ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2,1998 Естественные науки

Математика

УДК 519.21

А.З. АРАКЕЛЯН

О ХВОСТАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ СУММ

В настоящей работе изучается асимптотическое поведение хвостов функций распределения сумм

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n \text{ и } S_\nu = \xi_1 + \ldots + \xi_\nu$$

независимых случайных величин, где ν - целочисленный индекс с конечным математическим ожиданием, не зависящий от слагаемых, и функций распределения максимумов

$$\zeta_n = \max_{1 \le k \le n} S_k \text{ и } \zeta_\nu = \sup_{1 \le n \le \nu} S_n$$

при определенных условиях на асимптотические поведения хвостов распределений случайных величин ξ_n, $n \ge 1$.

1^0. Пусть $\xi_1, \xi_2 \ldots$ – последовательность независимых случайных величин с функциями распределения $F_1, F_2, \ldots$ соответственно; $\nu \ge 0$ – независящая от $\{\xi_n\}$ целочисленная случайная величина с распределением $\{c_k\}$, где $c_0 < 1$,

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad n \ge 1, \quad S_0 = 0$$

и

$$\zeta_\nu = \sup_{0 \le n \le \nu} S_n .$$

В дальнейшем $\{\delta_n\}$ – последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющая условиям $\delta_1 = 1$ и

$$\sup_{n \ge 1} \delta_n < \delta < +\infty , \tag{1}$$

$L(t) > 0$ – измеримая на R^+ функция, для которой

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{L(xt)}{L(t)} = 1 \text{ для всех } x > 0 .$$

Это – определение медленного изменения фупкций [1].

Введем условия:

1. $$1 - F_n(t) \sim \delta_n \cdot t^{-\alpha} \cdot L(t) \text{ при } t \to +\infty ,$$

где $\alpha > 0$, $n \ge 1$ ($f \sim g$ означает $(f/g) \to 1$).

При замене в условии 1 $1 - F_n(t)$, $n \ge 1$, на $1 - F_n(t) + F_n(-t)$ говорим об условии 1'.

2. $$M_\nu \overset{def}{=} \sum_{k \ge 1} k \cdot c_k < +\infty .$$

Обозначим $A_k = \delta_1 + \ldots + \delta_k$, $k \ge 1$. Из (1) и теоремы Штольца следует

$$\sup_{n\geq 1} n^{-1}\cdot A_n < \delta < +\infty .$$

Действительно, любая сходящаяся последовательность $\{\delta_{n_k}\}$ и последовательность $\{n_k^{-1}\cdot A_{n_k}\}$ при $k\to+\infty$ имеют одинаковый предел.

Тогда по условию 2

$$0 < A = \sum_{n\geq 1} c_n A_n < +\infty . \tag{2}$$

Пусть $G(t) = P(\zeta_v < t)$, где P – знак вероятности.

Нами установлена

Теорема 1. При выполнении условий 1 и 2 существует предел

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1-G(t)}{1-F_1(t)} = A.$$

Пусть

$$S_v = \xi_1 + \ldots + \xi_v \text{ и } F(t) = P(S_v < t).$$

В основе теоремы 1 лежит

Теорема 2. При выполнении условий 1 и 2 существует предел

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1-F(t)}{1-F_1(t)} = A.$$

Если ξ_1, ξ_2 ... одинаково распределены, то соотношение приобретает вид

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1-F(t)}{1-F_1(t)} = M_v.$$

Последнее соотношение сохраняется при некоторых видах зависимости ξ_1 и v (см., напр., [2], гл. 8, зад. 31, с. 330 [3,4]).

Говорят, что функция распределения R имеет асимметрию $\beta\in[-1;1]$, если

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1-R(t)-R(-t)}{1-R(t)+R(-t)} = \beta .$$

Функция G имеет асимметрию 1, а для F справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1' и 2, а F_n, $n\geq 1$, имеют асимметрии β_n. Тогда у F существует асимметрия

$$\beta = A^{-1}\cdot\sum_{k\geq 1} c_k\cdot B_k ,$$

где

$$B_k = \beta_1\cdot\delta_1 + \ldots + \beta_k\cdot\delta_k,\ k\geq 1.$$

Обозначим $F_n(t) = P(S_n < t)$. При доказательстве теоремы 2 используется соотношение

$$1 - F_n(t) \sim \sum_{k=1}^{n} (1 - F_k(t)),\quad n\geq 1,\ t\to+\infty , \tag{3}$$

справедливое при выполнении условия 1, что установлено В. Феллером [2, с. 319-320] при менее ограничительном условии.

При этом

$$1 - F_n(t) \geq \sum_{k=1}^{n} (1 - F_k(t)),\quad n\geq 1,\ t\to+\infty , \tag{3'}$$

без каких-либо ограничений на F_k, $k=\overline{1,n}$.

2^0. Выведем теорему 1 из теоремы 2.

Поскольку

$$1-G(t)=P(\sup_{0\le n\le\nu} S_n \ge t)\ge P(S_\nu \ge t)=1-F(t),\ \ t>0,$$

то из теоремы 2 следует

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1-G(t)}{1-F_1(t)}\ge A\,. \tag{4}$$

Обозначим $\eta_n=\max(0,\xi_n)$, $n\ge 1$. При каждом $n\ge 1$ правые хвосты функции распределения случайной величины η_n и F_n совпадают. Поэтому для последовательности $\{\eta_n\}$ удовлетворено условие 1.

Обозначим

$$T_\nu=\eta_1+\ldots+\eta_\nu\,.$$

Независимость ν от $\{\xi_n\}$ влечет независимость ν от $\{\eta_n\}$. Из-за неравенств $\eta_n\ge 0$ и $\eta_n\ge\xi_n$ при всех $n\ge 1$ имеем

$$P(\zeta_\nu\ge t)\le P\left(\sup_{0\le n\le\nu} T_n\ge t\right)=P(T_\nu\ge t),\ t>0, \tag{5}$$

где $T_n=\eta_1+\ldots+\eta_n$, $\quad n\ge 1,\ T_0=0$.

По теореме 2

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{P(T_\nu\ge t)}{1-F_1(t)}=A,$$

откуда и из (5) следует

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1-G(t)}{1-F_1(t)}\le A.$$

Последнее неравенство и (4) доказывают теорему 1. ▷

Докажем теорему 2. По формуле полной вероятности

$$1-F(t)=\sum_{k\ge 1} c_k(1-F_k(t)),\ \ t>0\,. \tag{6}$$

Согласно условию 1, неравенствам (1) и (2) для любого $\varepsilon\in(0,1)$ существует целое $m_0\ge 1$ такое, что одновременно выполнены неравенства

$$\sum_{k\ge m_0} k\cdot c_k<\frac{\varepsilon}{2\delta(1+\varepsilon)^2},\quad \frac{A_{m_0}}{\delta\cdot m_0}<1+\varepsilon\,, \tag{7}$$

$$A-\frac{\varepsilon}{4}<\sum_{k=1}^{m_0-1}c_k\cdot A_k<A. \tag{8}$$

Зафиксируем ε и m_0. Из условия 1 и соотношения (3) получаем

$$I_{1,m_0}(t)=\sum_{k=1}^{m_0-1}c_k\cdot\left(1-F_{(k)}(t)\right)\sim\sum_{k=1}^{m_0-1}c_k\cdot\sum_{i=1}^{k}\left(1-F_i(t)\right)\sim$$

$$\sim\left(1-F_1(t)\right)\cdot\sum_{k=1}^{m_0-1}c_k\cdot A_k,\ \ t\to+\infty\,.$$

Поэтому найдется $t_0>0$ такое, что при $t\ge t_0$

$$\left|\frac{I_{1,m_0}(t)}{1-F_1(t)}-\sum_{k=1}^{m_0-1}c_k-A_k\right|<\frac{\varepsilon}{4}$$

и одновременно

$$\frac{1-F_{m_0}(t)}{1-F_1(t)} < A_{m_0}(1+\varepsilon). \tag{9}$$

Тогда первое неравенство и (8) дают

$$\left|\frac{I_{1,m_0}(t)}{1-F_1(t)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2},\ t \ge t_0. \tag{10}$$

Так как $0 \le \sup\limits_{t\ge 0} \dfrac{1-F_{(k)}(t)}{k} = \dfrac{1}{k} \to 0$ при $k \to +\infty$,

то

$$I_{2,m_0}(t) = \sum_{k\ge m_0} c_k\left(1-F_{(k)}(t)\right) = \sum_{k\ge m_0} k\cdot c_k \sum_{n\ge k}\left\{\frac{1-F_{(n)}(t)}{n} - \frac{1-F_{(n+1)}(t)}{n+1}\right\} =$$

$$= \sum_{n\ge m_0}\left\{\frac{1-F_{(n)}(t)}{n} - \frac{1-F_{(n+1)}(t)}{n+1}\right\}\cdot \sum_{k=m_0}^{n} k\cdot c_k,\ t>0.$$

Тогда из (7) и (9) следует

$$0 \le \frac{I_{2,m_0}(t)}{1-F_1(t)} < \frac{\varepsilon}{2\delta\cdot(1+\varepsilon)^2}\cdot\frac{1}{m_0}\cdot\frac{1-F_{(m_0)}(t)}{1-F_1(t)} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2\delta\cdot(1+\varepsilon)}\cdot\frac{A_{m_0}}{m_0} < \frac{\varepsilon}{2},\ t\ge t_0. \tag{11}$$

Принимая во внимание равенство

$$1-F(t) = I_{1,m_0}(t) + I_{2,m_0}(t),\ t>0,$$

вытекающее из (6) и определений функций I_{1,m_0} и I_{2,m_0}, из неравенств (10) и (11) выводим

$$A-\varepsilon < \varliminf_{t\to+\infty}\frac{1-F(t)}{1-F_1(t)} \le \varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1-F(t)}{1-F_1(t)} < A+\varepsilon.$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$, приходим к теореме 2. ▷

3^0. Приступим к доказательству теоремы 3.

Условие существования ассиметрии β_n, $n\ge 1$, у F_n равносильно существованию пределов

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1-F_n(t)}{1-F_n(t)+F_n(-t)} = \frac{1+\beta_n}{2} \text{ и } \lim_{t\to+\infty}\frac{F_n(-t)}{1-F_n(t)+F_n(-t)} = \frac{1-\beta_n}{2}. \tag{12}$$

Пусть $\beta_1 \ne -1$. Тогда функция

$$L^+(t) = \frac{1+\beta_1}{2}L(t) > 0$$

измерима на R^+ и для неё $\lim\left(L^+(xt)/L^+(t)\right) = 1$ при всех $x>0$.

Введем неотрицательные константы

$$\delta_n^+ = \frac{1+\beta_n}{1+\beta_1}\cdot\delta_n,\ n\ge 1,$$

где константы δ_n присутствуют в условии $1'$. Тогда $\delta_1^+ = 1$ и из (1) следует

$$\sup_{n\ge 1}\delta_n^+ = \frac{1}{1+\beta_1}\cdot\sup_{n\ge 1}(1+\beta_n)\ \delta_n < \frac{2}{1+\beta_1}\cdot\delta < +\infty.$$

Из условия $1'$ и существования асимметрий $\beta_n, n\ge 1$ вытекает (см. (12))

$$1-F_n(t)\sim\frac{1+\beta_n}{2}\left(1-F_n(t)+F_n(-t)\right)\sim\delta_n\cdot\frac{1+\beta_n}{2}\cdot t^{-\alpha}L(t)=$$

$$=\delta_n^+\cdot t^{-\alpha}\cdot L^+(t),\ t\to+\infty.$$

Таким образом, выполнен аналог условия 1.

$$1-F_n(t)\sim\delta_n^+\cdot t^{-\alpha}\ L^+(t), n\ge 1, t\to+\infty. \tag{13}$$

Как и выше, обозначим

$$A_k^+=\delta_1^+ +\ldots+\delta_k^+=\frac{1}{1+\beta_1}\cdot\sum_{i=1}^{k}(1+\beta_i)\cdot\delta_i=\frac{A_k+B_k}{1+\beta_1},\ k\ge 1,$$

и
$$A^+=\sum_{k\ge 1}c_k\cdot A_k^+=(1+\beta_1)^{-1}\cdot\left\{A+\sum_{k\ge 1}c_kB_k\right\}\qquad \text{(см. (2))}. \tag{14}$$

На основании (13) и условия 2 применима теорема 2:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1-F(t)}{1-F_1(t)}=A^+. \tag{15}$$

С другой стороны, если выполнены условия 1' и 2, то имеет место следующий аналог теоремы 2:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1-F(t)+F(-t)}{1-F_1(t)+F_1(-t)}=A. \tag{16}$$

Набросок доказательства (16) дан в приложении.

Теперь из определения асимметрии (14)-(16) и соотношений (12) при $n=1$ получаем

$$\beta=\lim_{t\to+\infty}\frac{1-F(t)-F(-t)}{1-F(t)+F(-t)}=-1+2\lim_{t\to+\infty}\frac{1-F(t)}{1-F(t)+F(-t)}=$$

$$=-1+2\frac{A^+}{A}\cdot\lim_{t\to+\infty}\frac{1-F_1(t)}{1-F_1(t)+F_1(-t)}=-1+\frac{A^+}{A}(1+\beta_1)=$$

$$=A^{-1}\sum_{k\ge 1}c_kB_k.$$

Пусть $\beta_1=-1$. Тогда вместо функции L^+ и константы δ_n^+ вводим функцию $L^-(t)=L(t)>0$ и константы $\delta_n^-=\frac{1-\beta_n}{2}\cdot\delta_n\ge 0,\ n\ge 1,$ где $\beta_1^-=1$.

Имеет место аналог условия 1:

$$F_n(-t)\sim\delta_n^- t^{-\alpha}\cdot L^-(t),\ n\ge 1,\ t\to+\infty.$$

Обозначим

$$A_k^-=\delta_1^- +\ldots+\delta_k^-=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(1-\beta_i)\delta_i=\frac{1}{2}(A_k-B_k),\ k\ge 1,$$

и

$$A^-=\sum_{k\ge 1}c_k\cdot A_k^-=\frac{1}{2}\left\{A-\sum_{k\ge 1}c_k\cdot B_k\right\}.$$

Для функций распределения случайных величин $(-\xi_n), n\ge 1, F_n(-t)$ являются правыми хвостами, а $F(-t)$ – правым хвостом функции распределения случайной величины $(-S_\nu)$. Поэтому и в данном случае теорема 2 применима:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{F(-t)}{F_1(-t)}=A^-.$$

В данном случае

$$\beta = 1 - 2\lim_{t\to+\infty}\frac{F(-t)}{1-F(t)+F(-t)} = 1 - 2\frac{A^{-1}}{A} = A^{-}\sum_{k\ge1} c_k B_k . \triangleright$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Поскольку $F_n(-t)$ есть правый хвост для функции распределения случайной величины $(-\xi_n)$, а $F_n(-t)$ – для $(-S_n)$, то без ограничения на F_k, $k=\overline{1,n}$ справедлива оценка

$$F_n(-t) \ge \sum_{k=1}^{n} F_k(-t),\ t\to+\infty, n\ge1,$$

что следует из (3'). Это неравенство складываем с (3'), что дает

$$1 - F_n(t) + F_n(-t) \ge \sum_{k=1}^{n}\left(1 - F_k(t) + F_k(-t)\right),\ t\to+\infty. \tag{17}$$

Далее, $F_{(n)}$ и функция распределения случайной величины $|S_n|$ имеют одинаковую сумму хвостов, причем левый хвост у $P(|S_n|<t)$ равен нулю. С другой стороны, F_i и функции распределения случайных величин $|\xi_i|$ при каждом $i=\overline{1,n}$ также имеют одинаковую сумму хвостов. Поэтому по формуле Феллера

$$0 \le 1 - F_n(t) + F_n(-t) = P(|S_n|\ge t) \le P(|\xi_1| + \ldots + |\xi_n| \ge t) \sim$$

$$\sim \sum_{k=1}^{n} P(|\xi_k|\ge t) = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - F_k(t) + F_k(-t)\right),\ t\to+\infty,\ n\ge1.$$

Последнее неравенство и (17) доказывают формулу

$$1 - F_{(n)}(t) + F_{(n)}(-t) \sim \sum_{k=1}^{n}\left(1 - F_k(t) + F_k(-t)\right),\ t\to+\infty. \triangleright \tag{18}$$

По формуле полной вероятности

$$1 - F(t) + F(-t) = I_{1,m}(t) + I_{2,m}(t),\ m\ge1,\ t>0, \tag{19}$$

где $I_{1,m}(t) = \sum_{k=1}^{m-1} c_k \cdot \left(1 - F_k(t) + F_{(k)}(-t)\right),$

$$I_{2,m}(t) = \sum_{k\ge m} c_k \cdot \left(1 - F_k(t) + F_{(k)}(-t)\right).$$

Пусть выполнены условия 1' и 2.

Как и в теореме 2, для $\varepsilon\in(0;\,1)$ существует целое $m_0\ge1$ такое, что одновременно выполнены неравенства (7), (8). Найдется $t_0>0$ такое, что для функций I_{1,m_0} и I_{2,m_0} при $t\ge t_0$ справедливы оценки (10) и (11). Оценки (10), (11) и равенство (19) приводят к существованию предела (16). $\triangleright$

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

Поступила 14.04. 1998

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сенета Е.** Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 141 с.
2. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984, т.2, 751 с.

3. **Greenwood P.** Asimptotics of randomly stopped sequences with independent increments. – Ann. Probability, 1973, v. 1, p. 317-321.
4. **Greenwood P., Monroe I.** Random stopping preserves regular variation of process distributions. – Ann. Probability, 1977, v.5, p. 42-51.

Ա.Զ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ԳՈՒՄԱՐԻ ԲԱՇԽՄԱՆ ՊՈՉԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիցուք $\{\xi_n\}$-ը անկախ, $\{F_n\}$ բաշխման ֆունկցիաներով պատահական մեծությունների հաջորդականություն է, $\nu \geq 0$-ն ամբողջ արժեքներ ընդունող, $\{c_k\}$ բաշխումով, $c_0 < 1$, պատահական մեծություն է, որը կախված չէ $\{\xi_n\}$ հաջորդականությունից:

F_n-երի, $n \geq 1$, պոչերի կանոնավոր փոփոխման և ν-ի մաթեմատիկական սպասման գոյության պայմաններում ուսումնասիրվում է

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \qquad \zeta_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k \text{ (որտեղ } S_0 = 0\text{)},$$

$$S_\nu = \xi_1 + \ldots + \xi_\nu, \qquad \zeta_\nu = \sup_{0 \leq n \leq \nu} S_n$$

պատահական մեծությունների բաշխման ֆունկցիաների պոչերի ասիմպտոտիկ վարքը: