ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1998 Естественные науки

Математика

УДК 517.95

Г.А. КАРАПЕТЯН, А.Г. ПЕТРОСЯН

РЕШЕНИЕ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В статье исследуются вопросы существования единственности и гладкости решения полуэллиптических уравнений в полупространстве с вырождением на границе. Для изучения свойств решения уравнения $P(x,q,D)u=f$ вводятся специальные пространства $H^{\kappa,q}_{\alpha,\mu}(R^n_+)$ и развивается теория этих пространств.

Настоящая статья является продолжением работ [1, 2] для вырождающихся уравнений, а также продолжением работ [3, 4] для более общих операторов, точнее для подкласса гипоэллиптических уравнений, называемых полуэллиптическими.

Введем следующие обозначения:

$$D_\kappa=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_\kappa}, D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\ldots D_{n-1}^{\alpha_{n-1}}D_n^{\alpha_n}, \xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_n^{\alpha_n},$$

где $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_n)$ - мультииндекс, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$.

Пусть имеем четные натуральные числа $m_0,\ldots,m_n$. Обозначим через $\mu=(\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_n)=\left(\frac{1}{m_0},\frac{1}{m_1},\ldots,\frac{1}{m_n}\right)$. В полупространстве R^n_+ рассмотрим оператор

$$P(x,q,D)=\sum_{(\ell,\mu)\le 2}a_\ell(x)x_n^{\ell_n}q^{\ell_0}D_{x'}^{\ell'}D_{x_n}^{\ell_n}, \tag{1}$$

где $\ell=(\ell_0,\ell',\ell_n)=(\ell_0,\ell_1,\ldots,\ell_{n-1},\ell_n)$ - мультииндекс в R^{n+1}, $\ell'=(\ell_1,\ldots,\ell_{n-1})$,

$$x=(x',x_n)=(x_1,\ldots x_{n-1},x_n),$$

q – комплексный параметр, изменяющийся в некотором замкнутом угле Q комплексной плоскости с вершиной в начале координат, а коэффициенты $a_\ell(x)$ – бесконечно гладкие функции в $\overline{R^n_+}$, постоянные при больших по модулю значениях x, $(\ell,\mu)=\ell_0\mu_0+\ell_1\mu_1+\ldots+\ell_n\mu_n$.

Нас будут интересовать существование, единственность и гладкость решения уравнения

$$P(x,q,D)u=f \tag{2}$$

в полупространстве R^n_+.

Введем специальные пространства, где будем изучать решения уравнения (2).

Определение 1. Обозначим через $H^{\kappa,q}_{\alpha,\mu}$ пополнение пространства $C_0^\infty(R^n_+)$ по норме

$$\langle u\rangle_{\kappa,\mu,\alpha q}=\left(\int\limits_{R_+^n}\sum_{(\ell,\mu)\le\kappa}x_n^{2(\ell_n+\alpha)}\left|q^{\ell_0}D_{x'}^{\ell'}D_{x_n}^{\ell_n}u\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

где к – целое неотрицательное число, α – действительное число, q –комплексный параметр, $|q|\ge\varepsilon>0$, $\ell=(\ell_0,\ell',\ell_n)=(\ell_0,\ell_1,\ldots,\ell_{n-1},\ell_n)$.

Определение 2. Через $H_\mu^{\kappa,q}(\lambda)$ обозначим пополнение пространства $C_0^\infty(R^n)$ по норме

$$\|u\|_{\kappa,\mu,\lambda,q}=\left(\int\limits_{R^n}e^{2\lambda\tau}\sum_{(\ell,\mu)\le\kappa}\left|q^{\ell_0}D_{x'}^{\ell'}D_\tau^{\ell_n}u\right|^2dx'd\tau\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Лемма 1. Пространства $H_{\alpha,\mu}^{\kappa,q}$ и $H_\mu^{\kappa,q}(\alpha+\frac{1}{2})$ изоморфны и для некоторых постоянных C_1,C_2 справедливо неравенство

$$C_1\rangle u\langle_{\kappa,\mu,\alpha,q}\le\|u\|_{\kappa,\mu,\alpha+\frac{1}{2},q}\le C_2\rangle u\langle_{\kappa,\mu,\alpha,q}, \tag{5}$$

где константы C_1,C_2 не зависят от u,α,q.

Доказательство. При преобразовании

$$x_i=x_i,\ i=1,\ldots,n-1,$$
$$x_n=e^\tau, \tag{6}$$

полупространство R_+^n переходит в пространство R^n. Посмотрим, во что переходит пространство $H_{\alpha,\mu}^{\kappa,q}$.

Заметим, что после преобразования (6) имеем

$$D_{x_n}^\kappa u=e^{-\kappa\tau}\sum_{i=1}^{\kappa}C_{i,\kappa}D_\tau^iu,\quad D_\tau^\kappa u=\sum_{i=1}^{\kappa}d_{i,\kappa}x_n^iD_{x_n}^iu,$$

где постоянные $C_{i,\kappa},d_{i,\kappa}$ от u не зависят и $C_{\kappa,\kappa}=d_{\kappa,\kappa}=1$. Заметим, что якобиан этого преобразования равен e^τ. Поэтому имеем

$$\langle u\rangle^2_{\kappa\mu\alpha q}=\int\limits_{R_+^n}\sum_{(\ell,\mu)\le\kappa}x_n^{2(\ell_n+\alpha)}\left|q^{\ell_0}D_{x'}^{\ell'}D_{x_n}^{\ell_n}u\right|^2dx'dx_n=$$

$$=\int\limits_{R^n}e^{2(\alpha+\frac{1}{2})\tau}\sum_{(\ell,\mu)\le\kappa}\left|q^{\ell_0}\sum_{i=1}^{\ell_n}C_{i,\ell_n}D_{x'}^{\ell'}D_\tau^iu\right|^2dx'd\tau\le \tag{7}$$

$$\le C_1\int\limits_{R^n}e^{2(\alpha+\frac{1}{2})\tau}\sum_{(\ell,\mu)\le\kappa}\left|q^{\ell_0}D_{x'}^{\ell'}D_\tau^{\ell_n}u\right|^2dx'd\tau,$$

так как если $(\ell,\mu)\le\kappa$ при $\ell=(\ell_0,\ell_1,\ldots,\ell_{n-1},\ell_n)$, то для любого $i\le\ell_n,(\bar\ell,\mu)\le\kappa$, где $\bar\ell=(\ell_0,\ell_1,\ldots,\ell_{n-1},i)$.

Рассмотрим обратное. Имеем

$$\int_{R^n} e^{2(\alpha+\frac{1}{2})\tau} \sum_{(\ell,\mu)\le\kappa} \left| q^{\ell_n} D_{x'}^{\ell'} D_\tau^{\ell_n} u \right|^2 dx' d\tau = \int_{R_+^n} x_n^{-1} x_n^{2(\alpha+\frac{1}{2})}$$

$$\sum_{(\ell,\mu)\le\kappa} \left| q^{\ell_n} \sum_{i=1}^{\ell_n} d_{i,\ell_n} x_n^i D_{x'}^{\ell'} D_{x_n}^i u \right|^2 dx' dx_n \le$$

$$\le C_2 \int_{R_+^n} \sum_{(\ell,\mu)\le k} x_n^{2(\ell_n+\alpha)} \left| q^{\ell_n} D_{x'}^{\ell'} D_{x_n}^{\ell_n} u \right|^2 dx' dx_n,$$

так как для любого i, $0 \le i \le \ell_n$, справедливо неравенство (см., напр., [5])

$$\int_{R_+^n} x_n^i \left| D_{x'}^{\ell'} D_{x_n}^i u \right|^2 dx \le \int_{R_+^n} x_n^{\ell_n} \left| D_{x'}^{\ell'} D_{x_n}^{\ell_n} u \right|^2 dx.$$

Неравенства (7), (8) доказывают лемму 1.

Лемма 2. Норма $\|u\|_{k,\mu,\lambda,q}$ эквивалентна норме

$$\left(\int_{R^n} \left(|q|^{m_n} + \rho_\mu(\xi) + |\lambda|^{m_n} \right)^{2\kappa} \left| \hat{u}(\xi', \xi_n + i\lambda) \right|^2 d\xi' d\xi_n \right)^{1/2}.$$

где $\rho_\mu(\xi) = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^{2m_i} \right)^{1/2}$, μ – расстояние точки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ (см.[6]).

Доказательство. Так как для любого ℓ_n

$(\mathrm{D}_\tau + i\lambda)^{\ell_n} (e^{\lambda\tau} u) = e^{\lambda\tau} \mathrm{D}_\tau^{\ell_n} u$, то имеем

$$\|u\|_{\kappa,\mu,\lambda,q}^2 = \int_{R^n} e^{2\lambda\tau} \sum_{(\ell,\mu)\le\kappa} \left| q^{\ell_n} D_{x'}^{\ell'} D_\tau^{\ell_n} u \right|^2 dx' d\tau =$$

$$= \int_{R^n} \sum_{(\ell,\mu)\le\kappa} \left| q^{\ell_n} D_{x'}^{\ell'} (D_\tau + i\lambda)^{\ell_n} (e^{\lambda\tau} u) \right|^2 dx' d\tau.$$

Применяя равенство Парсеваля, имеем

$$\|u\|_{\kappa,\mu,\lambda,q}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \sum_{(\ell,\mu)\le\kappa} \left| q^{\ell_n} \xi^{\ell'} (\xi_n + i\lambda)^{\ell_n} \hat{u}(\xi', \xi_n + i\lambda) \right|^2 d\xi' d\xi_n.$$

С другой стороны,

$$\sum_{(\ell,\mu)\le\kappa} \left| q^{\ell_n} \xi^{\ell'} (\xi_n + i\lambda)^{\ell_n} \right| \sim \left(|q|^{m_n} + \rho_\mu(\xi) + |\lambda|^{m_n} \right)^{\kappa},$$

следовательно, норма $\|u\|_{\kappa,\mu,\lambda,q}$ эквивалентна норме (9). Лемма 2 доказана.

В дальнейшем под нормой $\|u\|_{\kappa,\mu,\lambda,q}$ будем иметь в виду как (4), так и (9).

Лемма 3. Если $u \in H_{\alpha,\mu}^{\kappa,q}$ и $a(x)$ – гладкая в $\overline{R}_n^+$ функция, являющаяся константой при достаточно больших по модулю x, то

$$\langle au \rangle_{\kappa,\mu,\alpha,q} \le C \langle u \rangle_{\kappa,\mu,\alpha,q},$$

где постоянная C не зависит от u, α, q.

Доказательство. После преобразования (6), используя (5), получим

$$\langle au\rangle_{\kappa,\mu,\alpha,q} \le C_1\|au\|_{\kappa,\mu,\alpha+\frac12,q} \le C_2\|\quad\|_{\kappa,\mu,\alpha+\frac12,q} \le C_3\langle u\rangle_{\kappa,\mu,\alpha,q}.$$

Лемма 4. Если $u\in H^{\kappa+s,q}_{\alpha,\mu}$, то для любого мультииндекса ℓ ,$(\ell,\mu)\le s$,

$$\langle x_n^{\ell_n} q^{\ell_0} D_{x'}^{\ell'} D_{x_n}^{\ell_n} u\rangle_{\kappa,\mu,\alpha,q} \le C\langle u\rangle_{\kappa+s,\mu,\alpha,q}, \tag{10}$$

причем константа С не зависит от u,α,q.

Доказательство. После преобразования (6), учитывая, что $(\ell,\mu)\le s$, имеем

$$\langle x_n^{\ell_n} q^{\ell_0} D_{x'}^{\ell'} D_{x_n}^{\ell_n} u\rangle^2_{\kappa,\mu,\alpha,q} \le C_1\left\| q^{\ell_0}\sum_{j=1}^{\ell_n} C_{j,\ell_n} D_{x'}^{\ell'} D_\tau^j u\right\|^2_{\kappa,\mu,\alpha+\frac12,q} \le$$

$$\le C_2\int_{R^n}\left(\rho_\mu(\xi)+|q|^{m_0}+\left|\alpha+\tfrac12\right|^{m_n}\right)^{2\kappa}\times$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{\ell_n} C_{j,\ell_n} q^{\ell_0}\xi'^{\ell'}(\xi_n+i(\alpha+\tfrac12))^j\right)^2 |\hat u(\xi',\xi_n+i\lambda)|^2 d\xi'\ d\xi_n \le$$

$$\le C_3\int_{R^n}\left(\rho_\mu(\xi)+|q|^{m_0}+\left|\alpha+\tfrac12\right|^{m_n}\right)^{2(\kappa+s)} \left|\hat u(\xi',\xi_n+i(\alpha+\tfrac12)\right|^2 d\xi \le C\langle u\rangle^2_{\kappa+s,\mu,\alpha,q}$$

Лемма 4 доказана.
Из лемм 3 и 4 следует

Следствие. Оператор (1) непрерывно действует из $H^{\kappa+s,q}_{\alpha,\mu}$ в $H^{\kappa,q}_{\alpha,\mu}$, точнее существует постоянная С, такая, что для любого $u\in H^{\kappa+s,q}_{\alpha,\mu}$ имеет место неравенство

$$\langle \mathrm{P}u\rangle_{\kappa,\mu,\alpha,q} \le C\langle u\rangle_{\kappa+s,\mu,\alpha,q}.$$

Лемма 5. Если $u\in H^{\kappa,q}_{\alpha,\mu}$, то

$$\langle u\rangle_{\kappa-1,\mu,\alpha,q} \le \frac{C}{|q|^{m_0}}\langle u\rangle_{\kappa,\mu,\alpha,q},$$

$$\left(\|u\|_{\kappa-1,\mu,\lambda,q} \le \frac{C}{|q|^{m_0}}\|u\|_{\kappa,\mu,\lambda,q}\right)$$

Доказательство. Имеем

$$\langle u\rangle_{\kappa-1,\mu,\alpha,q} \le C\ \|u\|_{\kappa-1,\mu,\alpha+\frac12,q} = C\left(\int\left(\rho_\mu(\xi)+|q|^{m_0}+\left|\alpha+\tfrac12\right|^{m_n}\right)^{2\kappa-2}|\hat u|^2 d\xi\right)^{\frac12} \le$$

$$\le \frac{C_1}{|q|^{m_0}}\left(\int\left(\rho_\mu(\xi)+|q|^{m_0}+\left|\alpha+\tfrac12\right|^{m_n}\right)^{2\kappa}|\hat u(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac12} \le$$

$$\le \frac{C_1}{|q|^{m_0}}\|u\|_{\kappa,\mu,\alpha+\frac12,q} \le \frac{C_2}{|q|^{m_0}}\langle u\rangle_{\kappa,\mu,\alpha,q},$$

где C_2 не зависит от q и α.

Лемма 5 доказана.

Для изучения свойств решения уравнения (1) докажем следующую лемму.

Лемма 6. Пусть $P(q,\xi)$ – μ-однородный многочлен порядка 2, где $q\in Q$, $\xi\in R^n$. Если

$$P(q,\xi)\neq 0 \quad \text{при} \quad |\xi|+|q|\neq 0, \tag{11}$$

то существуют такие положительные постоянные C и d, что при $|q|^{m_0\mu_n} > d|\lambda|$ имеет место неравенство

$$\left|P(q,\xi',\xi_n+i\lambda)\right| \geq C\left(\rho_\mu(\xi)+|q|^{m_0}+|\lambda|^{m}\right)\left(\left(\rho_\mu(\xi)+|q|^{m_0}\right)^{\mu_n}-d|\lambda|\right)^{m_n} \tag{12}$$

Замечание. Неравенство (12) можно было написать в более симметричной форме $\left|P(q,\xi',\xi_n+i\lambda)\right| \geq C\left(\left(\rho_\mu(\xi)+|q|^{m_0}\right)^{\mu_n}+|\lambda|\right)\left(\left(\rho_\mu(\xi)+|q|^{m_0}\right)^{\mu_n}-d|\lambda|\right)^{m_n}$

Доказательство. Если многочлен, удовлетворяющий условию (11), рассмотреть как многочлен относительно переменной ξ_n, то, как известно [2], $P(q,\xi',\xi_n+i\lambda)$ будет иметь m_n корней с положительной мнимой частью и m_n корней с отрицательной мнимой частью, и если корни $\varphi_j(q,\xi')$ $(j=1,\ldots,2m_n)$, то каждая из функций φ_j является $\tilde{\mu}=(\mu_0,\ldots,\mu_{n-1})$ однородной функцией порядка μ_n. После разложения многочлена $P(q,\xi',\xi_n+i\lambda)$ через корни φ_j имеем

$$P(q,\xi',\xi_n+i\lambda)=a\prod_{j=1}^{2m_n}(\xi_n+i\lambda-\varphi_j(q,\xi')).$$

Оценим каждый множитель по отдельности.

Пусть $\lambda<0$ (доказательство для $\lambda>0$ аналогично).

Рассмотрим следующие случаи:

1. $\operatorname{Im}\varphi_j>0$, так как функция $\left|\xi_n-\varphi'_j(\xi',q)\right|$ отлична от нуля при $\rho_\mu(\xi)+|q|^{m_0}=1$, то существует постоянная C, что $\left|\xi_n-\varphi_j(\xi',q)\right|>C$, при $\rho_\mu(\xi)+|q|^{m_0}=1$.

Если теперь комплексное число z такое, что $\operatorname{Im} z<0$, то

$$\left|\xi_n+i\lambda-\varphi_j\right| \geq \left|\xi_n-\varphi_j\right|-|\lambda| \geq C_j\left(\rho_\mu(\xi)+|q|^{m_0}\right)^{\mu_n}-|\lambda|$$

$$=C_j\left(\left(\rho_\mu(\xi)+|q|^{m_0}\right)^{\mu_n}-\frac{1}{C_j}|\lambda|\right).$$

при $|z|^{m_n}+\left|\xi_1\right|^{m_1}+\ldots+\left|\xi_{n-1}\right|^{m_{n-1}}+|q|^{m_0}=1$.

В силу μ однородности выражения $\left|z-\varphi_j\right|$ порядка μ_n следует, что

$$P(q,\xi',\xi_n+i\lambda)=a\prod_{j=1}^{2m_n}(\xi_n+i\lambda-\varphi_j(q,\xi')).$$

Следовательно, $\left|\xi_n+i\lambda-\varphi_j\right| \geq C_j\left(\rho_\mu(\xi)+|\lambda|^{m_n}+|q|^{m_0}\right)^{\mu_n}$.

2. $\operatorname{Im}\varphi_j<0$. Тогда имеем

$$\left|\xi_n + i\lambda - \varphi_j\right| \geq \left|\xi_n - \varphi_j\right| - |\lambda| \geq C_j\left(\rho_\mu(\xi) + |q|^{m_0}\right)^{\mu_n} - |\lambda| =$$

$$= C_j\left(\left(\rho_\mu(\xi) + |q|^{m_0}\right)^{\mu_n} - \frac{1}{C_j}|\lambda|\right)$$

Обозначим через $d = \max\limits_{j=1,\dots,m_n} \frac{1}{C_j}$, $|a|\prod\limits_{j=1}^{2m_n} C_j = C$.

Так как есть m_n корней с положительной мнимой частью и m_n корней с отрицательной мнимой частью, то при $|q|^{m_0\mu_n} > d|\lambda|$ имеем

$$\left|\mathrm{P}(q,\xi',\xi_n + i\lambda\right| \geq C\left(\rho_\mu(\xi) + |\lambda|^{m_n} + |q|^{m_0}\right)\left(\left(\rho_\mu(\xi) + |q|^{m_0}\right)^{\mu_n} - d|\lambda|\right)^{m_n}$$

Лемма 6 доказана.

Переходим к изучению уравнения (2). Для этого на оператор $\mathrm{P}(x,q,\xi)$ наложим следующие условия.

Условие 1. Оператор $\mathrm{P}(x,q,\xi)$ полуэллиптичен в любой точке $x_0 \in R_n^+$, т. е.

$$\mathrm{P}_0(x,q,\xi) = \sum_{(\ell,\mu)=2} a_\ell(x_0) x_n^{\ell_n} q^{\ell_0} \xi'^{\ell'} \xi_n^{\ell_n} \neq 0 \quad \text{при} \quad |\xi| + |q| \neq 0.$$

Условие 2. Коэффициенты оператора $\mathrm{P}_0(x,q,\xi)$ мало меняются, т.е. существует положительное число $\varepsilon > 0$, что

$$\left|a_\ell(x) - a_\ell(y)\right| < \varepsilon, \qquad \forall x,y \in \overline{R}_n^+.$$

В дальнейшем будем считать, что $|q| \geq \varepsilon > 0$.

Теорема 1. Если выполняются условия 1, 2, тогда существуют такие положительные числа D_1 и D_2, зависящие только от оператора (1), что при достаточно малом ε и при

$$|\lambda| < \frac{1}{D_1}\left(1 - \sqrt[m_n]{\frac{1}{2} + \frac{D_2}{|q|^\beta}}\right)|q|^{m_0\mu_n}$$

справедлива оценка

$$\langle u\rangle_{2,\mu,\alpha,q} \leq C\langle \mathrm{P}u\rangle_{0,\mu,\alpha,q}, \; u \in C_0^\infty, \tag{13}$$

где C – постоянная, не зависящая от u,α,q.

Доказательство. Сделаем преобразование (6). После этого пространство $H_{\alpha,\mu}^{2,q}$ переходит в пространство $H_\mu^{2,q}(\alpha + \frac{1}{2})$ (см. лемму 1), а оператор P переходит в оператор $\overline{\mathrm{P}} = \sum\limits_{(\ell,\mu)\leq 2} b_\ell(x',\tau) q^{\ell_0} D_{x'}^{\ell'} D_\tau^{\ell_n}$, где $b_\ell(x',\tau) = a_\ell(x',e^\tau)$, когда $(\ell,\mu) = 2$.

Так как оператор P полуэллиптичен в точке (0,0,...,1), то оператор $\overline{\mathrm{P}}$ будет полуэллиптичным в точке (0,...,0). Кроме того, коэффициенты $b_\ell(x',\tau)$ будут удовлетворять условию 2 при $(\ell,\mu) = 2$.

Теперь для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\|u\|_{2,\mu,\alpha+\frac{1}{2},q} \le C\left\|\overline{\mathrm{P}}u\right\|_{0,\mu,\alpha+\frac{1}{2},q}. \qquad (14)$$

Положим:

$$\overline{\mathrm{P}_0} = \sum_{(\ell,\mu)=2} b_\ell(x',\tau) q^{\ell_0} D_{x'}^{\ell'} D_\tau^{\ell_n},$$

$$\mathrm{P}_1 = \sum_{(\ell,\mu)<2} b_\ell(x',\tau) q^{\ell_0} D_{x'}^{\ell'} D_\tau^{\ell_n}.$$

Пусть $\lambda = \alpha + \dfrac{1}{2}$. Имеем

$$\left\|\overline{\mathrm{P}}u\right\|_{0,\mu,\lambda,q} \ge \left\|\overline{\mathrm{P}_0}(0,D,q)u\right\|_{0,\mu,\lambda,q} - \|Bu\|_{0,\mu,\lambda,q} - \|\mathrm{P}_1 u\|_{0,\mu,\lambda,q}, \text{ где}$$

$$B = \overline{\mathrm{P}}_0(x',\tau,D,q) - \overline{\mathrm{P}}_0(0,D,q).$$

Оценка второго и третьего слагаемых непосредственно следует из лемм 4,5 и из условия 2. Имеем

$$\|\mathrm{P}_1 u\|_{0,\mu,\lambda,q} \le C \sum_{(\ell,\mu)<2} \left\|q^{\ell_0} D_{x'}^{\ell'} D_\tau^{\ell_n} u\right\|_{0,\mu,\lambda,q} \le \frac{C_1}{|q|^\beta}\|u\|_{2,\mu,\lambda,q}, \text{ где}$$

$$\beta = \min\{2-(l,\mu), \text{ где } (l,\mu)<2\},$$

$$\|Bu\|_{0,\mu,\lambda,q} = \left\|(\mathrm{P}_0(x',\tau,D,q) - \overline{\mathrm{P}}_0(0,D,q))u\right\|_{0,\mu,\lambda,q} =$$

$$= \left\|\sum \left(b_\ell(x',\tau) - b_\ell(0)\right) q^{\ell_0} D_{x'}^{\ell'} D_\tau^{\ell_n} u\right\|_{0,\mu,\lambda,q} \le \varepsilon C_2 \|u\|_{2,\mu,\lambda,q}.$$

Теперь покажем, что при $|q|^{m_0\mu_n} > (1+d)|\lambda|$

$$\left(\left(\rho_\mu(\xi) + |q|^{m_0}\right)^{\mu_n} - d|\lambda|\right)^{m_n} \ge \left(1 - \frac{(1+d)|\lambda|}{q^{m_0\mu_n}}\right)\left(\rho_\mu(\xi) + |q|^{m_0} + |\lambda|^{m_n}\right).$$

Действительно,

$$\left(1 - \frac{(1+d)|\lambda|}{|q|^{m_0\mu_n}}\right)\left(\left(\rho_\mu(\xi) + |q|^{m_0}\right)^{\mu_n} + |\lambda|\right) = \left(\rho_\mu(\xi) + |q|^{m_0}\right)^{\mu_n} + |\lambda| -$$

$$- \left(\rho_\mu(\xi) + |q|^{m_0}\right)^{\mu_n} \frac{(d+1)|\lambda|}{|q|^{m_0\mu_n}} - \frac{(d+1)|\lambda|}{|q|^{m_0\mu_n}}|\lambda| \le \left(\rho_\mu(\xi) + |q|^{m_0}\right)^{\mu_n} - d|\lambda|.$$

Значит,

$$\left(\left(\rho_\mu(\xi) + |q|^{m_0}\right)^{\mu_n} - d|\lambda|\right)^{m_n} \ge \left(1 - \frac{(1+d)|\lambda|}{|q|^{m_0\mu_n}}\right)^{m_n}\left(\left(\rho_\mu(\xi) + |q|^{m_0}\right)^{\mu_n} + |\lambda|\right)^{m_n} \ge$$

$$\ge \left(1 - \frac{(1+d)|\lambda|}{|q|^{m_0\mu_n}}\right)^{m_n}\left(\rho_\mu(\xi) + |q|^{m_0} + |\lambda|^{m_n}\right)$$

Отсюда, учитывая лемму 6, после преобразования Фурье для $\overline{\mathrm{P}_0}(0,D,q)$ имеем

$$\left\|\overline{\mathrm{P}_0}(0,D,q)u\right\|^2_{0,\mu,\lambda,q}=\int\limits_{R^n}\left|\mathrm{P}_0(0,\xi',\xi_n+i\lambda,q)\right|^2\left|\hat{u}(\xi',\xi_n+i\lambda)\right|^2d\xi\geq$$

$$\geq C_3^2\int\limits_{R^n}\left(\rho_\mu(\xi)+|q|^{m_0}+|\lambda|^{m_n}\right)^2\left(\left(\rho_\mu(\xi)+|q|^{m_0}\right)^{\mu_n}-d|\lambda|\right)^{2m_n}\left|\hat{u}(\xi)\right|^2d\xi\geq$$

$$\geq C_3^2\left(1-\frac{(d+1)|\lambda|}{|q|^{m_0\mu_n}}\right)^{2m_n}\int\limits_{R^n}\left(\rho_\mu(\xi)+|q|^{m_0}+|\lambda|^{m_n}\right)^4|\hat{u}|^2d\xi=$$

$$=C_3^2\left(1-\frac{(d+1)|\lambda|}{|q|^{m_0\mu_n}}\right)^{2m_n}\|u\|^2_{2,\mu,\lambda,q}.$$

Окончательно получим:

$$\left\|\overline{\mathrm{P}}u\right\|_{0,\mu,\lambda,q}\geq\left(C_3\left(1-\frac{(d+1)|\lambda|}{|q|^{m_0\mu_n}}\right)^{m_n}-\varepsilon\ \ C_2-\frac{C_1}{|q|^\beta}\right)\|u\|_{2,\mu,\lambda,q}.$$

Неравенство будет доказано, если

$$C_3\left(1-\frac{(d+1)|\lambda|}{|q|^{m_0\mu_n}}\right)^{m_n}-\varepsilon\, C_2-\frac{C_1}{|q|^{\beta}}>\frac{C_3}{4}. \tag{15}$$

Предположим, что ε настолько мало, что $\dfrac{\varepsilon\, C_2}{C_3}<\dfrac{1}{4}$. Тогда для выполнения условия (15) достаточно, чтобы имело место неравенство

$$|\lambda|<\frac{1}{(d+1)}\left(1-\sqrt[m_n]{\frac{1}{2}+\frac{C_1}{C_3|q|^\beta}}\right)|q|^{m_0\mu_n}.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть изучается уравнение (2), где оператор $\mathrm{P}(x,D,q)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда существуют константы D_1 и D_2 такие, что при достаточно малом ε и $|\lambda|<\dfrac{1}{D_1}\left(1-\sqrt[m_n]{\dfrac{1}{2}+\dfrac{D_2}{|q|^\beta}}\right)|q|^{m_0\mu_n}$, $\quad q\in Q$,

уравнение (2) при любом $f\in H^{0,q}_{\alpha,\mu}$ имеет единственное решение из класса $H^{2,q}_{\alpha,\mu}$ и имеет место неравенство

$$\rangle u\langle_{2,\mu,\alpha,q}\leq C\rangle f\langle_{0,\mu,\alpha,q}, \tag{16}$$

где постоянная C не зависит от u,α,q.

Доказательство. После преобразования (6) оператор $\mathrm{P}(x,D,q)$ переходит в оператор $\overline{\mathrm{P}}$, и, следовательно, достаточно доказать существование решения уравнения $\overline{\mathrm{P}}u=f$ из класса $H^{0,q}_\mu(\lambda)$ в $H^{2,q}_\mu(\lambda)$, где $\lambda=\alpha+\dfrac{1}{2}$.

Для любого $f \in H_{\mu}^{0,q}$ рассмотрим оператор

$$Rf = e^{-\lambda\tau} F^{-1}\left[\frac{F\left(e^{\lambda\tau} f(x',\tau)\right)(\xi)}{\mathrm{P}_0\left(0,1,\xi',\xi_n + i\lambda, q\right)}\right].$$

Действительно, из леммы 6 и при $|q|^{m_0\mu_n} > (1+d)|\lambda|$ имеем

$$\|Rf\|_{2,\mu,\lambda,q}^2 = \int \left(\rho_\mu(\xi) + |q|^{m_0} + |\lambda|^{m_n}\right)^4 \frac{\left|\hat{f}(\xi',\xi_n + i\lambda)\right|^2}{\left|\overline{\mathrm{P}}_0(\xi',\xi_n + i\lambda, q)\right|^2} d\xi \le$$

$$\le C \int \frac{\left(\rho_\mu(\xi) + |q|^{m_0} + |\lambda|^{m_n}\right)^2}{\left(\left(\rho_\mu(\xi) + |q|^{m_0}\right)^{\mu_n} - d|\lambda|\right)^{2m_n}} \left|\hat{f}\right|^2 d\xi \ \le \frac{C}{\left(1 - \dfrac{(d+1)|\lambda|}{|q|^{m_0\mu_n}}\right)^{2m_n}} \|f\|_{0,\mu,\lambda,q}^2. \qquad (17)$$

Докажем теперь, что существует обратный оператор

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{P}}Rf &= \left(\overline{\mathrm{P}}_0(x',\tau,D,q) - \overline{\mathrm{P}}_0(0,D,q) + \overline{\mathrm{P}}_0(0,D,q) + \mathrm{P}_1(x',\tau,D,q)\right)Rf = \\
&= \left(\overline{\mathrm{P}}_0(x',\tau,D,q) - \overline{\mathrm{P}}_0(0,D,q)\right)Rf + \mathrm{P}_1(x',\tau,D,q)Rf + \\
&+ \overline{\mathrm{P}}_0(0,D,q)e^{-\lambda\tau}F^{-1}\frac{F(e^{\lambda\tau}f(x',\tau))(\xi)}{\overline{\mathrm{P}}_0} = T_1 f + T_2 f + \\
&+ e^{-\lambda\tau}\overline{\mathrm{P}}_0(0,D',D_n + i\lambda, q)F^{-1}\frac{\hat{f}}{\overline{\mathrm{P}}_0} = T_1 f + T_2 f + f,
\end{aligned}$$

где $T_1 f = \left((\overline{\mathrm{P}}_0(x',\tau,D,q) - \overline{\mathrm{P}}_0(0,D,q)\right)$ $, T_2 f = \mathrm{P}_1 Rf.$

Если бы оператор $T_1 + T_2$, действующий из $H_{\mu}^{0,q}(\lambda\ )$ в $H_{\mu}^{0,q}(\lambda\ )$, имел норму меньше единицы, то оператор $\overline{\mathrm{P}}$ имел бы обратный оператор, равный $R(1 + T_1 + T_2)^{-1}$.

Посмотрим, при каких λ и q оператор $T_1 + T_2$ имеет малую норму. Из условия 2 и оценки (17) и следствия получим

$$\|T_1 f\|_{0,\mu,\lambda,q}^2 = \left\|\left(\overline{\mathrm{P}}_0(x',\tau,D,q) - \overline{\mathrm{P}}_0(0,D,q)\right)Rf\right\|_{0,\mu,\lambda,q}^2 \le$$

$$\le\ \varepsilon^2 C^2 \|Rf\|_{2,\mu,\lambda,q}^2 \le \frac{\varepsilon^{\ 2} C_1^2}{\left(1\ - \dfrac{(d+1)|\lambda\ |}{|q|^{m_0\mu_n}}\right)^{2m_n}} \|f\|_{0,\mu,\lambda,q}^2\ ,$$

при $|q|^{m_0\mu_n} > (d+1)|\lambda|$.

Из оценки (17), лемм 4 и следствия получим

$$\left\|T_2 f\right\|_{0,\mu\lambda,q} \le \frac{C}{|q|^{\beta}}\left\|T_2 f\right\|_{1,\mu\lambda,q} \le \frac{C_2\|f\|_{0,\mu\lambda,q}}{|q|^{\beta}\left(1-\frac{(d+1)|\lambda|}{|q|^{m_0\mu_n}}\right)^{m_n}},$$

где $\beta = \min\{2-(\ell,\mu), \text{где} (\ell,\mu) < 2\}$.

Предположим, что ε настолько мало, что $\varepsilon C_1 < \frac{1}{4}$. Тогда для существования обратного оператора достаточно, чтобы

$$\frac{\frac{1}{4}+\frac{C_2}{|q|^{\beta}}}{\left(1-\frac{(d+1)|\lambda|}{|q|^{m_0\mu_n}}\right)^{m_n}} < \frac{1}{2}, \tag{18}$$

а для выполнения (18) достаточно, чтобы $|\lambda| < \frac{1}{d+1}\left(1-\sqrt[m_n]{\frac{1}{2}+\frac{2C_2}{|q|^{\beta}}}\right)|q|^{m_0\mu_n}$.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть оператор $P(x,D,q)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, 2. Тогда уравнения $\mathrm{P}u = f$ при любом $f \in H^{\kappa,q}_{\alpha,\mu}$ и имеют единственное решение из класса $H^{2+\kappa,q}_{\alpha,\mu}$, и имеют место неравенство

$$\langle u\rangle_{2+\kappa,\mu,\alpha,q} \le C\langle f\rangle_{\kappa,\mu,\alpha,q}.$$

Доказательство аналогично.

Кафедра математических методов и моделирования

Поступила 08.12.1997

ЛИТЕРАТУРА

1. **Карапетян Г. А.** Об одном классе вырождающихся регулярных уравнений в полупространстве. - Изв. АН Арм. ССР, сер.матем., 1986, т. XXI, №5, с. 471-487.
2. **Карапетян Г. А.** Регулярные уравнения с параметром. - Изв. АН. Арм. ССР, сер. матем., 1990, т.25, №2, с.193-202.
3. **Агранович М. С. Вишик М.Н.** Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. - УМН,1964, т. XIX, №3(117), с. 33-157.
4. **Фурсиков А. В.** Об одном классе вырождающихся эллиптических операторов. - Мат. сб., 1969, т.79(121), №3(7), с. 381-404.
5. **Никольский С. М.** - Приближение функций многих переменных. М.: "Наука", 1969.
6. **Бесов О.В., Ильин В. Г., Никольский С. М.**- Интегральное представление функций и теоремы вложения. М.: "Мир", 1975.
7. **Карапетян Г. А.** - Решение полуэллиптических уравнений в полупространстве. — Тр. МИАН СССР, 1984, с. 119-136.

Գ.Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ, Ա.Հ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ՎԵՐԱՍԵՐՎՈՂ ԿԻՍԱԷԼԻՊՏԻԿ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Ամփոփում

Հոդվածում ուսումնասիրվում են կիսաէլիպտիկ հավասարումների լուծման գոյության, միակության և ողորկության հարցերը կիսատարածությունում, որոնք վերասերվում են եզրի վրա: Պարամետրից կախված $P(x,q,D)u=f$ հավասարման լուծման հատկությունները ուսումնասիրելու համար մտցվում է $H^{k,q}_{\alpha,\mu}(R^n_+)$ տարածությունը, որը $C_0^\infty(R^n_+)$ տարածության լրիվացումն է համապատասխան նորմով,և տրվում են այդ տարածությունների հատկությունները: Վերջնական արդյունքը ստացվում է երկրորդ թեորեմում: