ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ **3, 1981** **Естественные науки**

УДК 539.3

В. С. САРКИСЯН, Э. Х. ГРИГОРЯН, А. В. КЕРОПЯН

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОСТИ ПОЛОСЫ С КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫМ УПРУГИМ БЕСКОНЕЧНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Рассматривается периодическая контактная задача для упругой бесконечной полосы с кусочно-однородным упругим бесконечным включением с модулями упругости E_1, E_2, периодически меняющимися вдоль оси включения.

Решение задачи при помощи интегрального преобразования Фурье сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Показывается, что тангенциальные контактные напряжения на частях изменения жесткостей имеют логарифмическую особенность, а нормальные—конечный скачок. Такое поведение контактных напряжений обусловлено неоднородностью включения.

Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками, имеющими одинаковые модули упругости, рассматривалась в работе [1]. Такие же задачи для бесконечных тел исследованы в [2—3].

Пусть упругая бесконечная полоса (модуль упругости E, коэффициент Пуассона ν и толщина 2H) жестко соединена с недеформируемыми основаниями гранями $y=\pm H$ и содержит бесконечное кусочно-однородное упругое включение малой толщины h с модулями упругости E_1, E_2, периодически меняющимися по длине включения. Требуется определить законы распределения тангенциальных $\tau(x)$ и нормальных $q(x)$ контактных напряжений вдоль линии соединения включения с полосой, когда в средней точке однородного материала включения действуют периодически повторяющиеся сосредоточенные силы, которые направлены вдоль оси включения в одну сторону.

Здесь относительно включения предпринимаются известные предположения Мелана [4].

Согласно вышеуказанным предположениям уравнение равновесия включения будет иметь вид [5—8]

$$\frac{d^2u^{(1)}}{dx^2}=\frac{2\tau_1(x)}{E_1h}+\frac{2\tau_2(x)}{E_2h}-u_0'\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\delta(x+a-4an)-\delta(x-a-4an)]-$$

$$-\frac{P}{E_1h}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-4an)-\frac{P}{E_2h}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-2a-4an),\quad -\infty<x<\infty, \tag{1}$$

при условии

$$\left.\frac{du^{(1)}}{dx}\right|_{x=a+0}-\left.\frac{du^{(1)}}{dx}\right|_{x=a-0}=u_0'\neq 0.$$

Здесь

$$\tau_1(x)=p_1(x)\tau(x),\quad \tau_2(x)=p_2(x)\tau(x),\quad \tau(x)=\tau_1(x)+\tau_2(x), \tag{2}$$

$$p_1(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\theta(x+a-4an)-\theta(x-a-4an)],\ p_1(x)=p_1(x+4a),$$

$$p_2(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\theta(x-a-4an)-\theta(x+a-4a(n+1))],\ p_2(x)=p_2(x+4a),$$

$$p_1(x)+p_2(x)=1,$$

где $u^{(1)}(x)$—горизонтальные перемещения точек включения, p—интенсивность сосредоточенных сил, $\theta(x)$—функция Хевисайда, $\delta(x)$—функция Дирака.

С другой стороны, поскольку при $y=0$ $\bar{v}^{(2)}(\sigma)=0$, то для $\bar{q}(\sigma)$ имеем [6]

$$\bar{q}(\sigma)=K_1^*(\sigma)\bar{\tau}(\sigma),\quad -\infty<\sigma<\infty, \tag{3}$$

где $K_1^*(\sigma)$ имеет вид [6, 7].

В дальнейшем для краткости будем пользоваться обозначениями, принятыми в [6, 7].

В силу (3) для $\bar{u}^{(2)}(\sigma)$ имеем [7]

$$\bar{u}^{(2)}(\sigma)=K^*(\sigma)\bar{\tau}(\sigma),\ -\infty<\sigma<\infty. \tag{4}$$

Далее, в силу (1), (2), (4) и условия контакта

$$u^{(1)}(x)=u^{(2)}(x),\quad -\infty<x<\infty,$$

получим следующее функциональное уравнение на действительной оси:

$$\bar{\tau}(\sigma)=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2+K_1^{**}(\sigma)}\cdot\bar{\tau}_1(\sigma)-\frac{2i\mu u_0'\sin a\sigma}{\lambda_2+K_1^{**}(\sigma)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{i\sigma 4an}+$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\lambda_1 P}{\lambda_2+K_1^{**}(\sigma)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{i\sigma 4an}+\frac{\frac{1}{2}\lambda_2 P}{\lambda_2+K_1^{**}(\sigma)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{i\sigma 2a(2n+1)},\ -\infty<\sigma<\infty. \tag{5}$$

Здесь λ_1, λ_2, $K_1^{**}(\sigma)$ имеют вид [7].

Применив к (5) обратное преобразование Фурье, получим

$$\tau(x)=(\lambda_2-\lambda_1)\int_{-a}^{a}K(x-s)\tau(s)ds-\mu u_0'[K(x-a)-K(x+a)]+$$

$$+\frac{1}{2}\lambda_1 PK(x)+\frac{1}{2}\lambda_2 PK(x-2a),\ -\infty<x<\infty. \tag{6}$$

Здесь

$$K(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}k(x-4an),\quad k(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda_2+K_1^{**}(\sigma)}e^{-i\sigma x}\,ds. \tag{7}$$

Отметим, что в (6) имелось в виду условие $\tau_1(x+4a)=\tau_1(x)$.

Здесь для $k(x)$ воспользуемся представлением в виде $K(x)$, как это сделано в [7]. Тогда в силу (7) для $K(x)$ будем иметь

$$K(x)=\frac{A}{\pi}\ln\frac{1}{2\left|\sin\frac{\pi x}{4a}\right|}+R(x), \tag{8}$$

где $R(x)$—непрерывная функция в $[-a, a]$.

Для определения $\tau(x)$ на участке $|x|<a$ в (6) следует потребовать, чтобы $|x|<a$.

Постоянная u_0' будет определяться из условия

$$u_0'=\frac{E_1-E_2}{E_1E_2h}\left\{\int_{-a}^{a}\tau(s)\,ds-\frac{1}{2}P\right\}.$$

После определения $\tau(x)$ в силу (5) нормальные контактные напряжения $q(x)$ будут определяться из (3).

Здесь, как и в [7], можно показать, что в точках $x=\pm a$ $\tau(x)$ имеет логарифмическую особенность, а $q(x)$—конечный скачок. Отметим, что особенности в точках $x=\pm a$ обусловлены неоднородностью включения. Эти уравнения можно решать аналогичным приведенному в [7] методом последовательных приближений.

Кафедра механики сплошной среды *Поступило 28.10.1981*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.** Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками.—ПММ, 1969, т. 33, вып. 5, с. 813—844.
2. **Аванесян Р. Г., Саркисян В. С.** Некоторые контактные задачи о передаче нагрузки от периодически расположенных креплений к защемленным упругим полосам.—Всесоюзная конф. по теории упругости. Тезисы докладов. Изд-во АН Арм. ССР, Ереван, 1979, с. 16.
3. **Саркисян В. С.** Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1976, 534 с.
4. **Melan E.** Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen.—Ingr-Archiv, 1932 Bd. 3, Heft 2, s. 123—129.
5. **Григорян Э. Х.** Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости.—Уч. записки ЕГУ, 1979, № 3, с. 29—34.
6. **Керопян А. В.** Об одной контактной задаче для упругой полосы с кусочно-однородным включением.—Уч. записки ЕГУ, 1980, № 2, с. 42—48.
7. **Керопян А. В., Саркисян В. С.** Передача нагрузки от кусочно-однородного бесконечного включения к упругой полосе.—Уч. записки ЕГУ, 1980, № 3, с. 50—55.
8. **Шилов Г. Е.** Математический анализ. Второй спецкурс. М.: «Наука», 1965.

Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Է. Խ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Ա. Վ. ՔԵՐՈԲՅԱՆ

ԿՏՈՐ ԱՌ ԿՏՈՐ ՀԱՄԱՍԵՌ ԱՆՎԵՐՋ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՆԵՐԴԻՐՈՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՇԵՐՏԻ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկված է կտոր առ կտոր համասեռ անվերջ ներդիրով ուժեղացված, անվերջ առաձգական շերտի պարբերական կոնտակտային խնդիրը։ Դիտարկված է այն դեպքը, երբ անվերջ ներդիրը կազմված է երկու տարբեր նյութերից E_1 *և* E_2 *առաձգական հաստատուններով, որոնք պարբերաբար կրկնվում են ամբողջ ներդիրի երկարությամբ։*

Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ խնդրի լուծումը հանգեցվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծման։ Ցույց է տրված, որ այն մասերում, որտեղ փոփոխվում է նյութի կոշտությունը, շոշափող կոնտակտային լարումները ունեն լոգարիթմական եզակիություն, իսկ նորմալ կոնտակտային լարումները՝ վերջավոր թռիչք, որոնք պայմանավորված են ներդիրի անհամասեռությամբ։