

С.А. ЕПИСКОПОСЯН

О РАСХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ-УОЛША

Пусть последовательности $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ фиксированы так, чтобы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (M_{2k} - M_{2k-1}) = +\infty, \beta_k > 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0.$$

В работе доказывается, что существует функция $f_0(x) \in L^1_{[0,1]}$, такая, что ряд Фурье от функции $f_0(x)$ по подсистеме $\{W_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} = \{W_m(x) : M_{2s-1} \leq m \leq M_{2s}, s = 1, 2, \dots\}$ расходится в метрике $L^1_{[0,1]}$, и коэффициенты Фурье-Уолша удовлетворяют условию $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_k}| \beta_{n_k} < \infty$.

Сначала приведем определение системы Уолша-Пели (см. [1]):

$$W_0(x) = 1, W_n(x) = \prod_{s=1}^k r_{m_s}(x), n = \sum_{s=1}^k 2^{m_s}, m_1 > m_2 > \dots m_s, \quad (1)$$

где $\{r_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ – система Радемахера

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ -1, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]; \end{cases}$$

$$r_0(x+1) = r_0(x), r_k(x) = r_0(2^k x), k = 1, 2, \dots$$

Известна следующая теорема (см. [2], с. 125).

Теорема. Существует функция $f_0(x) \in L^1_{[0,1]}$, ряд Фурье-Уолша которой расходится по норме пространства $L^1_{[0,1]}$.

Естественен вопрос: можно ли следить за спектром и убыванием коэффициентов ряда Фурье-Уолша “плохой” функции $f_0(x)$?

Оказывается, что поставленный вопрос имеет положительный ответ.

В наших дальнейших рассуждениях будем считать, что $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ фиксированы так, чтобы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (M_{2k} - M_{2k-1}) = +\infty, \beta_k > 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0,$$

и рассмотрим подсистему

$$\{W_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} = \{W_m(x) : M_{2^{s-1}} \leq m \leq M_{2^s}, s = 1, 2, \dots\}. \quad (2)$$

В настоящей работе мы докажем следующие теоремы.

Теорема 1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $f_0(x) \in L^1_{[0,1]}$, $f_0(x) = 0$, вне $[0, \varepsilon]$, ряд Фурье-Уолша которой по системе $\{W_{n_k}\}$ расходится в метрике $L^1_{[0,1]}$, а коэффициенты удовлетворяют условиям

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f_0)| \beta_n < \infty,$$

$$a_n(f_0) = 0, n \notin \bigcup_{s=1}^{\infty} [M_{2^{s-1}}, M_{2^s}].$$

Теорема 2. Для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с $|E| > 1 - \varepsilon$, такое, что для любой функции $f(x) \in L^1_{[0,1]}$ можно найти функции $F(x) \in L^1_{[0,1]}$ и $H(x) \in L^1_{[0,1]}$, $F(x) = H(x) = f(x)$ на E такие, что

- 1) ряд Фурье-Уолша от функции $F(x)$ по системе $\{W_{n_k}\}$ сходится в метрике $L^1_{[0,1]}$,
- 2) ряд Фурье-Уолша от функции $H(x)$ по системе $\{W_{n_k}\}$ расходится в метрике $L^1_{[0,1]}$,
- 3) коэффициенты Фурье-Уолша функций $F(x)$ и $H(x)$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n_k}(F)| \beta_{n_k} < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n_k}(H)| \beta_{n_k} < \infty.$$

Замечание. Заметим, что теорема 2 следует из теоремы 1 и из нижесформулированной теоремы, доказанной М.Г. Григорьяном (см. [3]).

Теорема. Для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $G \subset [0,1]$ с $|G| > 1 - \varepsilon$, такое, что для любой функции $f(x) \in L^1_{[0,1]}$ можно найти функцию $F(x) \in L^1_{[0,1]}$, $F(x) = f(x)$ на G такую, что ряд Фурье-Уолша от функции $F(x)$ по системе $\{W_{n_k}\}$ сходится в метрике $L^1_{[0,1]}$, и коэффициенты Фурье-Уолша функции $F(x)$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_n(F)| \beta_n < \infty,$$

$$c_n(F) = 0, n \notin \bigcup_{s=1}^{\infty} [M_{2^{s-1}}, M_{2^s}].$$

При доказательстве теоремы 1 мы воспользуемся следующими свойствами ядер Дирихле-Уолша и констант Лебега (см. [2], стр. 27 и стр. 46-47):

$$(1^{\circ}) \quad \int_0^1 |D_{2^k}(x)| dx = 1,$$

$$(2^0) \quad D_{2^k}(x) = \begin{cases} 2^k, & x \in \left[0, \frac{1}{2^k}\right]; \\ 0, & x \in \left(\frac{1}{2^k}, 1\right]. \end{cases}$$

(3⁰) Существует последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, $2^{k-1} \leq n_k < 2^k$, такая, что для последовательности константов Лебега $\{L_{n_k}\}$ справедливо неравенство

$$L_{n_k} > \frac{1}{4} \log_2 n_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

При доказательстве теоремы 1 мы используем следующую лемму.

Лемма. Для любых чисел $\varepsilon > 0$, $N > 1$, $B > 10$ существует полином по системе $\{W_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ вида

$$Q(x) = \sum_{N \leq n_s \leq M} a_{n_s} W_{n_s}(x),$$

удовлетворяющий условиям

$$Q(x) = 0, \quad x \notin [0, \varepsilon],$$

$$\|Q(x)\| = \int_0^1 |Q(x)| dx < \varepsilon,$$

$$\sum_{N \leq n_s \leq M} |a_{n_s}| \beta_{n_s} < \varepsilon,$$

$$\max_{N \leq m \leq M} \int_0^1 \left| \sum_{N \leq n_s \leq m} a_{n_s} W_{n_s}(x) \right| dx > B.$$

Доказательство леммы. Возьмем натуральные числа ρ_0, k_0, ν_0 настолько большими, чтобы выполнялись следующие условия:

$$k_0 \geq \frac{4B}{\varepsilon} + \log_2 \varepsilon + 1, \quad (3)$$

$$W_{\nu_0}(x) \cdot W_i(x) = W_{\nu_0+i}(x), \quad 0 \leq i \leq 2^{k_0}, \quad (4)$$

$$\nu_0 + i \in [M_{2^{\rho_0-1}}, M_{2^{\rho_0}}], \quad 0 \leq i \leq 2^{k_0}, \quad (5)$$

$$\beta_j < 2^{-k_0-2}, \quad j \geq M_{2^{\rho_0-1}}. \quad (6)$$

Положим (см. (2), (4), (5))

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{N \leq n_s \leq M} a_{n_s} W_{n_s}(x) = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sum_{i=0}^{2^{k_0}} W_{\nu_0+i}(x) = \frac{\varepsilon}{2} \cdot W_{\nu_0}(x) \cdot \sum_{i=0}^{2^{k_0}} W_i(x) = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \cdot W_{\nu_0}(x) \cdot D_{2^{k_0}}(x), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$a_{n_s} = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2}, & \nu_0 \leq n_s \leq \nu_0 + 2^{k_0} = M; \\ 0, & n_s < \nu_0. \end{cases} \quad (8)$$

В силу (1⁰), (2⁰), (7), (8) будем иметь

$$Q(x) = 0, \quad x \in (2^{-k_0}, 1],$$

$$\int_0^1 |Q(x)| dx = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int_0^1 |D_{2^{k_0}}(x)| dx = \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum_{N \leq n_s \leq M} |a_{n_s}| \beta_{n_s} < \max_{n_s \geq \nu_0} \beta_{n_s} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{k_0} < \varepsilon,$$

т. е. условия 1), 2) и 3) леммы выполнены.

Теперь проверим выполнение условия 4) леммы. Согласно (3⁰) существует натуральное число $m_{k_0} \in [2^{k_0-1}, 2^{k_0})$, такое, что

$$L_{m_{k_0}} = \int_0^1 |D_{m_{k_0}}(x)| dx > \frac{1}{4} \log_2 m_{k_0} > \frac{k_0 - 1}{4}.$$

Отсюда и из (3) вытекает, что

$$\int_0^1 \left| \sum_{N \leq n_s \leq m_{k_0}} a_{n_s} W_{n_s}(x) \right| dx > \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{k_0 - 1}{4} > B.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть ε – наперед заданное положительное число. Если последовательно применим лемму, то можем найти последовательность непересекающихся полиномов по системе $\{W_{n_s}\}_{s=1}^{\infty}$ вида

$$Q_s(x) = \sum_{N_{s-1} \leq n_k < N_s} a_{n_k}^{(s)} W_{n_k}(x), \quad s = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

удовлетворяющую условиям

$$Q_s(x) = 0, \quad x \notin \left[0, \frac{\varepsilon}{2^s}\right], \quad (10)$$

$$\int_0^1 |Q_s(x)| dx < 2^{-s}, \quad (11)$$

$$\sum_{N_{s-1} \leq n_k < N_s} |a_{n_k}^{(s)}| \beta_{n_k} < 2^{-s}, \quad (12)$$

$$\max_{N_{s-1} \leq m < N_s} \int_0^1 \left| \sum_{N_{s-1} \leq n_k \leq m} a_{n_k}^{(s)} W_{n_k}(x) \right| dx > 2. \quad (13)$$

Положим

$$f_0(x) = \sum_{s=1}^{\infty} Q_s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} W_{n_k}(x). \quad (14)$$

Очевидно, что (см. (10), (12)–(14))

$$f_0(x) = 0, \quad x \notin [0, \varepsilon],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_k}| \beta_{n_k} < \infty.$$

Из (11) и (14) следует

$$\int_0^1 |f_0(x)| dx \leq \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^1 |Q_s(x)| dx \leq 1,$$

т. е.

$$f(x) \in L_{[0,1]}^1.$$

Из (9) и (14) вытекает, что

$$a_{n_k} = \int_0^1 f_0(t) \cdot W_{n_k}(t) dt,$$

т. е. ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} W_{n_k}(x)$$

является рядом Фурье функции $f_0(x)$, который в силу (13) расходится в метрике $L^1_{[0,1]}$.

Теорема 1 доказана.

В заключение выражаю благодарность проф. М.Г. Григоряну за постоянное внимание и обсуждения.

Кафедра высшей математики физфака

Поступила 03.12.1999

ЛИТЕРАТУРА

1. Pely R. A remarkable systems of orthogonal functions. – Proc. London Math. Soc., 1932, v. 34, p. 241–279.
2. Голубов Б.И., Ефимов А.Б., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.
3. Григорян М.Г. О сходимости почти всюду рядов Фурье-Уолша суммируемых функций. – Изв. АН Арм. ССР, 1983, т. 18, №4, с. 291–304.

Ս.Ա. ԵՊԻՍԿՈՊՈՍՅԱՆ

ՖՈՒՐՅԵ-ՈՒՌԼՇԻ ԸԱՐՔԵՐԻ ՏԱՐԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո մ

Դիցուք $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ և $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ հաջորդականությունները ֆիքսված են այնպես, որ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (M_{2k} - M_{2k-1}) = +\infty, \beta_k > 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0:$$

Աշխատանքում ապացուցված է, որ գոյություն ունի $f_0(x) \in L^1_{[0,1]}$ ֆունկցիա, որի Ֆուրյեի շարքը Ուալշի

$$\{W_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} = \{W_m(x) : M_{2s-1} \leq m \leq M_{2s}, s = 1, 2, \dots\}$$

ենթահամակարգով տարամիտում է $L^1_{[0,1]}$ -ում և Ֆուրյե-Ուոլշի գործակիցները բավարարում են

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_k}| \beta_{n_k} < \infty$$

պայմանին: