ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ   2, 1994   Естественные науки

Математика

УДК 518.9

М.С. ГАБРИЕЛЯН, В.Р. БАРСЕГЯН

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПРОГРАММНЫЙ СИНТЕЗ ДЛЯ ПОЭТАПНО МЕНЯЮЩИХСЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Рассматривается поэтапно меняющаяся дифференциальная игра в классе частично-программных стратегий, когда показатель качества является функционалом от траектории на конечные моменты времени. Оптимальные стратегии строятся методом стохастического программного синтеза, описанным в [1]. Доказывается, что стохастический частично-программный максимин является ценой соответствующей позиционной поэтапно меняющейся дифференциальной игры.

1. Постановка задачи и программный максимин. Пусть движение конфликтно-управляемой поэтапно меняющейся системы описывается векторными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_k = A_k(t)\, x_k + B_k(t) u_k + C_k(t)\, v_k \qquad (k = 1, \ldots, m), \tag{1.1}$$

где $A_k(t)$ – $(n \times n)$, $B_k(t)$ – $(n \times p_k)$, $C_k(t)$ – $(n \times q_k)$ - непрерывные матрицы функции при $t_0 \le t \le \theta$ (t_0 и θ – заданные моменты времени). Управления u_k и v_k выбираются соответственно из компактных множеств P_k и Q_k:

$$u_k \in P_k \subset R^{p_k}, \; v_k \in Q_k \subset R^{q_k} \qquad (k = 1, \ldots, m). \tag{1.2}$$

Пусть заданы моменты времени $t_0 = \vartheta_0 < \vartheta_1 < \ldots < \vartheta_m = \theta$ и функционал

$$\gamma = \left(\sum_{k=1}^{m} | x_k [\vartheta_k] |^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left(x_{ki} [\vartheta_k] \right)^2 \right)^{1/2}, \tag{1.3}$$

где $x_k[t]$, $t \in [\vartheta_{k-1}, \vartheta_k]$ $(k = 1, \ldots, m)$, – фазовый вектор системы (1.1).

Пусть $(t_0, x_0$ - исходная позиция системы (1.1), где $x_0 = x_1(t_0)$ и Δ_r есть разбиение полуоси $t_0 \le t < \infty$, $\tau_1^{(r)}, \tau_2^{(r)}, \ldots$ – узлы разбиения, диаметр разбиения будет $\delta_r = \sup\limits_i \left(\tau_{i+1}^{(r)} - \tau_i^{(r)} \right)$.

Предполагается, что при любом r (т.е. разбиений Δ_r) моменты времени ϑ_k, $(k = 1, ..., m)$ являются узлами разбиения, т.е.

$$\tau_{i_0}^{(r)} = \vartheta_0, \ \tau_{i_1}^{(r)} = \vartheta_1, \ ..., \ \tau_{i_m}^{(r)} = \vartheta_m = \theta. \tag{1.4}$$

Рассмотрим дифференциальную игру при условиях (1.1)-(1.3), в которой управления u_k и v_k являются случайными функциями от элементарных событий $\omega_j = \{\xi_1, ..., \xi_j\}$ из вероятностного пространства $\{\Omega_j, B_j, P_j\}$, которое строится по схеме, описанной в [1] (стр. 291).

Рассмотрим полуинтервал

$$\left[\tau_{i_{k-1}+j-1}^{(r)}, \tau_{i_{k-1}+j}^{(r)}\right) \subset \left[\vartheta_{k-1}, \vartheta_k\right) \qquad (k = 1, ..., m; \ j = 1, ..., i_k - i_{k-1} + 1).$$

Определение 1.1. Стохастическим частично-программным управлением на полуинтервале $\left[\tau_{i_{k-1}+j-1}^{(r)}, \tau_{i_{k-1}+j}^{(r)}\right)$ первого игрока назовем измеримое отображение вида

$$u_k^{(i_{k-1}+j)} : \left[\tau_{i_{k-1}+j-1}^{(r)}, \tau_{i_{k-1}+j}^{(r)}\right) \times \Omega_{i_{k-1}+j} \times R^n \to P_k \subset R^{p_k}. \tag{1.5}$$

Аналогичным образом определяется стохастическое частично-программное управление на полуинтервале $\left[\tau_{i_{k-1}+j-1}^{(r)}, \tau_{i_{k-1}+j}^{(r)}\right)$ второго игрока

$$v_k^{(i_{k-1}+j)} : \left[\tau_{i_{k-1}+j-1}^{(r)}, \tau_{i_{k-1}+j}^{(r)}\right) \times \Omega_{i_{k-1}+j} \times R^n \to Q_k \subset R^{q_k}. \tag{1.6}$$

Определим на полуинтервале $\left[\tau_{i_{k-1}+j-1}^{(r)}, \tau_{i_{k-1}+j}^{(r)}\right)$ случайное движение

$$x_k^{(i_{k-1}+j)} \left[\tau_{i_{k-1}+j-1}^{(r)} \ [\cdot] \tau_{i_{k-1}+j}^{(r)}; \cdot ; x_k^{(i_{k-1}+j-1)} \left[\tau_{i_{k-1}+j-1}^{(r)}\right]\right] = x_k^{(i_{k-1}+j-1)} \Big[\cdot;$$

$$\left.\tau_{i_{k-1}+j}^{(r)}, x_k^{(i_{k-1}+j-1)} \left[\tau_{i_{k-1}+j-1}^{(r)}\right], u_k^{(i_{k-1}+j-1)}(\cdot), v_k^{(i_{k-1}+j-1)}(\cdot)\right] =$$

$$= \left\{ x_k^{(i_{k-1}+j-1)} \left(t, \omega_{i_{k-1}+j}, x_k^{(i_{k-1}+j-1)} \left[\tau_{i_{k-1}+j}^{(r)}\right]\right) = x_k^{(i_{k-1}+j-1)}(\cdot) ; \right.$$

$$\tau_{i_{k-1}+j-1}^{(r)}, x_k^{(i_{k-1}+j-1)} \left[\tau_{i_{k-1}+j-1}^{(r)}\right], u_k^{(i_{k-1}+j)}(\cdot), v_k^{(i_{k-1}+j)}(\cdot), \tag{1.7}$$

$$\left. \vartheta_{k-1} \le \tau_{i_{k-1}+j-1}^{(r)} \le t < \tau_{i_{k-1}+j}^{(r)} < \vartheta_k, \omega_{i_{k-1}+j} \in \Omega_{i_{k-1}+j} \right\}$$

как случайное решение стохастического уравнения

$$\dot{x}_k^{(i_{k-1}+j)} = A_k(t) \, x_k^{(i_{k-1}+j)} +$$

$$+ B_k(t) \, u_k^{(i_{k-1}+j)} \left(t, \xi_1, ..., \xi_{i_{k-1}+j}, x_k^{(i_{k-1}+j-1)} \left[\tau_{i_{k-1}+j-1}^{(r)}\right]\right) +$$

$$+ C_k(t) \, v_k^{(i_{k-1}+j)} \left(t, \xi_1, ..., \xi_{i_{k-1}+j}, x_k^{(i_{k-1}+j-1)} \left[\tau_{i_{k-1}+j-1}^{(r)}\right]\right) \tag{1.8}$$

при частично-программных управлениях $u_k^{(i_{k-1}+j)}(\cdot)$, $v_k^{(i_{k-1}+j)}(\cdot)$ и начальной позиции $\left(\tau^{(r)}_{i_{k-1}+j-1}, x_k^{(i_{k-1}+j-1)}\left[\tau^{(r)}_{i_{k-1}+j-1}\right]\right)$.

Здесь предполагается, что начало случайного движения, начиная с этапа $\left[\vartheta_k, \vartheta_{k+1}\right)$, совпадает с концом предыдущего этапа, т.е.

$$x_{k+1}^{(i_k+1)}\left[\vartheta_k; \cdot ; x_{k+1}^{(i_k+1)}\left[\vartheta_k\right]\right] \equiv x_k^{(i_k)}\left[\vartheta_k; \cdot ; x_k^{(i_k)}\left[\vartheta_k\right]\right].$$

Определение 1.2. Измеримая по t, ω_{i_k} функция $u_k\left(t, \omega_{i_k}, x_k^{(i_{k-1})}\left[\tau^{(r)}_{i_{k-1}}\right]\right)$ называется неупреждающей, если при почти всех $\omega_{i_k} \in \Omega_{i_k}$ выполняется

$$u_k\left(t, \omega_{i_k}, x_k^{(i_{k-1})}\left[\tau^{(r)}_{i_{k-1}}\right]\right) = u_k\left[t, \xi_1, ..., \xi_{i_{k-1}+j},\right.$$

$$\left. x_k^{(i_{k-1}+j)}\left[\tau^{(r)}_{i_{k-1}+j-1}\right]\right], \vartheta_{k-1} \le \tau^{(r)}_{i_{k-1}+j-1} \le t < \tau^{(r)}_{i_{k-1}+j} < \vartheta_k, \tag{1.9}$$

$$j = 1, ..., i_k - i_{k-1} + 1; \quad k = 1, ..., m.$$

Аналогичным образом определяется неупреждающая функция

$$v_k\left(t, \omega_{i_k}, x_k^{(i_{k-1})}\left[\tau^{(r)}_{i_{k-1}}\right]\right) = v_k\left[t, \xi_1, ..., \xi_{i_{k-1}+j},\right.$$

$$\left. x_k^{(i_{k-1}+j)}\left[\tau^{(r)}_{i_{k-1}+j-1}\right]\right], \vartheta_{k-1} \le \tau^{(r)}_{i_{k-1}+j-1} \le t < \tau^{(r)}_{i_{k-1}+j} < \vartheta_k, \tag{1.10}$$

$$j = 1, ..., i_k - i_{k-1} + 1; \quad k = 1, ..., m.$$

Определение 1.3. Стохастическим частично-программным управлением на k-ом $\left(\left[\vartheta_{k-1}, \vartheta_k\right)\right)$ этапе первого игрока назовем неупреждающее отображение вида

$$u_k : \left[\vartheta_{k-1}, \vartheta_k\right) \times \Omega_{i_k} \times R^n \to P_k \subset R^{p_k}. \tag{1.11}$$

