ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Բնական գիտություններ 2, 1987 Естественные науки

Математика

УДК 519.216.3

Н. Х. МЕСРОПЯН

О КРАТНОСТИ ОБНОВЛЯЮЩИХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ НЕПОЛНОГО РАНГА

Исследуется размерность обновляющего процесса, порожденного течением процесса $z(t)$ на конечном промежутке $0\leqslant t\leqslant T$. Приводится необходимое и достаточное условие, налагаемое на спектральную плотность процесса, при котором размерность обновляющего процесса равна 1.

Пусть $\xi(t)=\{\xi_i(t)\}_{i=\overline{1,m}}$, $t\in T=[a, b]$—многомерный случайный процесс с компонентами $\xi_i(t)$, $i=\overline{1, m}$, которые имеют нулевые средние $E\xi_i(t)=0$, $\overline{i=1, m}$, и конечные вторые моменты $E|\xi_i(t)|^2<\infty$. Обозначим через $H_a^t(\xi)$ замкнутую в среднем квадратичном линейную оболочку всех значений $\xi_i(s)$, $a\leqslant s\leqslant t$, а через $H_T=H_T(\xi)=\overline{\bigcup\limits_{t\in[a, b]}H_a^t(\xi)}$. Ясно, что $H_a^s(\xi)\subset H_a^t(\xi)$, $a\leqslant s\leqslant t\leqslant b$.

Чтобы описать эволюцию подпространств $H_a^t(\xi)$, $a\leqslant t\leqslant b$, для произвольного случайного процесса, найдем некоррелированные между собой процессы $\hat{\varepsilon}_j(t)$, $j=\overline{1, M}$, $a\leqslant t\leqslant b$, с некоррелированными приращениями такие,что отвечающие многомерному процессу $\hat{\varepsilon}(t)=\{\hat{\varepsilon}_j(t)\}_{j=\overline{1,M}}$ $a\leqslant t\leqslant b$, подпространства $H_a^t(\hat{\varepsilon})$ совпадают с подпространствами $H_a^t(\xi)$:

$$H_a^t(\hat{\varepsilon})=H_a^t(\xi), \quad a\leqslant t\leqslant b, \tag{1}$$

а последовательность типов структурных мер $\mu_j=d\varphi_j$, где $\varphi_j(t)=$ $=E|\hat{\varepsilon}_j(t)|^2$, $j=\overline{1, M}$, $a\leqslant t\leqslant b$, монотонно не возрастают $\mu_j\succ\mu_{j+1}$ (т. е. мера μ_{j+1} абсолютно непрерывна относительно меры μ_j).

Тогда пространство $H_a^t(\xi)$ можно было бы представить в виде

$$H_a^t(\xi)=\bigoplus_{j=1}^{M}H_a^t(\hat{\varepsilon}_j), \quad a\leqslant t\leqslant b.$$

Каждое из ортогональных друг другу семейств $H_a^t(\hat{\varepsilon}_j)$ $a\leqslant t\leqslant b$, описывается с помощью соответствующей структурной функции $\varphi_j(t)=$ $=E|\hat{\varepsilon}_j(t)|^2$, $a\leqslant t\leqslant b$, $j=\overline{1, M}$. Случайный процесс $\hat{\varepsilon}(t)=\{\hat{\varepsilon}_j(t)\}_{j=\overline{1,M}}$ с ортогональными компонентами $\hat{\varepsilon}_j(t)$, $a<t<b$ ($\hat{\varepsilon}_j(s) \perp \hat{\varepsilon}_k(t)$ для всех s, t при $j \neq k$), каждая из которых представляет собой процесс с некоррелированными приращениями, удовлетворяющий условию (1), называется обновляющим процессом для случайного процесса $\xi(t) = \{\xi_i(t)\}_{i=\overline{1,m}}$, $a<t<b$. Число M называется кратностью цепочки подпространств $H_a^t(\xi)$. Мы будем говорить, что M—кратность процесса ξ на отрезке $[a, b]$ или что M есть кратность обновляющего процесса, порожденного ξ на отрезке $[a, b]$.

