ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Բնական գիտություններ 2, 1989 Естественные науки

Математика

УДК 517.986

М.И.ЗАСЛАВСКАЯ

О НЕКОТОРЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ РАВНОМЕРНЫХ АЛГЕБР НА ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ И ПОЛИТОРЕ

Исследуются представления равномерных алгебр на политоре с фиксированной действительной частью, равной действительной части поликруговой алгебры, и равномерных алгебр на единичной окружности с определенными ограничениями на их действительные части.

В настоящей статье рассматриваются представления комплексных равномерных [1] алгебр B,заданных на политоре T^n при $n\geqslant 1$, удовлетворяющих тому условию,что множество ReB действительных частей функций из B совпадает с множеством ReA действительных частей функций поликруговой алгебры [2] на T^n. Согласно результату О'Коннела [3] всякая комплексная равномерная алгебра B на единичной окружности T такая, что ReB = ReA, может быть представлена как гомеоморфный образ $A(\Phi)$ диск-алгебры A при некотором гомеоморфизме $\Phi: T\to T$. Ниже устанавливаются два аналогичных представления комплексных равномерных алгебр B на политоре T^n, удовлетворяющих условию $ReB=ReA$ и некоторым дополнительным условиям (теоремы 1 и 2), причем в одном из рассматриваемых случаев (теорема 2) оказывается возможным получить более сильное заключение, чем в упомянутой выше теореме О'Коннела.

Основным свойством диск-алгебры A на T является ее максимальность, устанавливаемая теоремой Вермера [4]. Для поликруговой алгебры $A(T^n)$ при $n>1$ непосредственный аналог теоремы Вермера не имеет места, однако согласно теореме Е.А.Горина и В.М. Золотаревского поликруговая алгебра является максимальной среди алгебр, инвариантных относительно соответствующим образом введенной полугруппы R эндоморфизмов политора T^n.

Будем говорить, что равномерная алгебра $B(T^n)R$— инвариантна [3], если вместе с любой функцией $f(z_1,z_2,\ldots z_n)$, где $f\in B(T^n)$, в $B(T^n)$ лежит также и любая функция вида

$$f(z_1^{k_{11}},z_2^{k_{12}}\cdot\ldots\cdot z_n^{k_{1n}},\ldots,z_1^{k_{n1}}\cdot z_2^{k_{n2}}\cdot\ldots\cdot z_n^{k_{nn}})$$

для любых

$$k_{ij}\geqslant 0;\quad i,j=1,2,\ldots,n.$$

Пусть $z_1^0,\ldots,z_{j-1}^0,z_{j+1}^0,\ldots z_n^0\in T$. j—тым сечением равномерной алгебры $B(T^n)$ при фиксированных $z_i^0, i=1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n$ будем называть множество $B^j_{z_1^0,\ldots,z_{j-1}^0,z_{j+1}^0,\ldots,z_n^0}$ функций $\varphi(z)\in C(T)$ таких, что существует функция $f\in B(T^n)$, удовлетворяющая условию

$$f(z_1^0,\ldots,z_{j-1}^0,z_{j+1}^0,\ldots,z_n^0)\equiv\varphi(z).$$

Ясно, что $B^j(z_1^0,\ldots,z_{j-1}^0,z_{j+1}^0,\ldots z_n^0)$, вообще говоря, неравномерная алгебра на T^n, так как сечение не обязано быть замкнутым.

Лемма. Пусть B — равномерная алгебра на Т, удовлетворяющая условию $ReB=Re(T^2)$, и пусть каждое сечение алгебры B по z_1 или по z_2 при $|z_1|=1,|z_2|=1$ содержится в $A(T)$. Тогда $B\subset A(T^2)$.

Доказательство проводится посредством продолжения заданной функции $G\in B$ в бицилиндр при помощи интеграла Пуассона [2]; устанавливается аналитичность продолжения G по z_1 и по z_2, откуда следует аналитичность G в соответствии с теоремой Хартогса.

Теорема 1. Пусть B —равномерная алгебра на T^2 такая, что $ReB=ReA(T^2)$, и все ее сечения замкнуты, а именно $B^1_{z_2^0}=B^1_{z_2^0}$ и $B^2_{z_1^0}=B^2_{z_1^0}$ при $z_1^0,z_2^0\in T$. Тогда существует гомеоморфизм $F:T^2\to T^2$ такой, что $B=[AoF](T^2)$. Более того, утверждается, что указанный гомеоморфизм F можно выбрать таким образом, чтобы он был представим в виде $F(z_1,z_2)=(\Phi(z_1),\Psi(z_2))$, где Φ и Ψ —два гомеоморфизма, отображающие T на T.

Доказательство. Будем рассматривать параметризацию точек битора в виде пар (φ,ψ), где $\varphi\in[-\pi,\pi]$, $\psi\in[-\pi,\pi]$. Рассмотрим произвольные сечения B_{z^0} алгебры B при $|z^0|=1$. По условию все они—равномерные алгебры. Причем, так как сечения $A(T^2)$ суть $A(T)$, то $ReB_{z^0}=ReA(T)$ при $|z^0|=1$. Зафиксируем какие-либо $z_1=e^{i\varphi},z_2=e^{i\psi}$. В соответствии с теоремой О'Коннела [3] существует гомеоморфизм $\Phi^1_\psi:T\to T$ такой, что

$$B^1_{z_2^0}=[Ao\Phi^1_\psi](T)\quad\text{при}\quad\psi\in[-\pi,\pi],z_2^0\in T,$$

и существует гомеоморфизм $\Phi^2_\varphi:T\to T$ такой, что

$$B^2_{z_1^0}=[Ao\Phi^2_\psi](T)\quad\text{при}\quad\varphi\in[-\pi,\pi],z_1^0\in T.$$

Поэтому множества $\{z_1^0\}\times T$ и $T\times\{z_2^0\}$ при $z_1^0,z_2^0\in T$ являются множествами антисимметрии относительно алгебры $B(T^2)$.

Ясно, что функции $cos\varphi$ и $cos\psi$ принадлежат $ReB(T^2)$. Отсюда следует, что существуют непрерывные 2π-периодические функции $v_1(\varphi,\psi)$ и $v_2(\varphi,\psi)$ такие, что $\Psi_1(\varphi,\psi)=cos\varphi+iv_1(\varphi,\psi)\in B;\Psi_2(\varphi,\psi)=$ $=cos\psi+iv_2(\varphi,\psi)\in B$. Зафиксируем некоторое $z_j^0=e^{i\varphi_0}\in T$. Тогда ясно, что сечение $B^2_{z_1^0}$ содержит функцию вида $cos\varphi_0+iv_1(\varphi_0,\psi)$. Но тогда вещественная функция $v_1(\varphi_0,\psi)$ принадлежит B. Вследствие антисимметричности сечения получаем, что $v_1(\varphi_0,\psi)=C_{\varphi_0}=const$ при $\varphi_0\in[-\pi,\pi]$. Итак, $v_1(\varphi,\psi)=v_1(\varphi)$ и аналогично $v_2(\varphi,\psi)=v_2(\psi)$, где v_1 и v_2— непрерывные функции из $C(T)$. Таким образом $\Psi_1(\varphi)=cos\varphi+iv_1(\varphi)\in B;\Psi_2(\psi)=cos\psi+iv_2(\psi)\in B$. Совершенно аналогичным образом строятся функции Ψ_1^* и Ψ_2^* такие, что $\Psi_1^*(\varphi)=u_1(\varphi)+isin\varphi\in B$; $\Psi_2(\psi)=u_2(\psi)+isin\psi\in B$.

Рассмотрим произвольное сечение $B^j_{z_0}$ алгебры В при j = 1 или j = 2; оно является равномерной алгеброй на окружности, действительная часть которой совпадает с действительной частью диск-алгебры. Исходя из того, что функции от одной комплексной переменной Ψ_j и Ψ_j^* принадлежат $B^j_{z_0}$, $j=1,2$, мы можем заключить таким же образом, как в [3], что одна из этих функций — либо Ψ_j, либо Ψ_j^*— обязана преобразовывать окружность T в кривую $\Psi_j(T)$, гомеоморфную окружности. Не теряя общности, будем считать, что таковыми являются кривые $\Psi_j(T), j=1,2$. Доказательство для случая с функциями $\Psi_j^*, j=1,2$ проводится совершенно аналогично.

Обозначим через W_1 и W_2 соответственно множества значений следующих функций:

$$z=\Psi_1(\varphi)=\cos\varphi+iv_1(\varphi) \quad \text{при} -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi,$$

$$z=\Psi_2(\psi)=\cos\psi+iv_2(\psi) \quad \text{при} -\pi\leqslant\psi\leqslant\pi.$$

Положим $W=W_1\times W_2\subset C^2$. Ясно, что $IntW=IntW_1\times IntW_2$. Построим отображение $\tau=(\tau_1,\tau_2)$ множества W на множество $T\times T$ следующим образом. Сначала, пользуясь теоремой Каратеодори, построим такое отображение τ_1^* множества $W_1\cup IntW_1$ на множество $T\cup IntT$, которое непрерывно на $W_1\cup IntW_1$, аналитично на $IntW_1$ и таково, что $\tau_1^*(W_1)=T$. Обозначим через τ_1 отображение τ_1^*, рассматриваемое лишь на W_1. Продолжим τ_1 на W, полагая его постоянной по второй переменной. Тогд τ_1 можно продолжить аналитически в $IntW$. Действительно, искомым продолжением будет функция τ_1^{**}, продолженная на W как постоянная по второй переменной. Используя теорему Хартогса [7], получаем, что τ_1 аналитична в $IntW$.

Совершенно аналогично строится отображение $\tau_2: W\to T\times T=T^2$, голоморфно продолжаемое в $IntW$. Рассмотрим отображение $F=(\psi,\Psi)=(\tau_1 o\Psi_1,\tau_2 o\Psi_2)$. Ясно, что это есть гомеоморфизм тора на себя. Докажем, что $\Phi\in B$, $\Psi\in B$. Действительно, напомним, что функции Ψ_i и $\tau_i, i=1,2$ зависят только от одной комплексной переменной. Так как $\tau_i|_{\Psi_i(T)}$ при $i=1,2$ можно аналитически продолжить в $Int\Psi_i(T)$, то из теоремы С.Н.Мергеляна [6], следует, что τ_i равномерно на $\Psi_i(T)$ приближается полиномами при $i=1,2$. Но функция $\Psi_i(z_i)\in B$. Поэтому мы можем утверждать, что $\tau_i o\Psi_i\in B$, $i=1,2$. Таким образом Φ, $\Psi\in B$.

Так как любая функция из $A(\Phi,\Psi)$ есть равномерный предел полиномов от Φ и от Ψ, то $A(\Phi,\Psi)\subset B$. Иначе говоря, $A(T^2)\subset[BoF^{-1}](T^2)$, где $F^{-1}=(\Phi^{-1},\Psi^{-1})$. Теперь осталось применить лемму. Прежде всего, заметим, что для любых $z_1^0,z_2^0\in T$ имеем $B^1_{z_2^0}=[Ao\Phi](T)$ и $B^2_{z_1^0}=[Ao\Psi](T)$. Действительно, ввиду того, что $\Phi(z_1)\in B$, мы получаем $\Phi(z_1)\subset B^1_{z_2^0}$ при $z_2^0\in T$ и аналогично $\Psi(z_2)\in B^2_{z_1^0}$ при $z_1^0\in T$. Отсюда мы можем утверждать, что $[Ao\Phi](T)\subset B^1_{z_2^0}$ при $z_2^0\in T$ и $[Ao\Psi](T)\subset B^2_{z_1^0}$, т.е. $A(T)\subset[B^1_{z_2^0}o\Psi^{-1}](T)$ и $A(T)\subset[B^2_{z_1^0}o\Psi](T)$. Из теоремы Вермера о максимальности и из того условия, что $ReB^i_{z_j^0}=ReA(T)$, $i=1,2$, $j=2,1$, мы заключаем, что $B^1_{z_2^0}=[Ao\Phi](T)$ и $B^2_{z_1^0}=[Ao\Psi](T)$. Поэтому, рассматривая алгебру $D=[BoF^{-1}](T^2)$, получим, что все ее сечения совпадают с $A(T)$. Применяя лемму к алгебре D, получим, что $D\subset A(T^2)$, т.е. $[BoF^{-1}](T^2)\subset A(T^2)$. Но, с другой стороны, $A(T^2)\subset[BoF^{-1}](T^2)$, как мы убедились ранее. Поэтому $A(T^2)=[BoF^{-1}](T^2)$, т.е. $[AoF](T^2)=B$. Теорема доказана.

Замечание. Пусть $B(T^n)$ — равномерная алгебра на T^n такая, что $ReB=ReA(T^n)$. Тогда каждое ее сечение либо антисимметрично (а именно, плотно в алгебре вида $[Ao\Phi_{\alpha_i}](T)$, где Φ_{α_i} — гомеоморфизм T на T, зависящий от индекса сечения), либо плотно в $C(T)$.

Действительно, это утверждение следует из теоремы 1 работы Новингера [8]. Каждое сечение $M(T)$ алгебры $B(T^n)$ — это (возможно, не замкнутое) множество функций на T, являющееся алгеброй с действительной частью диск-алгебры. Тогда замыкание этого множества будет равномерной алгеброй, удовлетворяющей условию $Re\overline{M(T)} \supset ReA(T)$. Отсюда следует, что либо существует гомеоморфизм $\Phi: T \to T$ такой, что $\overline{M(T)} = [A o \Phi](T)$, либо $\overline{M(T)} = C(T)$.

Отметим еще, что существуют неоднородные в вышеуказанном смысле алгебры на биторе, для сечений которых могут иметь в указанном смысле различные случаи. Примером такой алгебры может служить алгебра на биторе, порожденная функциями $z_1 \cdot z_2, \overline{z_1 \cdot z_2}(z_1 - a_1)(z_2 - a_2)$, где $|a_1| = |a_2| = 1$. Ясно, что $\overline{B^2_{a_1}} = \overline{B^1_{a_2}} = A(T)$ и $\overline{B^i_z} = C(T)$ при $|z| = 1$ и $z \neq a_1$ при $i = 2, z \neq a_2$ при $i = 1$.

Перейдем теперь к теореме, касающейся R-инвариантных равномерных алгебр на политоре.

Теорема 2. Пусть B — равномерная R-инвариантная алгебра на T^n. Пусть $ReB = ReA(T^n)$. Тогда либо $B = A$, либо $B = \bar{A}$.

Доказательство. Доказательство будем проводить для случая $n = 2$; для произвольного n доказательство проводится аналогичным образом.

Так как $ReB = ReA(T^2)$, то для любой функции $f = u + iv \in B$ разложение Фурье имеет ненулевые коэффициенты только при индексах $(k,l) \in Z_+ \times Z_+ \cup Z_- \times Z_-$. Вследствие R- инвариантности алгебры B для любой функции $f(z_1, z_2) \in B$ имеем $f(z_1, 1) \in B$, а тогда заключаем, что множество $B^1_{z_2=1}$, состоящее из функций $\varphi(z)$, представимых в виде $f(z,1) = \varphi(z)$, где $f \in B$, является замкнутой банаховой алгеброй, кроме того, $ReB^1_{z_2=1} = ReA(T)$. Поэтому из теоремы О'Коннела [2] заключаем, что существует гомеоморфизм $\Phi : T \to T$ такой, что $B^1_{z_2=1} = [A o \Phi](T)$. Кроме того, $[A o \Phi](T) \subset B$. Вследствие R-инвариантности алгебры B сечения $B^2_{z_1=1}$ и $B^1_{z_2=1}$ равны, поэтому $B^2_{z_1=1} = [A o \Phi](T) \subset B$. Имеем, чт $\Phi(z_1)$ и $\Phi(z_2)$ лежат в B. Ясно, что в каждом члене разложения Фурье функции Φ все степени переменных либо положительные, либо отрицательные. Это следует из того, что $\Phi(z_1) \cdot \Phi(z_2) \in B$; предположив, чт $\Phi(z_1) = a_0 + a_1 z_1 + \ldots + a_k z_1^k + \ldots + a_{-l} z_1^{-l} + \ldots$, где $k, l > 0$ и $a_k \neq 0, a_{-l} \neq 0$, мы пришли бы к противоречию с утверждением, указанным в начале доказательства.

Пусть Φ имеет в разложении только положительные степени. Тогд $\Phi \in A(T)$. Но тогда и $[A o \Phi](T) \subset A(T)$, т.е. $A \subset A o \Phi^{-1}$. Используя теорему Вермера о максимальности, получаем $A o \Phi = A$.

Из рассуждений, проведенных выше, заключаем, что A по переменной z_1 содержится в B и A по переменной z_2 также содержится в B. Следовательно, $A(T^2) \subset B$. Но алгебра B R- инвариантна. Воспользовавшись теоремой Е.А. Горина и В.М. Золотаревского [5], заключаем, что либо $A(T^2) = B$, либо $B = C(T^2)$. Последнее равенство невозможно, потому $B = A(T^2)$, что и требовалось.

В случае, когда все степени разложения Фурье функции Φ отрицательны, рассуждения проводятся аналогичным образом с использованием того, что $\overline{A o \Phi} = A o \Phi$, и получаем, что $B = \bar{A}(T^2)$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть $B - R$ — инвариантная равномерная алгебра на T^n и пусть $log|B^{-1}| = log|A^{-1}|$, где A — поликруговая алгебра на T^n. Тогда если $n > 1$, то либо $B = A$, либо $B = \bar{A}$; если же $n = 1$, то $B = A(\psi)$, где ψ — некоторый гомеоморфизм T на себя.

Доказательство непосредственно следует из леммы, установленной в [9] (см. [9], стр.375) и из того факта, что $log|A^{-1}|=ReA$. В самом деле, из указанной леммы следует, что всякое линейное подпространство, содержащееся в $log|B^{-1}|$, является одновременно подпространством $Re(B)$. Поскольку ReA — подпространство $log|B^{-1}|$, то получаем, что $ReB=ReA$, а тогда из теоремы 2 и из результата О'Коннела [3] вытекает требуемое утверждение.

Автор приносит глубокую благодарность М.И.Караханяну за постановку задачи и ценные советы, С.А.Григоряну за постоянное внимание к работе, Б.Т.Батикяну за ряд существенных замечаний.

Кафедра дифференциальных уравнений *Поступила 5.06.1988.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гамелин Т.** Равномерные алгебры. М.: Мир, 1973.
2. **Рудин У.** Теория функций в поликруге. М., 1974.
3. O'Connel J.M.F. Real parts of uniform algebras. — Pacific J.Math., 1973, №16, pp.235—247.
4. **Гофман К.** Банаховы пространства аналитических функций, М.: ИИЛ, 1974.
5. **Горин Е.А., Золотаревский В.М.** Максимальные инвариантные подалгебры в алгебрах с инволюцией. — Мат.сборн. 1971, т.85(127), №3(7), с.373—386.
6. **Мергелян С.Н.** Равномерное приближение функций комплексного переменного. — Успехи мат.наук, 1952, т.7, №2, с.31—122.
7. **Шабат П.В.** Введение в комплексный анализ, М.: Наука, 1963.
8. Nowinger W.P. Real parts of Uniform Algebras on the Circle. — Pacific J.Math., 1975, №57, №1, p.p.259—264.
9. **Батикян Б.Т.** О логарифмах модулей обратимых элементов банаховой алгебры. — Мат.заметки, 1975, т.23, №3, с.373—377.

Ամփոփում

Հետազոտվում են հավասարաչափ հանրահաշիվները բազմաչափանի տորի վրա, որոնց իրական մասը համընկնում է բազմաշրջանային հանրահաշվի իրական մասի հետ: Հետազոտվում են նաև հավասարաչափ հանրահաշիվների ներկայացումները միավոր շրջանագծի վրա, որոնց իրական մասերը բավարարում են որոշ պայմանների:

SUMMARY

Some representations are investigated for uniform algebras defined on the polydisc with their real part coinciding with the real part of the polydisc algebra. Some representations are given for the uniform algebras defined on the unit circle and having the real part satisfying some special conditions.