ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1983 Естественные науки

УДК 518.9

К. В. САГАТЕЛЯН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ БЕСКОАЛИЦИОННЫХ ИГР ДВУХ ЛИЦ

Рассматривается игра двух лиц, в которой игроки являются антагонистами, однако вынуждены платить за право выбора своей стратегии. Доказывается, что такие игры в некотором смысле эквивалентны антагонистическим играм.

Рассмотрим бескоалиционную игру двух лиц $G=X, Y, H_1, H_2>$, в которой

$$H_1(x, y)=H(x, y)-\alpha(x),$$

$$H_2(x, y)=-H(x, y)-\beta(y),$$

где H—произвольная функция двух переменных. Эта игра отличается от антагонистической игры $<X, Y, H>$ лишь тем, что выбор стратегии у игроков связан с определенными затратами (выбор стратегии $x\in X$ обходится игроку в сумму $\alpha(x)$, стратегии $y\in Y$ —в сумму $\beta(y)$. Однако следующая теорема показывает, что это различие не влияет на стратегические особенности игры.

Теорема. Для того, чтобы ситуация (x°, y°) была ситуацией равновесия в игре G, необходимо и достаточно, чтобы (x°, y°) была ситуацией равновесия в антагонистической игре $<X, Y, H-\alpha+\beta>$.

Доказательство. Пусть (x°, y°)—ситуация равновесия в игре G. Это означает, что

$$\begin{cases} H(x^0, y^0)-\alpha(x^0)\geq H(x, y^0)-\alpha(x), & x\in X, \\ -H(x^0, y^0)-\beta(y^0)\geq -H(x^0, y)-\beta(y), & y\in Y. \end{cases}$$

То есть

$$\begin{cases} H(x^0, y^0)-\alpha(x^0)\geq H(x, y^0)-\alpha(x), & x\in X, \\ H(x^0, y^0)+\beta(y^0)\leq H(x^0, y)+\beta(y), & y\in Y\cdot \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} H(x^0, y^0)-\alpha(x^0)+\beta(y^0)\geq H(x, y^0)-\alpha(x)+\beta(y^0), & x\in X, \\ H(x^0, y^0)+\beta(y^0)-\alpha(x^0)\leq H(x^0, y)+\beta(y)-\alpha(x^0), & y\in Y. \end{cases}$$

Окончательно получаем, что для всех $x\in X$, $y\in Y$

$$H(x, y^0)-\alpha(x)+\beta(y^0)\leq H(x^0, y^0)-\alpha(x^0)+\beta(y^0)\leq H(x^0, y)-\alpha(x^0)+\beta(y),$$

то есть (x^0, y^0) есть ситуация равновесия в игре Γ.

Точно так же можно показать обратное, т. е. любая ситуация равновесия в игре Γ является ситуацией равновесия в игре G.

Следствие 1. Если ситуации (x^0, y^0) и (x', y') являются ситуациями равновесия в игре G, то ситуации (x^0, y') и (x', y^0) также являются ситуациями равновесия.

Следствие 2. Выигрыш игрока в игре G одинаков во всех ситуациях равновесия.

Как обычно, обозначим выигрыши игроков при применении ими смешанных стратегий следующим образом:

$$H(\mu, y)=\int_X H(x, y)d\mu,$$

$$H(x, \nu)=\int_Y H(x, y)d\nu,$$

$$H(\mu, \nu)=\int_{X\times Y} H(x, y)d(\mu\times\nu).$$

Здесь H—функция выигрыша, μ—смешанная стратегия первого игрока, ν—смешанная стратегия второго игрока.

Из следствия 2 следует, что по аналогии с антагонистическими играми можно однозначно определить значение игры G как пару (v_1, v_2):

$$v_i=H_i(\mu^0, \nu^0), \quad i=1, 2,$$

где (μ^0, ν^0)—некоторая ситуация равновесия в игре G. Легко можно доказывать следующие свойства оптимальных стратегий и значения игры для данного класса игр.

Свойство 1. Если существует такая стратегия μ^0 первого игрока, что для всех $y\in Y$

$$H_1(\mu^0, y)\geq c,$$

то $v_1\geq c$ (если v_1 существует).

Если существует такая стратегия ν^0 второго игрока, что для всех $x\in X$

$$H_2(x, \nu^0)\geq c,$$

то $v_2\geq c$ (если v_2 существует).

Свойство 2. Если существуют значение игры G и такая стратегия μ^0 первого игрока, что для всех $y\in Y$

$$H_1(\mu^0, y)\geq v_1,$$

то μ^0 есть оптимальная стратегия первого игрока.

Если существуют значение игры G и такая стратегия ν^0 второго игрока, что для всех $x\in X$

$$H_2(x,\ \nu^0)\geq v_2,$$

то ν^0 есть оптимальная стратегия второго игрока.

Кафедра теории оптимального управления и приближенных методов

Поступило 23.11.1982

Կ. Վ. ՍԱՂԱԹԵԼՅԱՆ

ԵՐԿՈՒ ԽԱՂԱՑՈՂԻ ՈՉ ԿՈԱԼԻՑԻՈՆ ԽԱՂԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է երկու խաղացողի այնպիսի խաղ, որտեղ խաղացողները անտագոնիստներ են, սակայն հարկադրված են վճարել իրենց ստրատեգիաները ընտրելու իրավունքի համար։ Ապացուցված է, որ այդպիսի խաղերը որոշ իմաստով համարժեք են անտագոնիստական խաղերին։