Пусть $z(t) = (x(t), y(t))$—стационарный процесс ранга I. Кратность обновляющего процесса, порожденного течением процесса $z(t)$ по промежутку $-\infty<t<+\infty$ равна единице [1]. Встает вопрос о том, какова кратность обновляющего процесса, порожденного течением процесса $z(t)$ на конечном промежутке $0<t<T$, (или $t>t_0$). В частности нас будут интересовать условия, налагаемые на спектральную плотность процесса, при которых кратность обновляющего процесса равна единице.

Теорема. Для того чтобы у процесса $(x(t), y(t))$, $t>0$ ранга I существовал обновляющий процесс кратности I, необходимо и достаточно, чтобы коэффициент когерентности $\frac{f_{xy}(\lambda)}{f_x(\lambda)}$ представлялся в виде отношения двух целых функций минимального типа.

Доказательство. Необходимость. Пусть $z(t) = (x(t), y(t))$, $t>0$—стационарный процесс ранга I. Тогда [2]

$$y(t) \in H_{-\infty}^{\infty}(x). \tag{2}$$

Пусть τ—изометрия, определенная соотношением $x(t) \xrightarrow{\tau} e^{i\lambda t}$. Изометрия τ действует из пространства $H_{-\infty}^{\infty}(x)$ в $L^2(f)$, где $f = f(\lambda)$—спектральная плотность (с. п.) процесса $x(t)$.

Поскольку, как это следует из (2), $H_{-\infty}^{\infty}(x) = H_{-\infty}^{\infty}(z)$, изометрия τ действует из пространства $H_{-\infty}^{\infty}(z)$ в пространство $L^2(f)$. Положим $h = h(\lambda) = \tau y(0)$ так, что

$$\tau y(t) = e^{it\lambda} h. \tag{3}$$

В таком случае

$$\tau H_0^t(z) = \tau H_0^{t(x)}(x) + \tau H_0^t(y). \tag{4}$$

По теореме М. Г. Крейна [3],

$$\tau H_0^t(x) = e^{i\frac{t}{2}\lambda} H_{\frac{t}{2}}(f),$$

где $H_{\frac{t}{2}}(f)$—пространство целых функций степени не выше $\frac{t}{2}$, лежащих в $L^2(f)$. По той же теореме и (3), имеем

$$\tau H_0^t(y) = h e^{i\frac{t}{2}\lambda} H_{\frac{t}{2}}(f|h|^2).$$

Пусть $\hat{\varepsilon}(t)$—обновляющий процесс для семейства подпространств

$H_0^t(z)$ [1]. Положим $\varepsilon_t(\lambda)=\tau\hat{\varepsilon}(t)$. Тогда $\varepsilon_t(\lambda)=\varphi_t(\lambda)+\psi_t(\lambda)\cdot h(\lambda)$, где $\varphi_t(\lambda)\in H_{\frac{t}{2}}(f)$, $\psi_t(\lambda)\in H_{\frac{t}{2}}(f|h^2|)$, здесь $H_{\frac{t}{2}}(f)$ —подпространство пространства $L^2(f)$, порожденное целыми функциями степени не выше $\frac{t}{2}$. Так как $\hat{\varepsilon}(t)$—обновляющий процесс, то элемент $\varphi_t(\lambda)$ допускает при некоторой функции $b(t)\in L^2(d\mu)$ представление $\varphi_t(\lambda)=\int_0^t b(s)\,d\varepsilon_s(\lambda)$, где $d\mu$—структурная мера, порожденная процессом $\hat{\varepsilon}(t)$.

Таким образом, поскольку $\varepsilon_t(\lambda)=\varphi_t(\lambda)+\psi_t(\lambda)\cdot h(\lambda)$, то $\varphi_t(\lambda)=$ $=\int_0^t b(t)\,d\varepsilon_t(\lambda)=\int_0^t b(s)\,d\varphi_s(\lambda)+h(\lambda)\int_0^t b(s)\,d\psi_s(\lambda)$, откуда

$$h(\lambda)=\frac{\varphi_t(\lambda)-\int_0^t b(s)\,d\varphi_s(\lambda)}{\int_0^t b(s)\,d\psi_s(\lambda)}=\frac{r_t(\lambda)}{\gamma_t(\lambda)},$$

где $r_t(\lambda)\in H_{\frac{t}{2}}(f)$, $\gamma_t(\lambda)\in H_{\frac{t}{2}}(f|h|^2)$ при любом t. Значит, $h(\lambda)=\frac{r_t(\lambda)}{\gamma_t(\lambda)}$, причем $r_t(\lambda)$ и $\gamma_t(\lambda)$—целые функции минимального типа.

Достаточность. Пусть $\frac{f_{xy}(\lambda)}{f_x(\lambda)}$ представляется в виде отношения двух целых функций $r(\lambda)$ и $\gamma(\lambda)$ минимального типа, т. е.

$$\frac{f_{xy}(\lambda)}{f_x(\lambda)}=\frac{r(\lambda)}{\gamma(\lambda)}.$$

Рассмотрим пространство $H=\overline{L}_t\{d(\lambda):d(\lambda)=\varphi(\lambda)\,\gamma+\psi(\lambda)\cdot r\}$, где $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$—целые функции степени не выше $\frac{t}{2}$, а $r(\lambda)$ и $\gamma(\lambda)$—целые минимального типа без общих нулей—пространство целых функций степени не выше $\frac{t}{2}$, вложенное в $L^2\left(\frac{f}{|\gamma|^2}\right)$. Обозначим $g=\frac{f}{|\gamma|^2}$, $H=$ $=H_{\frac{t}{2}}(g)$. Если $H_{\frac{t}{2}}(g)\neq L^2(g)$, то существует [4] целая функция $E(z)$ степени не выше $\frac{t}{2}$ такая, что

$$H_{\frac{t}{2}}(g)=H_{\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{|E|^2}\right)=E(z)D_{\pi\varepsilon},$$

где $\pi(z)$—произведение Бляшке, построенное по нулям $z_j=a_j+ib_j$, $b_j<0$ функции $E(z)$, $\varepsilon=\varepsilon_s=e^{i\lambda s}$, $D_\pi=H^2\ominus\pi H^2$.

Обозначим через $\tilde{H}=H_{\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{|E|^2}\right)$ все целые функции степени не выше $\frac{t}{2}$, принадлежащие $L^2\left(\frac{1}{|E|^2}\right)$.

Ясно, что

$$\tilde{H} \supset \bar{L}\left\{\frac{E}{z-z_j},\ j=1,\ 2,\ \dots\right\},$$

$$\tilde{H} \supset \bar{L}\left\{E\cdot\frac{1-e^{i\lambda s}}{i\lambda},\ \ s;\ \ s+\text{степень}\ \ E<\frac{t}{2}\right\}.$$

Определим оператор V следующим образом:

$$V\frac{E(z)}{z-z_j}=\frac{1}{z-z_j},\qquad V\frac{E(s)(1-e^{i\lambda s})}{i\lambda}=\frac{1-e^{i\lambda s}}{i\lambda}. \tag{5}$$

Тогда $V\tilde{H}\subset L^2$, $V\bar{L}\left\{E\frac{1}{z-z_j},\ j=1,\ 2,\ \dots\right\}=\bar{Z}\left\{\frac{1}{z-z_j},\ \ j=1,\ 2,\ \dots\right\}$.

Так как по теореме Коши $\left(\frac{1}{z-z_j},\ \ \varphi(z)\right)=\varphi(\bar{z}_j)$, то $\left(\frac{1}{z-z_j},\varphi(z)\right)=$ $=0$, когда $\varphi\in\pi H^2$. Тогда $\bar{L}\left\{\frac{1}{z-z_j},\ j=1,\ 2,\ \dots\right\}\subset D_\pi$.

С другой стороны,

$$\bar{L}\left\{\frac{1}{z-z_j},\ j=1,\ 2,\ \dots\right\}^{\perp}=\frac{z-\bar{z}_j}{z-z_j}H^2_+,$$

и с учетом кратности z_j, $j=1,2,\dots$ будем иметь при $z_i\neq z_j$, $i\neq j$

$$\overline{\left(\bigcup_j L\left\{\frac{1}{z-z_j},\ j=1,2,\ \dots\right\}\right)}^{\perp}=\bigcap_j\left(\frac{z-\bar{z}_j}{z-z_j}H^2_+\right)\supset\pi H^2_+, \tag{6}$$

откуда $\quad D_\pi\subset\bar{L}\left\{\frac{1}{z-z_j},\ \ j=1,\ 2,\ \dots\right\}$.

Из (5) и (6) следует, что

$$V\bar{L}\left\{E\frac{1}{z-z_j},\ j=1,\ 2,\ \dots\right\}=\bar{L}\left\{\frac{1}{z-z_j},\ j=1,\ 2,\ \dots\right\}=D_\pi.$$

Аналогично можно получить

$$V\bar{L}\left\{E\frac{1-e^{i\lambda s}}{i\lambda},\ \ s;\ s+\text{ст}\cdot E<\frac{t}{2}\right\}=\bar{L}\left\{\frac{1-e^{i\lambda s}}{i\lambda},\ s;\ \ s+\text{ст.}\ E\leq\frac{t}{2}\right\}=$$

$$=\bar{L}\left\{\int_0^s\varphi(t)e^{i\lambda t}\,dt\right\},$$

где $\varphi(t)\in L^2_{[0,s]}$.

Если $s_0=\max\left\{s;\ s+\text{степень}\ \ E<\frac{t}{2}\right\}$, то

$$D_\pi^{\perp}=e^{i\lambda s_0}H^2_+=\int_{s_0}^{\infty}e^{i\lambda t}\varphi(t)dt.$$

Следовательно,

$$\text{и} \qquad H_{\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{|E|^2}\right)=ED_{\varkappa\varepsilon}=E(\overline{D_\varkappa+D_\varepsilon})$$

Обозначим через $L_\gamma(L_r)$ подпространство $D_{\varkappa\varepsilon}$, состоящее из функций, обращающихся в нуль в нулях $\gamma(z)$ $(r(z))$, раздельных с $E(z)$. Пусть $\pi_\varkappa$ (π_r)—произведение Бляшке, построенное по нулям $\gamma(z)$ $(r(z))$. Тогда $\varphi_\gamma \subset \pi_\gamma H^2_+$, $\varphi_r \subset \pi_r H^2_+$.

Докажем, что $H=\tilde{H}$.

Пусть, напротив, существует элемент $\xi\in\tilde{H}$, $(\xi\neq 0)$, не имеющий вид $\varphi\gamma+\psi r$. Тогда $\xi\in(\pi_\gamma H^2_+ \cup \pi_r H^2_+)^\perp = D_{\pi\gamma}\cap D_{\pi r}$.

Но $\pi_\gamma H^2_+ \cup \pi_r H^2_+$ — инвариантное относительно умножения на z подпространство, т. е.

$$\overline{\pi_\gamma H^2_+ \cup \pi_r H^2_+}=u(z)H^2_+,$$

где $u(z)$—внутренняя функция. Поскольку $\gamma(z)$ и $r(z)$ не имеют общих нулей, то $u(z)=1$. Значит,

$$D_{\varkappa\gamma}\cap D_{\varkappa r}=\{0\}.$$

Отсюда, по теореме Крейна [3], $\tau H_0^t(x)=e^{-i\frac{t}{2}\lambda}\gamma H^{\frac{t}{2}}(g)$, $\quad g=\dfrac{f}{|\gamma|^2}$,

т. е. пространства

$$H_0^t(x) \text{ и } e^{-i\frac{t}{2}}\gamma H^{\frac{t}{2}}(g)$$

имеют одинаковую кратность. Кратность же последнего равна единице. Теорема доказана.

Кафедра теории вероятностей
и математической статистики

Поступила 15.03.1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Розанов Ю. А.* Теория обновляющих процессов. М.: Наука, 1974.
2. *Розанов Ю. А.* Стационарные случайные процессы. М.: Физматгиз, 1963.
3. *Крейн М. Г.* Об основной аппроксимационной задаче теории экстраполирования и фильтрации стационарных процессов.—ДАН СССР, 1954, т. 94, № 1, с. 13—16.
4. *L.* de. *Brandes.* Hilbert spaces of entire functions, N.-Y.: 1968.

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է վերջավոր $0\leqslant t\leqslant T$ *միջակայքում որոշված* $z(t)$ *ստացիոնար պրոցեսով առաջացած նորոգող պրոցեսի չափելիությունը։ Բերվում է պատահական պրոցեսի սպեկտրալ խտության վրա դրված անհրաժեշտ և բավարար պայմանը, որի դեպքում նորոգող պրոցեսի չափելիությունը հավասար է մեկի։*

Summary

The dimensions of the renewing process generated by z(t) process given on finite [O, T] have been considered. The necessary and sufficient conditions on spectral density of any process, when the dimensions of the renewing process equals one have been given.