Аналогичным образом определяется стохастическое частично-программное управление на k - ом этапе второго игрока как неупреждающее отображение вида

$$v_k : \left[\vartheta_{k-1}, \vartheta_k\right) \times \Omega_{i_k} \times R^n \to Q_k \subset R^{q_k}. \tag{1.12}$$

Стохастическое частично-программное управление первого и второго игрока на k-ом этапе имеет структуру

$$u_k(\cdot) = \begin{cases} u_k^{(i_{k-1}+1)}(\cdot) & \textit{при} \quad t \in \left[\vartheta_{k-1}, \tau^{(r)}_{i_{k-1}+1}\right), \\ u_k^{(i_{k-1}+2)}(\cdot) & \textit{при} \quad t \in \left[\tau^{(r)}_{i_{k-1}+1}, \tau^{(r)}_{i_{k-1}+2}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ u_k^{(i_k)}(\cdot) & \textit{при} \quad t \in \left[\tau^{(r)}_{i_{k-1}}, \tau^{(r)}_{i_k}\right); \end{cases} \tag{1.13}$$

$$v_k(\cdot)=\begin{cases} v_k^{(i_{k-1}+1)}(\cdot) & \text{при} \quad t\in\left[\vartheta_{k-1},\tau^{(r)}_{i_{k-1}+1}\right),\\ v_k^{(i_{k-1}+2)}(\cdot) & \text{при} \quad t\in\left[\tau^{(r)}_{i_{k-1}+1},\tau^{(r)}_{i_{k-1}+2}\right),\\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ v_k^{(i_k)}(\cdot) & \text{при} \quad t\in\left[\tau^{(r)}_{i_{k-1}},\tau^{(r)}_{i_k}\right). \end{cases} \qquad (1.14)$$

Определим случайное движение на k - ом этапе

$$x_k\left[\vartheta_{k-1}[\cdot]\vartheta_k;\cdot\,;x_{k-1}^{(i_{k-1}-1)}\left[\tau^{(r)}_{i_{k-1}}\right]\right]=x_k\left[\cdot;\vartheta_{k-1},\ x_{k-1}^{(i_k-1)}\left[\tau^{(r)}_{i_{k-1}}\right],\right.$$

$$\left.u_k(\cdot),v_k(\cdot)\right]=\left\{x_k\left(t,\omega_{i_k}\right)=x_k\left[\cdot;\vartheta_{k-1},\ x_k^{(i_k-1)}\left[\tau^{(r)}_{i_{k-1}}\right],u_k(\cdot),\right.\right. \qquad (1.15)$$

$$\left.\left.v_k(\cdot)\right.,\vartheta_{k-1}\le\tau^{(r)}_{i_{k-1}+j-1}\le t<\tau^{(r)}_{i_{k-1}+j}<\vartheta_k,\ j=1,\dots,i_k-i_{k-1}+1,\ \omega_{i_k}\in\Omega_{i_k}\right\}$$

как случайное решение стохастического уравнения

$$\dot{x}_k=A_k(t)\,x_k+B_k(t)\,u_k(t,\omega_{i_k})+C_k(t)\,v_k(t,\omega_{i_k}) \qquad (1.16)$$

при частично-программных управлениях $u_k(\cdot)$, $v_k(\cdot)$ **и начальной позиции** $\left(\tau^{(r)}_{i_{k-1}+j-1},\ x_k^{(i_{k-1}+j-1)}\left[\tau^{(r)}_{i_{k-1}+j-1}\right]\right)$.

При всяком выборе $u_k(\cdot)$ (1.9) и $v_k(\cdot)$ (1.10) **случайное движение**

$$x_k\left[\vartheta_{k-1}[\cdot]\vartheta_k;\cdot\,;x_{k-1}^{(i_k-1)}\left[\tau^{(r)}_{i_{k-1}}\right]\right]$$

оказывается неупреждающей функцией ([1], стр. 294).

Функционал γ на движениях (1.15) системы (1.1) является случайной величиной, отвечающей исходной позиции (t_0,x_0), разбиению Δ_r отрезка $[t_0,\theta]$ и паре частично-программных управлений $u_k(\cdot)$ и $v_k(\cdot)$, ($k=1,\dots,m$). Пусть игра, начиная с позиции (t_0,x_0), достигла позиции (t_*,x_*), где $t_*\in\left[\tau^{(r)}_{i_{l-1}+j-1},\tau^{(r)}_{i_{l-1}+j}\right)\subset\left[\vartheta_{l-1},\vartheta_l\right)$, а $x_*=x_l\,[t_*,\omega_{i_l},x_{l-1}^{i_l-1}[\tau^{(r)}_{i_{l-1}}]]$ тогда

$$\gamma_l=\gamma_l(\cdot\,;t_*,x_*,\Delta_r,u_i(\cdot),v_i(\cdot),i=l,\dots,m)\in$$

$$\in\left\{\gamma_l(\omega)=\gamma_l(\omega,t_*,x_*,\Delta_r,u_i(\cdot),v_i(\cdot),i=l,\dots,m)=\right. \qquad (1.17)$$

$$\left.\left(\sum_{j=1}^{l-1}\left|x_j\left[\vartheta_j\right]\right|^2+\sum_{j=l}^{m}\left|x_j\left(\vartheta_j,\omega_{i_j}\right)\right|^2\right)^{1/2},\ \omega_{i_j}\in\Omega_{i_j}\right\}.$$

Качество процесса $\left\{x_k\left[t_*[\cdot]\vartheta;\cdot\right]\right\}$ будем характеризовать величиной

$$\widetilde{\gamma}_l{}_{\substack{u_i(\cdot),\, v_i(\cdot)\\ i=1,\,\dots,\,m}} = \left(M\left\{\gamma_l^2(\omega)\right\}\right)^{1/2} =$$

$$= \left(M\left\{\gamma_l^2(\omega\,,\,t_*,\,x_*,\,\Delta_r,\,u_i(\cdot),\,v_i(\cdot),\,i=l,\,\dots,\,m)\right\}\right)^{1/2}, \qquad (1.18)$$

которую можно представить в виде

$$\widetilde{\gamma}_l{}_{\substack{u_i(\cdot),\, v_i(\cdot)\\ i=1,\,\dots,\,m}} = \left(\sum_{j=1}^{l-1}\left|x_j\left[\vartheta_j\right]\right|^2 + \sum_{j=l}^{m}\left\|x_j(\vartheta\,;\,\cdot)\right\|^2\right)^{1/2}, \qquad (1.19)$$

если величину $x_j\left(\vartheta_j,\,\omega_{i_j}\right)$ считать элементами соответствующего гильбертого пространства $L^{(2)}\left(\Omega_{i_j}\right)$ ([2], стр. 279), т.е. $x_j(\cdot)\in\left\{x_j(\cdot\,;\,\omega_{i_j})\,,\,\omega_{i_j}\in\Omega_{i_j}\right\}$ и со скалярным произведением

$$\left(x_j^{(1)}(\cdot)\cdot x_j^{(2)}(\cdot)\right) = M\left\{\langle x_j^{(1)}(\cdot)\cdot x_j^{(2)}(\cdot)\rangle\right\} = \int_{\Omega_{i_j}}\langle x_j^{(1)}(\omega)\,x_j^{(2)}(\omega)\rangle\,P(d\,\omega),$$

которое порождает норму

$$\|x_j(\cdot)\| = \left(M\{|x_j(\omega)|^2\}\right)^{1/2} = \left(\int_{\Omega_{i_j}}|x_j(\omega)|^2P(d\omega)\right)^{1/2}.$$

Определение 1.4. Стохастическим частично-программным максимином для данной исходной позиции $\left(t_*,\,x_*\right)$, $t_*\in\left[\tau^{(r)}_{i_{l-1}+j-1},\,\tau^{(r)}_{i_{l-1}+j}\right)\subset\left[\vartheta_{l-1},\,\vartheta_l\right)$ и для выбранного разбиения Δ_r называется величина

$$\rho_l\left(t_*,\,x_*,\,\Delta_r\right) = \left(\sum_{j=1}^{l-1}\left|x_j\left[\vartheta_j\right]\right|^2 + \right. \qquad (1.20)$$

$$\left. + \sup_{\substack{v_i(\cdot)\\ i=l,\dots,m}}\ \inf_{\substack{u_i(\cdot)\\ i=l,\dots,m}}\ \sum_{j=l}^{m}\left\|x_j\left[\vartheta_j,;\,\cdot\,;\,u_j(\cdot)\,;\,u_j(\cdot),\,v_j(\cdot)\right]\right\|^2\right)^{1/2}.$$

Аналогично [1] (стр. 303) можно показать, что в (1.20) минимум по u_i, $i=l,\,\dots,\,m$ достигается.

Пусть разбиение Δ_r выбрано таким образом, что $\delta_r\to 0$ при $i_m\to\infty$.

Определение 1.5. Стохастическим частично-программным максимином для исходной позиции $\left(t_*,\,x_*\right)$, $t_*\in\left[\tau^{(r)}_{i_{l-1}+j-1},\,\tau^{(r)}_{i_{l-1}+j}\right)\subset\left[\vartheta_{l-1},\,\vartheta_l\right)$ назовем величину

$$\rho_l\left(t_*,\,x_*\right) = \lim_{i_m\to\infty}\rho_l\left(t_*,\,x_*,\,\Delta_r\right). \qquad (1.21)$$

Задача 1.1. Найти частично-пргграммные управления $u_i(\cdot)$, , $v_i(\cdot)$, $i=l,\,\dots,\,m$, которые доставляют стохастический частично-программный максимин (1.21).

Для решения поставленной задачи рассмотрим гильбертово пространство $H = H_1^{(1)} \times H_2^{(1)}$ наборов L вида

$$L = \left\{ \left(h_1, h_2\right) : h_1 = \left(l_1, ..., l_{l-1}\right) \in H_1^{(1)}, l_j = const \in R^n, j = 1, ..., l-1; \right.$$

$$\left. h_2 = \left(l_l(\omega_{i_l}), ..., l_m(\omega_{i_m})\right) \in H_2^{(1)}, l_j(\omega_{i_j}) \in L^{(2)}\left(\Omega_{i_j}\right);\ j = 1, ..., m \right\} \tag{1.22}$$

со скалярным произведением

$$\left(L^{(1)} \cdot L^{(2)}\right) = \sum_{j=1}^{l-1} \langle l_j^{(1)} \cdot l_j^{(2)} \rangle + \sum_{j=1}^{m} \int_{\Omega_{i_j}} \langle l_j^{(1)}(\omega) \cdot l_j^{(2)}(\omega) \rangle P(d\omega), \tag{1.23}$$

которое порождает норму

$$\|L\|_l = \left(\left(h_1\right)^2 + \|h_2\|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{l-1} |l_j|^2 + \sum_{j=1}^{m} \|l_j(\cdot)\|^2_{L^{(2)}(\Omega_{i_j})}\right)^{1/2}. \tag{1.24}$$

При $j = l, ..., m$ обозначим через m_j^* математическое ожидание $M\left\{l_j(\omega)\right\}$, а через $m_j(t, \omega) = m_i\left[\xi_1, ..., \xi_{i_j}\right]$ – условное математическое ожидание $M\left\{l_j\left(\xi_1, ..., \xi_{i_m}\right) \mid \xi_1, ..., \xi_\nu\right\}$ для всех $\nu = \left\{1, ..., i_j\right\}$ ([3], стр. 21), где $\tau_{\nu-1}^{(r)} \le t < \tau_\nu^{(r)}$ $\nu = 1, ..., i_m$.

Введем величину

$$\chi_l\left(t_*, x_*, \Delta_r, L\right) = \sum_{j=1}^{l-1} \langle l_j\, x_j\left[\vartheta_j\right] \rangle + \sum_{j=l}^{m} \langle m_j^*\, X_j\left[\vartheta_j, t_*\right] x_* \rangle +$$

$$+ M\left\{ \int_{t_*}^{\vartheta} \min_{\substack{u_j \in P_j \\ j=l,...,m}} \max_{\substack{v_j \in Q_j \\ i=l,...,m}} \sum_{j=l}^{m} \langle m_j(\tau, \omega) \bar{\bar{X}}_j\, [\vartheta_j, \tau] \times \right. \tag{1.25}$$

$$\left. \times \left(B_j(\tau) u_j(\tau,\omega) + C_j(\tau) v_j(\tau,\omega)\right) \rangle d\tau \right\},$$

где фундаментальные матрицы $X_j\ [\vartheta_j\ , t]$ и $\bar{\bar{X}}_j\ [\vartheta_j\ , t]$ определены в [4] (стр. 30).

Легко показать, что

$$\chi_l(t_*, x_*, \Delta_r, L) = \sum_{j=1}^{l-1} \langle l_j x_j\, [\vartheta_j\,] \rangle +$$

$$+ \sum_{j=l}^{m} \left(l_j(\cdot) x_j\ [\vartheta_j\ ;\ \cdot\ ;\ u_j^0(\cdot)\ ,\ v_j^0(\cdot)\,] \right)\ , \tag{1.26}$$

где частично-программные управления определяются из условий

$$\sum_{j=l}^{m} \langle\, m_j(\tau, \omega)\, \bar{\bar{X}}_j\left[\vartheta_j\ , \tau\right] B_j(\tau)\, u_j^0(\tau, \omega)\, \rangle =$$

$$= \min_{\substack{u_j \in P_j \\ j=1,\dots,m}} \sum_{j=1}^{m} \langle m_j(\tau, \omega) \bar{\bar{X}}_j \left[\vartheta_j, \tau\right] B_j(\tau) u_j \rangle \tag{1.27}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \langle m_j(\tau, \omega) \bar{\bar{X}}_j \left[\vartheta_j, \tau\right] C_j(\tau) v_j^0(\tau, \omega) \rangle =$$

$$= \max_{\substack{v_j \in Q_j \\ j=1,\dots,m}} \sum_{j=1}^{m} \langle m_j(\tau, \omega) \bar{\bar{X}}_j \left[\vartheta_j, \tau\right] C_j(\tau) v_j \rangle ,$$

Существование таких допустимых программ следует из [1] (стр. 305) и [4].

Определение 1.6. Частично-программным экстремумом назовем величину

$$e_l(t_*, x_*, \Delta_r) = \sup_{\|L\|_l \le 1} \chi_l(t_*, x_*, \Delta_r, L) . \tag{1.28}$$

В (1.28) верхняя грань существует, так как величина $\chi_l(\cdot)$ равномерно ограничена по набору L при условии $\| L \|_l \le 1$.

По схеме [1] (стр. 306) доказываются следующие леммы.

Лемма 1.1. Для всякой позиции (t_*, x_*), $t_* \in \left[\vartheta_{l-1}, \vartheta_l\right)$ при всяком разбиении Δ_r справедливо равенство

$$\rho_l(t_*, x_*, \Delta_r) = e_l(t_*, x_*, \Delta_r) . \tag{1.29}$$

Лемма 1.2. Частично-программный максимин $\rho_l(\cdot)$ (1.20) удовлетворяет условию Липшица по x_*, где

$$\lambda = \max_{t_0 \le t \le \theta} \left(\sum_{j=1}^{m} \|\bar{\bar{X}}_j [\vartheta_j, t]\|^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \max_{t_0 \le t \le \theta} \left(\sum_{j=1}^{m} \left(\max_{\|x_j\| \le 1} |\bar{\bar{X}}_j [\vartheta_j, t] x_j| \right)^2 \right)^{1/2} .$$

Рассмотрим последовательность наборов $L^{(s)}(\cdot) \in H$, $s = 1, 2, \dots$, которые удовлетворяют условию

$$e_l(t_*, x_*, \Delta_r) = \lim_{s \to \infty} \chi_l(t_*, x_*, \Delta_r, L^{(s)}).$$

при $\|L^{(s)}\|_l \le 1$.

Введем следующий набор n-мерных постоянных векторов для каждого $s = 1, 2, \dots$:

$$m^{*(s)} = \left\{ m_j^{*(s)}, j = 1, \dots, m : \; m_j^{*(s)} = l_j^{(s)}, j = 1, \dots, l-1, \right. \tag{1.30}$$

$$m_j^{*(s)} = M\left\{l_j^{(s)}(\cdot)\right\}, \quad j = l, ..., m .$$

Для каждого s ([1], стр. 309) имеет место

$$|m^{*(s)}| = \left(\sum_{j=1}^{m} |m_j^{*(s)}|^2\right)^{1/2} \leq \|L^{(s)}\|_1 \leq 1. \tag{1.31}$$

Следовательно, из последовательности $m^{*(s)}$, $s = 1, 2, ...$, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $m^{*(s_i)} = \left\{m_j^{*(s_i)}, j = 1, ..., m\right\}$, $i = 1, 2, ...$, которую перенумеруем, обозначив $m_j^{*(s_i)}$ через $m_j^{*[i]}$.

Пусть

$$m_j^* = \lim_{i \to \infty} m_j^{*[i]}, \quad j = 1, ..., m.$$

Каждый набор $m^* = \left\{m_j^*, j = 1, ..., m\right\}$, полученный таким путем, обозначим символом

$$m^0(t_*, x_*, \Delta_r) = \left\{m_j^0(t_*, x_*, \Delta_r), j = 1, ..., m\right\}. \tag{1.32}$$

Совокупность всех наборов (1.31), отвечающих данной исходной позиции (t_*, x_*), $t_* \in \left[\vartheta_{l-1}, \vartheta_l\right)$ и разбиению Δ_r, обозначим через $M^0(t_*, x_*, \Delta_r)$.

Доказывается, что множество $M^0(t_*, x_*, \Delta_r)$ является ограниченным, замкнутым, выпуклым и изменяется полунепрерывно сверху по изменению x_* ([1], стр. 309).

2. Эволюция частично-программного максимина. Установим оценку изменения $\rho_l(t_*, x_*, \Delta_r) = e_l(t_*, x_*, \Delta_r)$ с изменением позиции (t_*, x_*), когда эта позиция перемещается в пространстве $[t, x]$, следуя траектории $\left(t, x_k[t]\right)$ системы (1.1), которая отвечает некоторому движению $x_k[\cdot]$ (1.15).

Рассмотрим разбиение Δ_r (1.4) и обозначим через t^* точку $\tau_2^{(r)}$ этого разбиения. Ясно, что $t^* \in \left[\vartheta_{\mu-1}, \vartheta_\mu\right)$, где $\mu = k$, если $t^* < \vartheta_k$, или $\mu = k + 1$, если $t^* = \vartheta_{k+1}$. Выберем из этого этапа пока произвольный вектор x^*. На отрезке $\left[t^*, \theta\right]$ совершим разбиение Δ_r^*, так чтобы моменты времени ϑ_κ $(k = 1, ..., m)$ являлись узлами разбиения, т.е.

$$\tau_{i_\mu}^{r^*} = \vartheta_\mu, ..., \tau_{i_m}^{r^*} = \vartheta_m = \theta. \tag{2.1}$$

Согласно с формулами (1.24) и (1.28) вычислим величину $e_\mu(t^*, x^*, \Delta_r^*)$ по схеме [1] (стр. 315) и оценим разность

$$\Delta e = e_\mu\left(t^*, x^*, \Delta_r^*\right) - e_l\left(t^*, x^*, \Delta_r\right). \tag{2.2}$$

Оказывается, что разность Δe (2.2) удовлетворяет неравенству

$$\Delta e \le \int_{t_*}^{t^*}\Bigg[\sum_{j=1}^{m}\langle m_j^0\left(t^*, x_j\left[t^*\right], \Delta_r^*\right)\bar{\bar{X}}_j\left[\vartheta_j, \tau\right]B_j(\tau)u_j(\tau)\rangle -$$

$$- \min_{\substack{u_j \in P_j \\ j=1,\dots,m}} \sum_{j=1}^{m}\langle m_j^0\left(t^*, x_j\left[t^*\right], \Delta_r^*\right)\bar{\bar{X}}_j\left[\vartheta_j, \tau\right]B_j(\tau)u_j\Bigg] d\tau \qquad (2.3)$$

при $x^* = x_j\left[t^*\right]$ ($x_j[t]$ есть некоторое детерминированное движение системы (1.1), выходящее из позиции $\left(t_*, x_j\left[t_*\right]\right)$, порожденное парой управлений

$$u_j\left[t_*[\cdot]t^*\right) = \left\{u_j[t] \in P_j, \quad t_* \le t \le t^*\right\}$$

и

$$v_j\left[t_*[\cdot]t^*\right) = \left\{v_j[t] \in Q_j, \quad t_* \le t \le t^*\right\}).$$

Здесь $u_j[t]$ и $v_j[t]$ суть какие-то измеримые функции.

