}\overset{*}{n}{}^\alpha\overset{*}{\mu}{}^\beta=1; \tag{3.1}$$

$$\overset{*}{\lambda}_i=a_{\alpha\beta}\overset{*}{n}{}^\alpha\overset{*}{y}{}^\beta_i=\gamma(\lambda_i+p_i). \tag{3.2}$$

Из соотношений (1.6), (1.8) и (2.3) следует, что

$$\overset{*}{b}_{ij}=b_{ij};\quad \overset{*}{\mu}{}^i b_{ij}=0;\quad \text{ранг }(\overset{*}{b}_{ij})=(n-2). \tag{3.3}$$

Определим версор

$$\overset{*}{C}_{ij}=\overset{*}{g}_{ij}+\overset{*}{\lambda}_i\overset{*}{\lambda}_j=g_{ij}+\overset{*}{\lambda}_i\overset{*}{\lambda}_j\quad \mathrm{Det}(C_{ij})\neq 0. \tag{3.4}$$

Простой проверкой можно убедиться, что контравариантные компоненты версора имеют вид

$$\overset{*}{C}{}^{ij}=C^{ij}-\gamma(\mu^i p^j+\mu^j p^i)+\delta\mu^i\mu^j, \tag{3.5}$$

где

$$p^i=C^{ij}p_j;\quad \delta=(1-\gamma^2-\gamma p^l p_l)/1-\gamma,$$

притом

$$\overset{*}{C}{}^{ij}\overset{*}{C}_{jl}=\delta^i_l;\quad \overset{*}{C}_{il}\mu^l=\overset{*}{\lambda}_i. \tag{3.6}$$

Свертывая последнее выражение с $\overset{*}{C}{}^{ij}$, получим

$$\mu^j=\overset{*}{C}{}^{ij}\overset{*}{\lambda}_i. \tag{3.7}$$

С помощью $\overset{*}{C}{}^{ij}$ определяются контравариантные компоненты $\overset{*}{g}{}^{ij}$:

$$\overset{*}{g}{}^{ij}=\overset{*}{C}{}^{ij}-\mu^i\mu^j=g^{ij}-\gamma(\mu^i p^j+\mu^j p^i)+(\delta-1)\mu^i\mu^j, \tag{3.8}$$

которые в силу (3.7) удовлетворяют условию

$$\overset{*}{g}{}^{ij}\overset{*}{\lambda}_j=0;\quad \overset{*}{g}{}^{ij}g_{jl}=\delta^i_l-\mu^i\overset{*}{\lambda}_l. \tag{3.9}$$

Оказывается, что тензоры второй квадратичной формы $\overset{*}{V}{}^1_{n-1}$ и V^1_{n-1} совпадают:

$$\overset{*}{b}_{ij}=b_{ij}=\mu^l T_{l,ij}. \tag{3.10}$$

С помощью невырожденного тензора

$$\overset{*}{\gamma}_{ij}=b_{ij}+\overset{*}{\lambda}_i\overset{*}{\lambda}_j;\qquad \overset{*}{\gamma}{}^{ij}\overset{*}{\gamma}_{jl}=\delta^i_l \tag{3.11}$$

определяются контравариантные компоненты в виде

$$\overset{*}{b}{}^{ij}=\overset{*}{\gamma}{}^{ij}-\overset{*}{\mu}{}^i\overset{*}{\mu}{}^j=b^{ij}-\gamma\mu^{(i}b^{j)h}p_h-\tau\mu^i\mu^j, \tag{3.12}$$

где

$$\tau=\gamma^2 b^{ij}p_ip_j.$$

В силу (3.8) и (3.10) скаляр

$$\overset{*}{\sigma}=\overset{*}{g}{}^{ij}\overset{*}{b}_{ij}=\sigma=1.$$

Получается, что выбор вектора оснащения $\overset{*}{n}{}^{\alpha}$ в виде (3.1) влечет за собой инвариантный выбор $\overset{*}{\mu}{}^{i}=\mu^{i}$.

Учитывая выражение (3.12), получим

$$\overset{*}{\rho}=\overset{*}{b}{}^{ij}\overset{*}{g}_{ij}=b^{ij}g_{ij}=\rho,$$

то есть имеет место следующая

Теорема. Инвариант ρ изотропной гиперповерхности V^1_{n-1} является также инвариантом и для $\overset{*}{V}{}^1_{n-1}$.

Следовательно, с помощью ρ можно произвести инвариантное оснащение [2].

Кафедра геометрии и высшей алгебры *Поступило 4.10.1980*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Галстян Н. Г.** О геометрии изотропных гиперповерхностей.—ДАН Арм. ССР, т. XLIX, 4, 1969.
2. **Галстян Н. Г.** Инвариантное оснащение изотропных гиперповерхностей.—ДАН Арм. ССР, 1969, т. 50, № 3.

Ն. Գ. ԳԱԼՍՏՅԱՆ

ԻԶՈՏՐՈՊ-ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՀԻՊԵՐՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԸ V_n -ՈՒՄ

Ամփոփում

Աշխատանքում ստացված են այն պայմանները, որոնց դեպքում ռիմանյան V_n տարածության իզոտրոպ V^1_{n-1} հիպերմակերևույթների համար գոյություն ունեն իզոտրոպ-զուգահեռ հիպերմակերևույթներ նույն մետրիկական տենզորով։ Կատարված է այդպիսի մակերևույթի հագեցումը, նորմալի վեկտորի ինվարիանտ ընտրությունը, նշված է ինվարիանտ հագեցման մեթոդ։