ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1,1991 Естественные науки

Математика

УДК 519.6

А.М.Н.ИБАДИ, Ю.А.КУТОЯНЦ

О СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ ОДНОЙ ОЦЕНКИ МИНИМАЛЬНОГО РАССТОЯНИЯ ДЛЯ ДИФФУЗИОННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

В этой работе исследуется задача оценки параметра θ по наблюдениям диффузионного процесса, когда функция S $(\cdot)$ (коэффициент сноса) является неизвестной, и рассматривается метод оценки минимального расстояния (ОМР), позволяющий построить состоятельность и асимптотическую нормальность к оценке параметра коэффициента сноса при $\varepsilon \to 0$.

Пусть по наблюдениям диффузионного процесса

$$dX_t=s_t(\theta,X_t)dt+\varepsilon dw_t,\ X_0=x_0,\ 0\leqslant t\leqslant T, \tag{1}$$

где w_t — винеровский процесс, требуется оценить значение параметра $\theta\in\Theta$, Θ — открытое подмножество R^d, и описать свойства оценки при $\varepsilon \to 0$.

При $\varepsilon=0$ решение (1) удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{dx_t}{dt} = s_t(\theta,x_t),\ x_0,\ 0\leqslant t\leqslant T. \tag{2}$$

Если бы наблюдалось непосредственно решение x_t, $0\leqslant t\leqslant \tau$, то θ можно было бы оценить следующим образом. Обозначим $x_t=x_t(\theta)$ и заметим, что

$$\hat\theta_\varepsilon = \arg\min_{y\in\Theta}\int_0^T\left[\frac{dx_t(\theta)}{dt} - s_t(y,x_t(\theta))\right]^2dt. \tag{3}$$

Разумеется, следует предположить, что выполнено условие R: для любого $h>0$

$$\inf_{|y-\theta|>h}\int_0^T[s_t(y,x_t)-s_t(\theta,x_t)]^2dt > 0.$$

Задачам оценки параметра θ диффузионного процесса (1) в различных постановках посвящены работы [1-3]. В основном там исследуются свойства ОМП $\hat\theta_\varepsilon$. В работе [4] введены непараметрические ядерные оценки

$$\hat f_\varepsilon(t) = \int_0^T G\left(\frac{\tau-t}{\varphi_\varepsilon}\right)dx_\tau, \tag{4}$$

функции $s(\theta,x_t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, и установлена их состоятельность.

Соотношение (3) наводит на мысль искать оценку параметра θ в виде

$$\tilde{\theta}_\varepsilon = \underset{y\in\Theta}{\mathrm{argmin}} \int_0^T \left[\frac{dX_t}{dt} - s_t(y,x_t)\right]^2 dt, \tag{5}$$

но реализовать эту процедуру, конечно, невозможно, так как процесс X_t не дифференцируем по t. Здесь заметим, что задача наша асимптотическая по постановке, поэтому мы и дифференцирование устроим "асимптотическое".

Вместо производной в (5) подставим случайный процесс

$$\xi_t = \frac{X_{t+\tau_\varepsilon} - X_t}{\tau_\varepsilon}, \tag{6}$$

где τ_ε — достаточно медленно стремящаяся к нулю функция. Процесс (6) отвечает оценке (4) с $\varphi_\varepsilon = \tau_\varepsilon$ и $G(u)=1$ при $u\in[0,1)$ и $G(u)=0$ при $u\notin[0,1]$.

Таким образом, в этой работе исследуется асимптотическое поведение оценки

$$\theta^*_\varepsilon = \underset{y\in\Theta}{\mathrm{argmin}} \int_0^T [\hat{f}_\varepsilon(t) - s_t(y,x_t)]^2 dt.$$

Мы покажем, что в естественных условиях эта оценка состоятельна и асимптотически нормальна.

Перейдем к формулировке вспомогательных утверждений и основного результата.

Всюду далее считаем выполненным условие L:

$$|s_t(\theta,x)-s_t(\theta,y)| \leqslant l\,|x-y|$$

$$|s_t(\theta,x)| \leqslant l(1+|x|),$$

гарантирующее существование и единственность решения уравнения (1) и эквивалентность всех мер $\{P_\theta^{(\varepsilon)},\ \theta\in\Theta\}$, порожденных этим процессом в пространстве реализаций $(C[0,T],\ B[0,T])$ [3].

Следующая лемма хорошо известна (см.напр.,[1], лемму 3.4.4 или [5]).

Лемма 1. Если выполнены условия L, то

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |X_t - x_t| \leqslant \varepsilon e^{lT} \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |w_t|$$

и

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} E|X_t - x_t|^2 \leqslant c\varepsilon^2.$$

Будем считать, что ядро $G(\cdot)$ удовлетворяет условиям G:

$$\int_A^B G(u)du = 1,\quad \int_A^B u^j G(u)du = 0,\quad j=1,\dots,k,$$

и $G(u)=0$ при $u\notin[A,B]$, $A<0$, $B>0$.

Теорема 1 [4]. Если выполнены условия L, G, $\varphi_\varepsilon\to 0$ и $\varepsilon^2\varphi_\varepsilon^{-1}\to 0$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\theta\in\Theta}\sup_{a\leqslant t\leqslant b} E|\hat{f}_\varepsilon(t) - s_t(\theta,x_t)|^2 = 0,$$

где a,b — произвольные числа, удовлетворяющие условию $0<a<b<T$.

Введем еще обозначения: вектор

$$\dot{s}_t(\theta,x_t(\theta)) = \frac{\partial s_t(\theta,x_t(\theta))}{\partial\theta} + \left.\frac{\partial s_t(\theta,x)}{\partial x}\right|_{x=x_t(\theta)} \cdot \frac{\partial x_t(\theta)}{\partial\theta}$$

и матрицу

$$I(\theta) = \int_0^T \dot{s}_t(\theta,x_t(\theta))\dot{s}_t(\theta,x_t(\theta))'\,dt,$$

где штрих означает транспонирование. Ниже мы также будем пользоваться обозначением

$$s_j(t) = \frac{ds_t(\theta,x_t(\theta))}{d\theta_j},\ j=1,\dots,d.$$

Основной результат этой работы — следующая

Т е о р е м а 2. Пусть функция $S_t(\theta,x)$ имеет k+1 непрерывных ограниченных производных по t и по x и две непрерывные производные по θ, а также выполнены условия R и невырожденность матрицы $I(\theta)$, т.е. при всех $\lambda\in R^d$ $(I(\theta)\lambda,\lambda)\geq c|\lambda|^2$, тогда ОМР θ^*_ε состоятельная,

$$P_\theta \lim_{\varepsilon\to 0} \theta^*_\varepsilon = \theta,$$

и асимптотически нормальная,

$$L_\theta\left\{(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta)\varepsilon^{-\frac{2k+2}{2k+3}}\right\} \Rightarrow N(a,\sigma),$$

параметры a и σ — будут выписаны ниже.

Доказательство заключается в проверке трех условий: идентифицируемости (И), дифференцируемости (Д) и сходимости (С) теоремы Миллара [6], которые в нашей задаче примут следующий вид ($\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0,T]$):

И: для любого h>0

$$\inf_{|\theta-\theta_0|>h} \|s(\theta_0,x(\theta_0))-s(\theta,x(\theta))\| > 0,$$

Д:

$$\|s(\theta,x(\theta))-s(\theta_0,x(\theta_0))-(\theta-\theta_0;\dot{s}(\theta_0,x(\theta_0))\| = o(|\theta-\theta_0|), \qquad (7)$$

причем матрица $I(\theta)=(\dot{s}_t(\theta),\dot{s}_t(\theta)^T)$ не вырождена, т.е. для любого $\lambda\in R^d$ $(I(\theta)\lambda,\lambda)\geq c|\lambda|^2$, где c>0 не зависит от $\theta\in\Theta$.

С: случайный процесс $\eta_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-\gamma}[\hat{f}_\varepsilon(t) - s_t(\theta_0,x_t(\theta_0))]$ по мере P_{θ_0} слабо сходится к гауссовскому процессу $\eta(t)$ со средним 0 и ковариационной функцией.

Сразу отметим, что условие (И) совпадает с нашим условием R различимости коэффициентов сноса.

Проверка условия (Д) заключается в применении формулы Тейлора к функции $s_t(\theta,x_t(\theta))$, что дает

$$\dot{s}_t(\theta,x_t(\theta)) = \frac{\partial s_t(\theta,x_t(\theta))}{\partial\theta} + \frac{\partial s_t(\theta,x_t(\theta))}{\partial x}\cdot\frac{\partial x_t(\theta)}{\partial\theta}.$$

Причем последние производные вычисляются с помощью уравнения (2). Обозначим вектор

$$\frac{\partial x_t(\theta)}{\partial\theta} = \dot{x}_t(\theta),$$

тогда $\dfrac{d\dot{x}_t(\theta)}{dt} = \dfrac{\partial s_t(\theta, x_t(\theta))}{\partial\theta} + \dfrac{\partial s_t(\theta, x_t(\theta))}{\partial x}\ \dot{x}_t(\theta).$

Подстановка этих выражений в сделанных предположениях позволяет убедиться в справедливости (7).

Для проверки условия (C) представим $\eta_\varepsilon(t)$ в виде

$$\eta_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-\gamma}\left[\frac{1}{\varphi_\varepsilon}\int_0^T G\left[\frac{t-\tau}{\varphi_\varepsilon}\right]s_\tau(\theta_0, X_\tau(\theta_0))d\tau - s_t(\theta_0, x_t(\theta_0)) + \right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon}{\varphi_\varepsilon}\int_0^T G\left[\frac{t-\tau}{\varphi_\varepsilon}\right]dw_\tau\right] = \varepsilon^{-\gamma}\left[\int_A^B G(u)[s_{t+u\varphi_\varepsilon}(\theta_0, X_{t+u\varphi_\varepsilon}(\theta_0)) - \right.$$

$$\left. - s_t(\theta_0, x_t(\theta_0))]du + \frac{\varepsilon}{(\varphi_\varepsilon)^{1/2}}\int G(u)d\tilde{w}_u\right],$$

где мы сделали замену $u=\varphi_\varepsilon^{-1}[t-\tau]$.

Отдельно рассмотрим разность

$$E[s_t(\theta_0, X_t(\theta_0)) - s_t(\theta_0, x_t(\theta_0))]^2 \leqslant L^2 E\,|X_t(\theta_0) - x_t(\theta_0)|^2 \leqslant L^2\cdot c\cdot\varepsilon^2,$$

где мы воспользовались условием L и леммой 1.

Следовательно, это слагаемое вклада не дает в асимптотику $\eta_\varepsilon(t)$, и следует рассматривать только выражение

$$\int G(u)[s_{t+u\varphi_\varepsilon}(\theta_0, X_{t+u\varphi_\varepsilon}(\theta_0) - s_t(\theta_0, x_t(\theta_0))]du =$$

$$= \int G(u)\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{u^j\varphi_\varepsilon^j}{j!}\cdot\frac{d^j s_t(\theta_0, x_t(\theta_0))}{dt^j}\right)du +$$

$$+ \int G(u)\frac{u^{k+1}}{(k+1)!}\varphi_\varepsilon^{k+1}s^{(k+1)}_{\tilde{\tau}}(\theta_0, x_{\tilde{t}}(\theta_0))du = \frac{\varphi_\varepsilon^k}{(k+1)!}\int u^{k+1}G(u)\tilde{s}(u)du,$$

где мы обозначим d^kS/dt^k – k-ую производную функции, $S_t(\theta, x_t)$ по t, вычисляемую по правилам дифференцирования сложных функций (в частности $\dfrac{ds_t(\theta, x_t)}{dt} = \dfrac{\partial s_t(\theta, x_t)}{\partial t} + \dfrac{\partial s_t(\theta, x_t)}{\partial x}\ s_t(\theta, x_t)$),

и воспользуемся условием G. Обозначим

$$g_t(\theta_0) = s_t^{(k+1)}\frac{(\theta_0, x_t(\theta_0))}{(k+1)!}\int u^{k+1}G(u)du,$$

тогда для $\eta_\varepsilon(t)$ получаем представление

$$\eta_\varepsilon(t) \simeq \varepsilon^{-\gamma}(g_t(\theta_0)\varphi_\varepsilon^{k+1} + \frac{\varepsilon}{(\varphi_\varepsilon)^{1/2}}\int G(u)d\tilde{w}_u).$$

Следовательно, если $\varphi_\varepsilon = \varepsilon^{2/(2k+3)}$, то положим $\gamma = \dfrac{2(k+1)}{2k+3}$ и придем в пределе к соотношению

$$\eta_\varepsilon(t) \Rightarrow g_t(\theta_0) + \int G(u)d\tilde{w}_u = \eta(t).$$

Таким образом, $\eta(t)$ – гауссовский случайный процесс, представленный в следующем виде: детерминированная функция плюс гауссовская случайная величина. По свойству стохастических интегралов [3]

$$E\int G(u)d\tilde{w} = 0,$$

$$E\left[\int G(u)d\widetilde{w}_u\right]^2 = \int G(u)^2 du = b^2$$

Для описания свойств оценок введем еще обозначения: $B_{\dot{s}}$ – пространство, натянутое на функции $\{\dot{s}_1(t),\dots,\dot{s}_d(t),\ 0\leqslant t\leqslant T\}$, π оператор проектирования из $L_2[0,T]$ в $B_{\dot{s}}$.

По правилу проецирования произвольная функция $g(\cdot)\in L_2[0,T]$ отображается в

$$\pi\cdot g(t) = \sum_{j=1}^{d} c_j \dot{s}_j(t),$$

где вектор $\vec{c}=(c_1,\dots,c_d)$ равен

$$\vec{c} = I^{-1}(\theta)\hat{g}.$$

Здесь

$$\hat{g} = \int g(t)\dot{s}(t)dt.$$

Если T – оператор проектирования из R^d в B_η по правилу $T(\lambda)= =(\lambda,\dot{S})$, то в силу невырожденности $I(\theta)$ существует обратный оператор T^{-1} из B_η в R^d. Это отображение также непрерывное и линейное.

По теореме Миллара, ОМР допускает представление

$$\varepsilon^{\frac{2k+2}{2k+3}}(\theta^*_\varepsilon-\theta_0) \Rightarrow -T^{-1}\cdot\pi\cdot\eta(\cdot) \tag{8}$$

и в наших обозначениях

$$\pi\cdot\eta(t) = \sum_{j=1}^{d} c_j\dot{s}_j(t),$$

где вектор

$$\vec{c} = I^{-1}(\theta)\eta^*$$

и

$$\eta^*_j = \int_0^T g(t)\dot{s}_j(t)dt + \eta\int_0^T \dot{s}_j(t)dt,$$

окончательно подставляя это в (8), приходим к соотношениям

$$\varepsilon^{\frac{2k+2}{2k+3}}(\theta^*_\varepsilon-\theta_0) \Rightarrow I^{-1}(\theta)\cdot\eta^* \equiv \zeta,$$

при этом

$$E\zeta = I^{-1}(\theta)\cdot\int_0^T g(t)\dot{s}(t)dt = a$$

и

$$\sigma = E\zeta\zeta' = I^{-1}(\theta)\int_0^T \dot{g}(t)\dot{s}(t)dt\int_0^T g(t)\dot{s}(t)'\,dt I^{-1}(\theta).$$

Следовательно, ОМР асимптотически нормальная с вектором средних a и ковариационной матрицей σ.

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

Поступила 8.12.1989

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kutoyants Yu.A.** Parameter estimation for stochastic processes. Berlin: Heldermann Verlag, 1984.

2. **Ибрагимов** И.А., **Хасьминский** Р.З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1975.
3. **Липцер** Р.М., **Ширяев** А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
4. **Kutoyants Yu.A.** On nonparametric estimation of the trend coefficient of diffusion process In Statist. and control of stochastic processes. - Steklov Seminar, 1984, New York, Optimization Software, 1985, p.230-250.
5. **Венцель** А.Д., **Фрейдлин** М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых возмущений. М.: Наука, 1979.
6. **Millar P.W.** The minimax principle in asymptotic statistical theory. - Lecture notes in mathematics, 1983,v.976,p.76-265.

Ա.Մ.Ն.ԻԲԱԴԻ, Յու.Ա.ԿՈՒՏՈՅԱՆՑ

ԴԻՖՈՒԶԻՈՆ ԴԻՏԱՐԿՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ՓՈՔՐԱԳՈՒՅՆ ՀԵՌԱՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ԳՆԱՀԱՏՄԱՆ ՀՆԱՐԱՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Այս աշխատանքում հետազոտվում է ըստ դիֆուզիոն պրոցեսի դիտարկման θ պարամետրի գնահատման խնդիրը, երբ $S(\cdot)$-ը (տեղաշարժի գործակիցը) անհայտ է, և դիտարկվում է փոքրագույն հեռավորության գնահատման (ՓՀԳ) մեթոդը, որը թույլ է տալիս կառուցել ունակությունը և տեղաշարժի գործակցի պարամետրի գնահատականի նկատմամբ ասիմպտոտիկ նորմալությունը, երբ $\varepsilon\to 0$:

A.M.N.EBADY, Yu.A.KUTOYANTS

ON CONSISTENCY OF MINIMAL DISTANCE ESTIMATE FOR DIFFUSION OBSERVATIONS

SUMMARY

This paper deals with the problem of the θ-parameter estimation of the $S(\cdot)$ function (drift coefficient), where it is unknown, by observations of diffusion processes. The method of minimal distance estimation which allows to construct consistency and asymptotic normality to the estimation of parameter of drift coefficient when $\varepsilon\to 0$, is discussed.