По схеме [1] (стр. 320) и по аналогии [5] (стр. 16) доказываются следующие леммы:

Лемма 2.1. Пусть дана произвольная исходная позиция $\left(t_*, x_l[t_*]\right)$, $t_* \in \left[\vartheta_{l-1}, \vartheta_l\right)$ и выбрано разбиение Δ_r для отрезка $\left[t_*, \theta\right]$. Пусть также $t^* = \tau_2^{(r)} \in \left[\vartheta_{\mu-1}, \vartheta_\mu\right)$, где $\mu = l$ или $\mu = l+1$. Тогда для всякого измеримого воздействия $v_j^*\left[t_*[\cdot]t^*\right) = \left\{v_j^*[t] \in Q_j, \quad t_* \le t < t^*\right\}$ найдется измеримое воздействие $u_j^*\left[t_*[\cdot]t^*\right) = \left\{u_j^*[t] \in P_j, \quad t_* \le t < t^*\right\}(j = l, \dots, m)$ такое, что для движения системы (1.1) $x_j\left[t_*[\cdot]t^*\right) = \left\{x_j[t], \quad t_* \le t \le t^*\right\}$, выходящего из данной позиции $\left(t_*, x_l\left[t_*\right]\right)$ при этих управлениях, справедливо неравенство

$$\Delta e = e_\mu\left(t^*, x_\mu[t^*], \Delta_r^*\right) - e_l\left(t^*, x_l[t_*], \Delta_r\right) \le 0. \qquad (2.4)$$

Лемма 2.2. Пусть для отрезка $\left[t_*, \theta\right]$ выбрано разбиение Δ_r (1.4) и для некоторого значения $j = \left\{1, \dots, i_m\right\}$ указана позиция $\left(t_j, x_\alpha\left[t_j\right]\right)$, причем $t_j \in \left[\vartheta_{\alpha-1}, \vartheta_\alpha\right)$ и $t_{j+1} \in \left[\vartheta_{\eta-1}, \vartheta_\eta\right)$, где $\eta \ge \alpha$. Тогда для всякого измеримого воздействия $v_\alpha^*\left[t_j[\cdot]t_{j+1}\right) = \left\{v_\alpha^*[t] \in Q_\alpha, \quad t_j \le t < t_{j+1}\right\}$ найдется измеримое воздействие $u_\alpha^*\left[t_j[\cdot]t_{j+1}\right) = \left\{u_\alpha^*[t] \in P_\alpha, \quad t_j \le t < t_{j+1}\right\}$ такое, что для соответствующего движения $x_\alpha^*\left[t_j[\cdot]t_{j+1}\right] = \left\{x_\alpha[t], \quad t_j \le t < t_{j+1}\right\}$ будет справедливо неравенство

$$\Delta e = e_\eta\left(t_{j+1}, x_\eta\left[t_{j+1}\right], \Delta_r^{**}\right) - e_\alpha\left(t_j, x_\alpha\left[t_j\right], \Delta_r^*\right) \le 0, \qquad (2.5)$$

где Δ_r^* и Δ_r^{**} — разбиения отрезков соответственно $[t_j, \theta]$ и $[t_{j+1}, \theta]$.

3. Частично-программный максимин есть цена позиционной дифференциальной игры. Известно, что в позиционной дифференциальной игре для x-объекта, описываемым дифференциальным уравнением (1.1) при ограничениях (1.2) и показателем качества $\gamma(\cdot)$ (1.3), существуют цена игры $\rho_l^0\left(t_*, x_*\right)$ и седловая точка $\left\{u_l^0(t, x, \varepsilon), v_l^0(t, x, \varepsilon), \ l = 1, \dots, m\right\}$, где $\left(t_*, x_*\right)$ - исходная позиция.

Пусть Δ_r $(r = 1, 2, ...)$ - некоторая последовательность разбиений отрезка $t_* \le t \le \theta$, каждое из которых содержит среди своих узлов моменты ϑ_k при $k = l, ..., m$, причем

$$\delta_r = \sup_i \left(\tau_{i+1}^{(r)} - \tau_i^{(r)}\right), \quad \lim_{i_m \to \infty} \delta_r = 0, \quad \tau_{i_m}^{(r)} = \theta. \tag{3.1}$$

Аналогично [1] (стр. 323) при использовании неравенства (2.5) для цены позиционной игры $\rho_l^0\left(t_*, x_*\right)$ получается оценка сверху через стохастический частично-программный максимин $\rho_l\left(t_*, x_*, \Delta_r\right)$ в виде предельного соотношения

$$\lim_{i_m \to \infty} \rho_l\left(t_*, x_*, \Delta_r\right) \ge \rho_l^0\left(t_*, x_*\right), \tag{3.2}$$

какова бы ни была последовательность разбиений Δ_r удовлетворяющих условиям (3.1).

Для любого $\zeta > 0$ по определению частично-программного максимина $\rho_l\left(t_*, x_*, \Delta_r\right)$ найдется стохастическое частично-программное управление

$$v_k^{(\zeta)}(\cdot) = \left\{v_k^{(\zeta)}\left(t, \omega_{l_k}\right), \ t_* \le t < \vartheta_\kappa, \omega_{l_k} \in \Omega_{l_k}\right\} \quad (k = l, \dots, m), \tag{3.3}$$

которое гарантирует неравенство

$$\left(\sum_{j=1}^{l-1} |x_j[\vartheta_j]|^2 + \sum_{j=l}^{m} \|w_j(\vartheta_j; \cdot)\|^2\right)^{1/2} \ge$$

$$\le \rho_l\left(t_*, x_*, \Delta_r\right) - \zeta \tag{3.4}$$

для случайного движения w - модели

$$w_k[\cdot] = \left\{w_k\left(t, w_{l_k}\right) = w_k\left[t, t_*, x_*, v_k^{(\zeta)}(\cdot), u_k^{(\zeta)}(\cdot)\right],\right.$$

$$\left. t_* \le t \le \vartheta_k, w_{l_k} \in \Omega_{l_k}\right\}, \tag{3.5}$$

описываемой дифференциальным уравнением

$$\dot{w}_k = A_k(t) w_k + B_k(t) u_k\left(t, \omega_{l_k}\right) + C_k(t) v_k\left(t, \omega_{l_k}\right),$$

каково бы ни было стохастическое частично-программное управление

$$u_k(\cdot) = \left\{u_k\left(t, \omega_{l_k}\right), \ t_* \le t < \vartheta_\kappa, \omega_{l_k} \in \Omega_{l_k}\right\}. \tag{3.6}$$

На основе оптимальной кусочно-позиционной стратегии $u_k^0(t, x_k, \varepsilon)$ по схеме, описанной в [1] (стр. 325), построим управление $u_k(\cdot)$ (3.6). Тогда каждая реализация $w_k\left(t, \omega_{l_k}\right)$ движения w - модели будет имитировать некоторое движение x - объекта $x_k[t]$ $\left(t_* \le t \le \vartheta_\kappa\right)$, $k = l, ..., m$, для которого по определению цены игры $\rho_l^0(t_*, x_*)$ выполняется неравенство

$$\left(\sum_{j=1}^{l-1}\left|x_j\left[\vartheta_j\right]\right|^2+\sum_{j=l}^{m}\left|x_j\left[\vartheta_j\right]\right|^2\right)^{1/2}\le\rho^0\left(t_*,x_*\right)+\zeta . \qquad (3.7)$$

Из неравенств (3.4), (3.7) и произвольности числа ζ следует предельное соотношение

$$\lim_{i_m\to\infty}\rho_l\left(t_*,x_*,\Delta_r\right)\le\rho_l^0\left(t_*,x_*\right), \qquad (3.8)$$

каковы бы ни были исходная позиция $\left(t_*,x_*\right)$ и разбиение Δ_r, удовлетворяющее условию (3.1).

Из неравенств (3.2) и (3.8) следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.1. Каковы бы ни были исходная позиция $\left(t_*,x_*\right)$ $(\vartheta_{\kappa-1}\le t_*\le\vartheta_\kappa,\ k=1,\ldots,m)$ и последовательность разбиений Δ_r $(r=1,2,\ldots)$ отрезка $\left[t_*,\theta\right]$, удовлетворяющая условию (3.1), существует предел

$$\lim_{i_m\to\infty}\rho_k\left(t_*,x_*,\Delta_r\right)=\rho_k\left(t_*,x_*\right)$$

и справедливо равенство

$$\rho_k\left(t_*,x_*\right)=\rho_k^0\left(t_*,x_*\right).$$

Кафедра теоретической механики *Поступила 7.07.1993*

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
2. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1980.
3. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
4. Габриелян М.С. Дифференциальные игры при *m* целевых множествах. Автореферат дис. на соискание уч. степени доктора физ.-мат. наук. Ер., ЕГУ, 1986.
5. Габриелян М.С., Степанян В.К. О стохастическом программном синтезе.- Ученые записки ЕГУ, Ер., 1990, № 1 (172).

Մ.Ս. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, Վ.Ռ. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

ՍՏՈԽԱՍՏԻԿ ԾՐԱԳՐԱՅԻՆ ՍԻՆԹԵԶԸ ԷՏԱՊ ԱՌ ԷՏԱՊ ՓՈՓՈԽՎՈՂ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Մասնակի-ծրագրային ստրատեգիաների դասում դիտարկվում է դիֆերենցիալ խաղ, երբ խաղի արժեք է հանդիսանում ժամանակի տրված պահերին հետագծից կախված ֆունկցիոնալը: Օպտիմալ ստրատեգիաները կառուցվում են ստոխաստիկ ծրագրային սինթեզի եղանակով: Ապացուցվում է, որ ստոխաստիկ մասնակի-ծրագրային մաքսիմինը հանդիսանում է խաղի արժեք համապատասխան էտապ առ էտապ փոփոխվող դիրքային դիֆերենցիալ խաղի համար: