

Математика

УДК 517.9

А. А. МАМИКОНЯН

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА  
 НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СОБОЛЕВА

В данной работе рассматривается краевая задача с начальным условием

$$\begin{cases} A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + Bu = f, \\ u(0) = u_0, \\ D^\gamma u|_\Gamma = 0, |\gamma| \leq m, \end{cases}$$

и нелинейными дифференциальными операторами  $A$  и  $B$  следующего вида:

$$Au = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, t, D^\gamma u), \quad Bu = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha B_\alpha(x, t, D^\gamma u), \quad |\gamma| \leq m.$$

Мы получаем условия для функций  $A_\alpha(x, t, \xi_\gamma)$  и  $B_\alpha(x, t, \xi_\gamma)$ , при выполнении которых доказывается существование и единственность решения этой задачи в пространствах  $L^p(0, T, W_p^m)$  для  $p \geq 2$ .

Рассматривается следующая начально-краевая задача:

$$\begin{cases} A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + Bu = f, \\ u(0) = u_0, \\ D^\gamma u|_\Gamma = 0, |\gamma| \leq m, \end{cases} \quad (1)$$

где нелинейные операторы  $A$  и  $B$  имеют следующий вид:

$$Au = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, t, D^\gamma u), \quad (2)$$

$$Bu = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha B_\alpha(x, t, D^\gamma u), \quad |\gamma| \leq m, \quad (3)$$

и действуют в пространстве  $L^p(0, T, W_p^m(\Omega))$ ,  $\Omega \subset R^n$ ,  $\Gamma = \partial\Omega$  – достаточно гладкая граница  $\Omega$ .

При линейных операторах  $A$  и  $B$  эта задача рассматривалась во многих работах С.Л. Соболева, Р.С. Александрияна и их учеников (см., напр.,

[1, 2]). Случай, когда  $A$  – линейный оператор, а  $B$  – нелинейный, рассмотрен в работах [3–5]. Там же рассмотрен случай, когда операторы  $A$  и  $B$  имеют вырождения.  $L_2$ , теория задачи (1), в общем случае рассматривалась в [6]. В данной работе рассматривается вопрос о существовании и единственности решения задачи (1) при нелинейных операторах  $A$  и  $B$  вида (2), (3) в пространствах  $L^p(0, T, \mathcal{W}_p^m)$ ,  $p \geq 2$ .

1. Пусть  $X$  – вещественное рефлексивное сепарабельное банахово пространство. Через  $\langle f, u \rangle$  обозначим действие  $f \in X^*$  на  $u \in X$ , а нормы в  $X$  и  $X^*$  – соответственно через  $\|\cdot\|$  и  $\|\cdot\|_*$ .

*Определение 1.* Оператор  $A: X \rightarrow X^*$  называется

- радиально непрерывным, если  $\forall u, v \in X$  вещественная функция  $\varphi(s) = \langle A(u + sv), v \rangle$  непрерывна на  $[0, 1]$ ;

- липшиц-непрерывным, если существует такая постоянная  $M$ , что

$$\|Au - Av\|_* \leq M \|u - v\| \quad \forall u, v \in X.$$

*Определение 2.* Имеем  $u, v \in X$ . Оператор  $A: X \rightarrow X^*$  называется

- монотонным, если  $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0$ ;

- сильно монотонным, если  $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq m \|u - v\|^2$ ,  $m > 0$ .

Пусть  $S = [0, T]$ ,  $T > 0$ , а  $X$  – некоторое линейное пространство. Через  $(S \rightarrow X)$  обозначим пространство всех функций, действующих из  $S$  в  $X$ .

*Определение 3.* Пусть  $X_1, X_2$  – линейные пространства. Отображение  $G: D(G) \rightarrow (S \rightarrow X_2)$ ,  $D(G) \subset (S \rightarrow X_1)$ , называется оператором Вольтерры, если из равенства  $u(s) = v(s)$  для почти всех  $s \in [0, t]$ ,  $t \in S$ , следует, что  $(Gu)(s) = (Gv)(s)$  для почти всех  $s \in [0, t]$ ,  $t \in S$ .

Нетрудно доказать (см., напр., [6]), что для радиально непрерывного оператора Вольтерры существует обратный оператор  $A^{-1}: X^* \rightarrow X$ , который является липшиц-непрерывным оператором. Также нетрудно убедиться, что  $(C, k)$ -нормы, определенные для  $u \in C(S, X)$  формулой

$$\|u\|_{C, k} = \sup_{t \in S} \{e^{-kt} \|u(t)\|\}, \quad k \geq 0, \text{ эквивалентны норме } \|u\| = \sup_{t \in S} \|u(t)\| \text{ в } C(S, X).$$

*Лемма 1.* Если оператор Вольтерры  $G: L^p(S, X) \rightarrow L^p(S, X)$  липшиц-непрерывен, то  $\forall u, v \in L^p(S, X)$  и  $\forall t \in S$  имеет место  $\|Gu - Gv\|_{L^p([0, t], X)} \leq L \|u - v\|_{L^p([0, t], X)}$  (постоянная  $L$  не зависит от  $t$ ).

*Доказательство.* Пусть  $t \in S$ . Положим

$$u_t(s) = \begin{cases} u(s), & 0 \leq s \leq t, \\ 0, & t < s \leq T, \end{cases} \quad v_t(s) = \begin{cases} v(s), & 0 \leq s \leq t, \\ 0, & t < s \leq T. \end{cases}$$

Так как  $G$  – оператор Вольтерры, то

$$\|Gu - Gv\|_{L^p([0,t],X)} \leq \|Gu_t - Gv_t\|_{L^p(S,X)} \leq L \|u_t - v_t\|_{L^p(S,X)} \leq L \|u - v\|_{L^p([0,t],X)},$$

то есть лемма доказана.

Рассмотрим теперь следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} u' + Gu = f, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (4)$$

**Теорема 1.** Пусть оператор Вольтерры  $G: L^p(S, X) \rightarrow L^p(S, X)$  липшиц-непрерывен. Тогда  $\forall u_0 \in X$  и  $\forall f \in L^p(S, X)$  задача (4) имеет единственное решение.

*Доказательство.* Для начала заметим, что если  $u \in L^p(S, X)$  удовлетворяет уравнению  $u' + Gu = f$  для  $f \in L^p(S, X)$  и  $G: L^p(S, X) \rightarrow L^p(S, X)$ , то  $u' = f - Gu \in L^p(S, X)$ . Отсюда следует (см. [6], теоремы 1.6 и 1.7, гл. IV), что  $u \in C(S, X)$  и почти всюду сильно дифференцируема, а также что задача (4) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(t) = u_0 - \int_0^t ((Gu)(s) - f(s)) ds \quad \forall t \in S.$$

Вернемся к доказательству теоремы 1. Для  $u \in C(S, X)$  определим отображение  $U$  формулой  $(Uu)(t) = u_0 - \int_0^t ((Gu)(s) - f(s)) ds \quad \forall t \in S.$

Из непрерывной зависимости неопределенного интеграла Бохнера от интегрируемой функции следует, что  $U: C(S, X) \rightarrow C(S, X)$ . Согласно лемме 1,  $\forall u, v \in C(S, X)$

$$\begin{aligned} \|(Uu)(t) - (Uv)(t)\| &\leq \left\| \int_0^t (Gu)(s) - (Gv)(s) ds \right\| \leq T^{1/q} \left( \int_0^t \|Gu(s) - Gv(s)\|^p ds \right)^{1/p} = \\ &= T^{1/q} \|Gu - Gv\|_{L^p([0,t],X)} \leq LT^{1/q} \left( \int_0^t \|u(s) - v(s)\|^p ds \right)^{1/p} = LT^{1/q} \left( \int_0^t \|u(s) - v(s)\|^p e^{-pk} e^{pk} ds \right)^{1/p} \leq \\ &\leq LT^{1/q} \|u - v\|_{C,t} \left( \int_0^t e^{pk} ds \right)^{1/p} = LT^{1/q} \|u - v\|_{C,t} \left( \frac{e^{pk} - 1}{pk} \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\forall t \in S$

$$\|(Uu)(t) - (Uv)(t)\| e^{-kt} \leq L \frac{T^{1/q}}{(pk)^{1/p}} (1 - e^{-kt})^{1/p} \|u - v\|_{C,t} \leq L \frac{T^{1/q}}{(pk)^{1/p}} (1 - e^{-kT})^{1/p} \|u - v\|_{C,t}.$$

Подберем  $k$  таким образом, чтобы  $L \frac{T^{1/q}}{(pk)^{1/p}} \leq 1$ , то есть  $k \geq \frac{L^p T^{p/q}}{p}$ . Тогда

будем иметь  $\|Uu - Uv\|_{C,k} \leq \lambda \|u - v\|_{C,k}$ , где  $0 < \lambda < 1$ .

Согласно принципу неподвижной точки Банаха, существует единственный элемент  $u \in C(S, X)$ , для которого  $u = Uu$ , т.е.

$$u(t) = u_0 - \int_0^t ((Gu)(s) - f(s)) ds \quad \forall t \in S.$$

Следовательно  $u$  является решением задачи (4).

Теорема доказана.

*Замечание 1.* Определяемое соответствие  $\{u_0, f\} \rightarrow \{u, u'\}$  непрерывно как отображение  $X \times L^p(S, X) \rightarrow C(S, X) \times L^p(S, X)$ .

*Доказательство.* Пусть функции  $u_1, u_2 \in C(S, X)$  удовлетворяют при всех  $t \in S$  соотношениям

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u_{01} - \int_0^t ((Gu_1)(s) - f_1(s)) ds, \\ u_2(t) &= u_{02} - \int_0^t ((Gu_2)(s) - f_2(s)) ds. \end{aligned} \quad (5)$$

С учетом леммы 1 и в результате несложных оценок получаем:

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 \leq K_1 (\|u_{01} - u_{02}\| + \|f_1 - f_2\|)^2 + 2L^2 T \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|^2 ds,$$

где постоянная  $K_1$  зависит от  $T$ . Применяя лемму Грануолла (см., напр., [6], лемма 1.3), получаем  $\|u_1 - u_2\|_{C(S, X)} \leq K_2 (\|u_{01} - u_{02}\| + \|f_1 - f_2\|)$ . Из (5)

вытекает, что почти всюду на  $S$   $\|u_1'(t) - u_2'(t)\| \leq \|(Gu_1)(t) - (Gu_2)(t)\| + \|f_1(t) - f_2(t)\|$ . Отсюда с помощью несложных оценок получаем:

$$\|u_1' - u_2'\|_{L^p(S, X)} \leq K_3 (\|u_1 - u_2\|_{C(S, X)} + \|f_1 - f_2\|_{L^p(S, X)}).$$

Следовательно,  $\|u_1 - u_2\|_{C(S, X)} + \|u_1' - u_2'\|_{L^p(S, X)} \leq K (\|u_{01} - u_{02}\| + \|f_1 - f_2\|_{L^p(S, X)})$ .

Замечание доказано.

2. Вернемся к задаче (1). Предположим, что функции  $A_\alpha(x, t, \xi_\gamma)$  и  $B_\alpha(x, t, \xi_\gamma)$  определены для всех  $\xi_\gamma$ , непрерывно дифференцируемы по всем  $\xi_\gamma$  и удовлетворяют следующим условиям:

$$|A_\alpha(x, t, \xi_\gamma)| \leq C_1 \sum_{|\gamma| \leq m} |\xi_\gamma|^{p-1}, \quad C_1 > 0, \quad (6)$$

$$\sum_{|\gamma| \leq m} \left| \frac{\partial A_\alpha}{\partial \xi_\gamma} \eta_\gamma \right| \leq C_2 \sum_{|\gamma| \leq m} |\xi_\gamma|^{p-2} |\eta_\gamma| \quad \forall \xi_\gamma, \eta_\gamma, |\gamma| \leq m, C_2 > 0, \quad (7)$$

$$|B_\alpha(x, t, \xi_\gamma)| \leq c \sum_{|\gamma| \leq m} |\xi_\gamma|^{p-1}, \quad c > 0, \quad (8)$$

$$\left| \frac{\partial B_\alpha}{\partial \xi_\gamma} \right| \leq c_1, \quad c_1 > 0, \quad (9)$$

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} A_{\alpha\beta}(x, t, \xi_\gamma) \eta_\alpha \eta_\beta \geq c_2 \sum_{|\alpha| = m} \|\xi_\alpha\|^{p-2} \eta_\alpha^2, \quad c_2 > 0. \quad (10)$$

*Лемма 2.* Пусть функции  $A_\alpha(x, t, \xi_\gamma)$  определены для всех  $\xi_\gamma$ , непрерывно дифференцируемы по всем  $\xi_\gamma$  и выполнены условия (6) и (7). Тогда оператор  $A: L^p\left(0, T, W_p^m\right) \rightarrow L^q\left(0, T, W_q^{-m}\right)$  радиально непрерывен.

*Доказательство.*  $\forall s_1, s_2 \in [0, 1]$  оценим разность:

$$\begin{aligned} |\varphi(s_1) - \varphi(s_2)| &= \left| \sum_{|\alpha| \leq m} \int_0^T \int_\Omega (A_\alpha(x, t, D^\gamma(u + s_1 v)) - A_\alpha(x, t, D^\gamma(u + s_2 v))) D^\alpha v dx dt \right| = \\ &= \left| \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\gamma| \leq m} \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \frac{\partial A_\alpha(x, t, D^\gamma(u + s_2 v) + \tau D^\gamma(s_1 - s_2)v)}{\partial \xi_\gamma} D^\gamma((s_1 - s_2)v) D^\alpha v dx dt d\tau \right| \leq \\ &\leq C_2 \left| \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\gamma| \leq m} \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 |D^\gamma(u + s_2 v) + \tau D^\gamma(s_1 - s_2)v|^{p-2} D^\gamma((s_1 - s_2)v) D^\alpha v dx dt d\tau \right| \leq \\ &\leq C_3 |s_1 - s_2| \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\gamma| \leq m} \int_0^T \int_\Omega \left[ |D^\gamma(u + s_2 v)|^{p-2} |D^\gamma v| |D^\alpha v| + |D^\gamma v|^{p-1} |D^\alpha v| \right] dx dt \leq \\ &\leq C_4 |s_1 - s_2| \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\gamma| \leq m} \int_0^T \int_\Omega \left[ |D^\gamma v| \left( |D^\gamma(u + s_2 v)|^{p-1} + |D^\alpha v|^{p-1} \right) + |D^\gamma v|^{p-1} |D^\alpha v| \right] dx dt = \\ &= C_4 |s_1 - s_2| \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\gamma| \leq m} \int_0^T \int_\Omega \left[ |D^\gamma v| |D^\gamma(u + s_2 v)|^{p-1} + |D^\gamma v| |D^\alpha v|^{p-1} + |D^\gamma v|^{p-1} |D^\alpha v| \right] dx dt. \end{aligned}$$

Теперь оценим первое слагаемое:

$$\begin{aligned} \sum_{|\gamma| \leq m} \int_0^T \int_\Omega |D^\gamma v| |D^\gamma(u + s_2 v)|^{p-1} dx dt &= \int_0^T \sum_{|\gamma| \leq m} \int_\Omega |D^\gamma v| |D^\gamma(u + s_2 v)|^{p-1} dx dt \leq \\ &\leq \int_0^T \left( \sum_{|\gamma| \leq m} \int_\Omega |D^\gamma v|^p dx \right)^{1/p} \left( \sum_{|\gamma| \leq m} \int_\Omega |D^\gamma(u + s_2 v)|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q} dt \leq C \|u\| \|u + s_2 v\|^{p-1} \leq M_1. \end{aligned}$$

Оценим второе слагаемое:

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\gamma| \leq m} \int_0^T \int_\Omega |D^\gamma v| |D^\alpha v|^{p-1} dx dt &= \int_0^T \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\gamma| \leq m} |D^\gamma v| |D^\alpha v|^{p-1} dx dt \leq \\ &\leq \int_0^T \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha v|^{p-1} dx dt \leq C \int_0^T \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha v|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q} dt \cdot \int_0^T \left( \sum_{|\gamma| \leq m} \int_\Omega |D^\gamma v|^p dx \right)^{1/p} dt = \end{aligned}$$

$$= C \|v\|^{p-1} \|v\| \leq M_2.$$

Третье слагаемое оценивается аналогично. В результате получаем

$$|\varphi(s_1) - \varphi(s_2)| \leq |s_1 - s_2| (M_1 + M_2 + M_3).$$

Следовательно, функция  $\varphi(s)$  непрерывна.

*Лемма 3.* Пусть функции  $B_\alpha(x, t, \xi_\gamma)$  определены для всех  $\xi_\gamma$ , непрерывно дифференцируемы по всем  $\xi_\gamma$  и выполнены условия (8) и (9). Тогда

оператор  $B : L^p\left(0, T, W_p^m\right) \rightarrow L^q\left(0, T, W_q^{-m}\right)$  липшиц-непрерывен.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \|Bu - Bv\| &= \sup_{|w| \leq 1} |(Bu - Bv, w)| = \sup_{|w| \leq 1} \left| \sum_{|\alpha| \leq m} \int_0^T \int_\Omega [B_\alpha(x, t, D^\gamma u) - B_\alpha(x, t, D^\gamma v)] D^\alpha w \, dx dt \right| = \\ &= \sup_{|w| \leq 1} \left| \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\gamma| \leq m} \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial B_\alpha(x, t, D^\gamma v + \tau D^\gamma(u-v))}{\partial \xi_\gamma} D^\gamma(u-v) D^\alpha w \, dx dt \tau \right| \leq \\ &\leq c_1 \sup_{|w| \leq 1} \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\gamma| \leq m} \int_0^T \int_\Omega |D^\gamma(u-v)| |D^\alpha w| \, dx dt = c_1 \sup_{|w| \leq 1} \int_0^T \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha w| \sum_{|\gamma| \leq m} |D^\gamma(u-v)| \, dx dt \leq \\ &\leq c_1 \sup_{|w| \leq 1} c_2 \|w\| \|u - v\| = c_3 \|u - v\|. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

*Лемма 4* (см. [7]). Пусть функции  $A_\alpha(x, t, \xi_\gamma)$  определены для всех  $\xi_\gamma$ , дифференцируемы по всем  $\xi_\gamma$  и имеет место неравенство (10), где

$$A_{\alpha\beta}(x, t, \xi_\gamma) = \frac{\partial A_\alpha(x, t, \xi_\gamma)}{\partial \xi_\beta}, \quad |\alpha|, |\beta|, |\gamma| \leq m. \text{ Тогда оператор } A \text{ является сильно}$$

МОНОТОННЫМ.

*Лемма 5.* Пусть для функций  $A_\alpha(x, t, \xi_\gamma)$  существуют  $\frac{\partial A_\alpha(x, t, \xi_\gamma)}{\partial \xi_\gamma}$ ,

$|\alpha|, |\gamma| \leq m$ . Тогда  $A$  – оператор Вольтерры.

*Доказательство.* Пусть  $u(s) = v(s)$  для почти всех  $s \in [0, t]$ . Тогда для любой  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  будем иметь:

$$\int_0^t D^\alpha u(s) \varphi(s) \, ds = (-1)^{|\alpha|} \int_0^t u(s) D^\alpha \varphi(s) \, ds = (-1)^{|\alpha|} \int_0^t v(s) D^\alpha \varphi(s) \, ds = \int_0^t D^\alpha v(s) \varphi(s) \, ds.$$

Следовательно,  $D^\alpha v(s) = D^\alpha u(s)$  для почти всех  $s \in [0, t]$ .

Покажем, что  $A_\alpha(x, t, D^\gamma v) = A_\alpha(x, t, D^\gamma u)$  для почти всех  $s \in [0, t]$ .

Действительно,

$$\int_0^t \left[ A_\alpha(x, t, D^\gamma u) - A_\alpha(x, t, D^\gamma v) \right] \varphi(s) ds = \int_0^t \sum_{|\gamma| \leq m} \left| \frac{\partial A_\alpha(x, t, D^\gamma (v + \tau(u-v)))}{\partial \xi_\gamma} \right| \times \\ \times |D^\gamma (u-v)| \varphi(s) ds \leq \int_0^t \sum_{|\gamma| \leq m} |D^\gamma (u + \tau v)|^{p-1} |D^\gamma (u-v)| \varphi(s) ds = 0.$$

Следовательно, и  $\sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, t, D^\gamma u) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, t, D^\gamma v)$  почти всюду.

Лемма доказана.

*Теорема 2.* Пусть в задаче (1) операторы имеют вид (2) и (3), а функции  $A_\alpha(x, t, \xi_\gamma)$  и  $B_\alpha(x, t, \xi_\gamma)$  удовлетворяют условиям (6)–(10).

Тогда задача (1) имеет единственное решение  $\forall u_0 \in W_p^m(\Omega)$  и  $\forall f \in L^q(0, T, W_q^{-m}(\Omega))$ .

*Доказательство.* Из лемм 2, 4, 5 следует, что  $A$  радиально непрерывный монотонный оператор Вольтерры. Следовательно, для него существует обратный оператор  $A^{-1} : L^q(0, T, W_q^{-m}) \rightarrow L^p(0, T, W_p^m)$ , который липшиц-непрерывен. Задача (1) эквивалентна задаче

$$\begin{cases} u' + Gu = 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

где оператор  $Gu = A^{-1}(-Bu + f)$ ,  $G : L^p(0, T, W_p^m) \rightarrow L^p(0, T, W_p^m)$ .

Из лемм 3 и 4 следует, что  $B$  – липшиц-непрерывный оператор Вольтерры. Следовательно, таким же является оператор  $G$ . Отсюда из теоремы 1 следует, что существует единственное решение задачи (1)  $\forall u_0 \in W_p^m$  и  $\forall f \in L^q(0, T, W_q^{-m}(\Omega))$ .

Теорема доказана.

*Кафедра теории оптимального управления  
и приближенных методов*

*Поступила 24.10.2005*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С.Л. – ПМ ФТ, 1960, № 3.
2. Александрян Р.А. – Тр. моск. мат. общ-ва, 1960, т. 9.
3. Акопян Г.С., Шахбагян Р.Л. – Изв. НАН Армении. Математика, 1993, т. 28, № 3, с. 18–30.
4. Акопян Г.С., Шахбагян Р.Л. – Там же, 1994, т. 29, № 5, с. 21–30.
5. Акопян Г.С., Шахбагян Р.Л. – Там же, 1995, т. 30, № 1, с. 17–32.
6. Гаевский Х., Греггер К., Захариае К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
7. Дубинский Ю.А. – УМН, 1968, т. 23, вып. 1, с. 45–90.

Հ. Ա. ՄԱՄԻԿՈՆՅԱՆ

ՍՈԲՈԼԵՎԻ ՏԻՊԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ  
ՄԻ ԴԱՍԻ ՀԱՍԱՐ ՍԿՁԲՆԱԿԱՆ-ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում է սկզբնական պայմաններով հետևյալ եզրային խնդիրը.

$$\begin{cases} A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + Bu = f, \\ u(0) = u_0, \\ D^\gamma u|_\Gamma = 0, |\gamma| \leq m: \end{cases}$$

$A, B$  ոչ գծային օպերատորներն ունեն հետևյալ տեսքը.  
 $Au = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, t, D^\gamma u)$ ,  $Bu = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha B_\alpha(x, t, D^\gamma u)$ ,  $|\gamma| \leq m$ :  $A_\alpha, B_\alpha$  ֆունկցիաների համար ստացվում են պայմաններ, որոնց դեպքում ապացուցվում է խնդրի լուծման գոյությունն ու միակությունը  $L^p(0, T, W_p^m)$  տարածություններում, երբ  $p \geq 2$ :

H. A. MAMIKONYAN

INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SOBOLEV TYPE  
NONLINEAR EQUATIONS

Summary

In this paper following initial boundary value problem is considered.

$$\begin{cases} A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + Bu = f, \\ u(0) = u_0, \\ D^\gamma u|_\Gamma = 0, |\gamma| \leq m, \end{cases}$$

Operators  $A$  and  $B$  are nonlinear and have the following forms

$Au = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, t, D^\gamma u)$ ,  $Bu = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha B_\alpha(x, t, D^\gamma u)$ ,  $|\gamma| \leq m$ . Conditions for functions  $A_\alpha$  and  $B_\alpha$  are obtained that lead to existence and uniqueness of solution of the problem in the spaces  $L^p(0, T, W_p^m)$ ,  $p \geq 2$ .