ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 1987 Естественные науки

Математика

УДК 518.9

К. В. САГАТЕЛЯН

ОБ ОДНОЙ ВЕРОЯТНОСТНОЙ МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ

Рассматриваются случайные процессы на конечных графах. Доказывается теорема о существовании процесса, приводящего к любому наперед заданному распределению на множестве концевых вершин графа. В качестве примера решен вариант известной дифференциальной игры.

Динамический процесс принятия решения часто удобно моделировать в виде графа, множество вершин которого соответствует множеству всех возможных состояний системы, и в котором две вершины u и v связаны дугой, если из состояния u можно попасть в состояние u за один шаг.

Решение или стратегия лица, принимающего решение, определяется как совокупность выборов, совершаемых в каждом из состояний, в которых может находиться система. Каждому решению однозначно соответствует некоторый путь в графе, который переводит систему из начального в одно из окончательных состояний.

Рандомизированное решение определяется как совокупность случайных величин, каждая из которых ««прописана» в одном из состояний системы, т. е. как некоторый случайный процесс $\xi(\cdot, u)$, где параметр u пробегает множество всех вершин графа состояний; а каждая случайная величина $\xi(\cdot, u)$ принимает значения на множестве всех дуг, выходящих из вершины u. При этом каждое рандомизированное решение индуцирует некоторое вероятностное распределение на множестве окончательных состояний системы (концевых вершин графа).

Далее будут рассматриваться конечные ориентировочные простые ациклические графы $G=\langle U, X\rangle$, где U—множество вершин графа G, а $X\subset U\times U$—множество дуг графа G.

Приведем несколько определений теории графов и обозначений, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Путем называется чередующаяся последовательность вершин и дуг $u_0, x_0, u_1, \ldots, u_k$, в которой $x_i=(u_i, u_{i+1})\in X$. Путь называется максимальным, если он не содержится ни в одном другом пути.

Множество всех дуг, выходящих из вершины $u\in U$, обозначим через X_u, т. е.

$$X_u=\{(u, v):v\in U\}.$$

Аналогично

$$\overline{X}_u=\{(v, u):v\in U\}.$$

Обозначим далее

$$U_0=\{u:\overline{X_u}=\varnothing\};\ U^*=\{u:X_u=\varnothing\}.$$

Для данной вершины $u\in U$ путем, ведущим в u, назовем путь вида u_0, x_0, ..., u, где $u_0\in U^0$. Множество всех путей, ведущих в вершину u, обозначим через A_u.

Пусть граф $G=<U, X>$ обладает следующим свойством. Существуют такие разбиения $U=U_0\cup U_1\cup\ldots\cup U^*$, $X=X=X_0\cup\ldots\cup X_n$, где $X_i\subset U_i\times\times U_{i+1}$ и $U_0=\{u_0\}$.

Далее будут рассматриваться только такие графы. Они удобны для моделирования многошаговых процессов принятия решения. Действительно, в начальный момент система находится в состоянии u_0. Затем по какой-либо дуге $x_0\in X_0$ она переходит в состояние $u_1\in U_1$ и так далее, пока через n шагов она не оказывается в некоторой окончательной вершине $u\in U^*$. При этом, если в реальной системе процесс принятия решения может заканчиваться за различное число шагов, можно, добавляя фиктивные вершины, сделать количество шагов одинаковым.

Определение. Случайным процессом на графе $G=<U, X>$ назовем семейство случайных величин

$$\xi=\{\xi_u,\ u\in U\setminus U^*\},$$

где ξ_u принимает значения в X_u $(u\in U\setminus U^*)$.

Определение. Поведением на графе G назовем случайный процесс ξ, в котором все величины ξ_u независимы.

Каждый случайный процесс ξ на графе G индуцирует некоторое результирующее распределение вероятностей μ_ξ на множестве окончательных вершин U^*. Действительно, пусть $u\in U^*$, $l_u\in A_u$, $l_u=(u_0, x_0, \ldots, u_n, x_n, u)$. Положим

$$\mu(l)=P\{\xi u_0=x_0,\ \xi u_1=x_1,\ \ldots,\ \xi u_n=x_n\},$$

$$\mu_\xi(u)=\sum_{l\in A_u}\mu(l).$$

Процессы, приводящие к одним и тем же результирующим распределениям, равносильны с точки зрения лица, принимающего решение.

Определение. Процессы ξ' и ξ'' на графе G назовем эквивалентными, если $\mu_{\xi'}=\mu_{\xi''}$.

Далее будем считать, что граф принятия решения $G=<U, X>$ задан. Обозначим через L множество всех путей графа G.

Начальным отрезком пути $l=(u_0, x_0, \ldots, x_{k-1}, u_k)$ будем называть любой путь $u_0, x_0, \ldots, x_{i-1}, u_i$, где $i<k$. Длиной пути l называется число вершин этого пути и обозначается через $|l|$.

Определение. Разложением графа G назовем ориентированное дерево $\Gamma(G)=<V, Y>$, если

1. Существует взаимнооднозначное соответствие F между L и V.
2. Дуга $(y, z)\in Y$ в том и только том случае, когда $F^{-1}(y)$ является начальным отрезком пути $F^{-1}(z)$, причем $|F^{-1}(y)|+1=F^{-1}(z)$.

При таком определении дерева $\Gamma(G)$ каждой вершине $u\in U$ будет соответствовать некоторое множество вершин $B(u)\subset V$, причем каждому пути l, ведущему в u, соответствует одна и только одна вершина $v=F(l)\in V$.

Перейдем к доказательству того, что для любого заданного распределения μ на U^* существует поведение ξ такое, что $\mu=\mu_\xi$. Для этого нам понадобится несколько предварительных результатов.

Лемма 1. Для любого вероятностного распределения μ на U^* существует такое распределение λ на V^* (множестве окончательных вершин дерева $\Gamma(G)$), что $\mu(u)=\lambda(B(u))$.

Доказательство. Пусть $v\in V^*$, $v\in B(\mu)$, $u\in U^*$. По построению $\Gamma(G)$, вершине v соответствует единственный путь $F^{-1}(v)\in A_u$. Пусть $F^{-1}(v)=(u_0, x_0, \ldots, u_n, x_n, u)$.

Обозначим $r_{u_n}=|A_{u_n}|$, $k=|\overline{X}_u|$.

Положим $\lambda(v)=\dfrac{\mu(u)}{r_{u_n}\cdot k}$.

Количество путей графа G, проходящих через u_n и ведущих в u, равно r_{u_n}. Следовательно, мера множества вершин $v\in B(u)$, соответствующих всем путям, проходящим через u_n, равна $\dfrac{\mu(u)}{k}$. Число вершин $u_n\in U_n$, из которых можно попасть в u, равно k. Следовательно, $\lambda(B(u))=\mu(u)$.

Лемма 2. Для любого вероятностного распределения λ на множестве V^* окончательных вершин ордерева $\Gamma(G)$ существует такое поведение η на $\Gamma(G)$, результирующее распределение которой μ_η совпадает с λ.

Доказательство. Утверждение леммы следует из теоремы 5 [2]. Но в данном частном случае построение η просто. Приведем его.

Обозначим через $D(v)$ множество окончательных вершин графа $\Gamma(G)$, следующих за вершиной v.

Каждой вершине $v\in V^*$ припишем число $\beta(v)=\lambda(D(v))$. (Очевидно, что $\beta(v_0)=1$). Далее для каждого ребра $y=(v, w)\in Y$ положим $\gamma_v(y)=\dfrac{\beta(w)}{\beta(v)}$. Легко проверить, что полученное таким образом γ_v является вероятностным распределением на $\underline{Y}_v$.

Поведение η, соответствующее λ, определим как совокупность случайных величин $\eta=\{\eta_u, v\in V\setminus V^*\}$, где распределение случайной величины η_v есть γ_v.

Пусть $v\in V^*$. Существует единственный путь $v_0, y_0, \ldots, v_n, y_n, v$ в дереве $\Gamma(G)$, ведущий в v. Следовательно, по определению η

$$\begin{aligned}\mu_\eta(v)&=P\{\eta_{v_0}=y_0, \ldots, \eta_{v_n}=y_n\}=\\&=P\{\eta_{v_0}=y_0\}\ldots P\{\eta_{v_n}=y_n\}=\\&=\gamma_{\eta_{v_0}}(y_0)\cdots\gamma_{\eta_{v_n}}(y_n)=\\&=\frac{\beta(v)}{\beta(v_n)}\cdot\frac{\beta(v_n)}{\beta(v_{n-1})}\ldots\frac{\beta(v_1)}{\beta(v_0)}=\beta(v)=\lambda(v).\end{aligned}$$

Из лемм 1 и 2 следует, что для любого распределения μ на U^* существует такое поведение η на $\Gamma(G)$, что $\mu(u)=\mu_\eta(B(u))$.

Лемма 3. Для любой меры μ на U^* поведение η, определяемое леммами 1 и 2, обладает следующим свойством: для любых $u \in U$, v', $v'' \in B(u)$

$$\eta_{v'} = \eta_{v''}$$

Доказательство. Пусть $u \in U$, $u \in U_k$, $k < n$, $\bar{v}'$, $v'' \in B(u)$, $x \in \underline{X}_u$, $x = (u, \bar{u})$. Тогда, по определению разложения $\Gamma(G)$, существуют дуги $y' \in \underline{Y}_{v'}$, $y' \in \underline{Y}_{v''}$ $y' = (v', w')$, $y'' = (v'', w'')$, так, что w', $w'' \in B(\bar{u})$.

Пусть $v^* \in D(v')$, $l = F^{-1}(v^*)$. Тогда существует путь $l' \in L$, проходящий через вершины u и $\bar{u}$ и отличающийся от l только начальным отрезком длины k. Пусть $\bar{v}^* = F^{-1}(l')$. Тогда, по построению леммы 1, $\lambda(v^*) = \lambda(\bar{v}^*)$. Кроме этого, очевидно $\bar{v}^* \in D(w'')$.

Следовательно, $\lambda(D(w')) = \lambda(D(w''))$, $\lambda(D(v')) = \lambda(D(v''))$ и $\gamma_{v'}(y') = \gamma_{v'}(y'')$.

Отсюда следует утверждение леммы.

Теорема. Для любого распределения μ на множестве u^* окончательных вершин графа G существует поведение ξ на этом графе, результирующая мера которой совпадает с μ.

Доказательство. Пусть задано распределение μ на U^* и $\Gamma(G) = \langle V, Y \rangle$—разложение графа G. Пусть, далее, λ—распределение на V^*, определяемое леммой 1, а η—поведение на $\Gamma(G)$, определяемое леммой 2 и соответствующее распределению λ.

Возьмем некоторую вершину $u \in U$, $u \in U \setminus U^*$, $u \in U_l$.

Пусть $v \in B(u)$, $x = (u, \bar{u})$, $y \in \underline{Y}_v$, $y = (v, w)$, где $w \in B(\bar{u})$.

Положим

$$\delta_u(x) = \gamma_v(y)$$

и определим ξ как семейство независимых случайных величин $\xi = \{\xi_u, u \in U \setminus U^*\}$, для которых $P\xi_u^{-1} = \delta_u$.

Покажем, что $\mu_\xi(u^*) = \mu(u^*)$ для $\forall u^* \in U^*$.

Действительно,

$$\mu_\xi(u^*) = \sum_{l \in A_{u^*}} P(l).$$

Для $\forall l \in A_u$, $l = (u_0, x_0, \ldots, u_n, x_n, u^*)$

$$P(l) = P\{\xi_{u_0} = x_0\} \ldots P\{\xi_{u_n} = x_n\} =$$

$$= \delta_{u_0}(x_0) \ldots \delta_{u_n}(x_n) =$$

$$= \gamma_{v_0}(y_0) \ldots \gamma_{v_n}(y_n) = \lambda(v^*),$$

где $v_i = D(u_i)$, $y_i = (v_i, v_{i+1})$, $i = \overline{0, n}$,
$v^* = F(l)$.

Следовательно, по лемме 1

$$\mu_\xi(u^*) = \sum_{l \in A_{u^*}} P(l) = \sum_{v^* \in B(u^*)} \lambda(v^*) = \lambda(u^*).$$

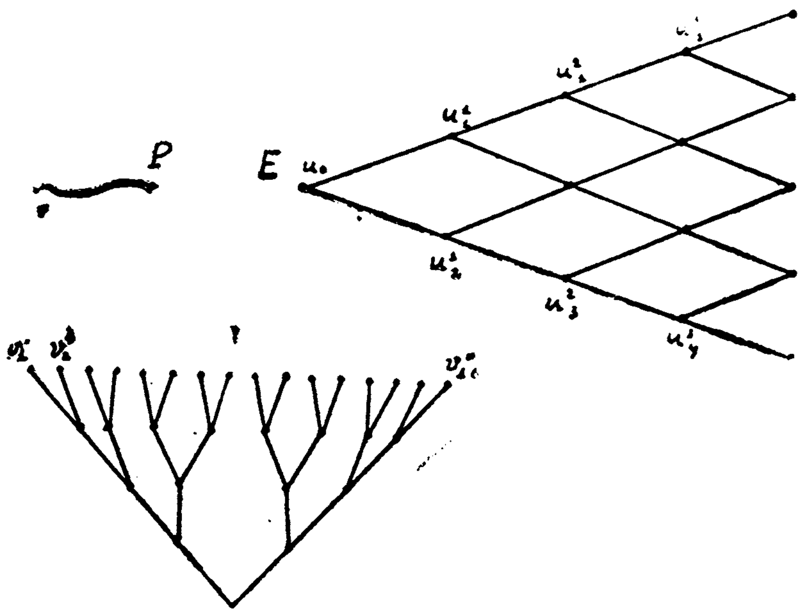
Следствие. Для любого случайного процесса на графе существует эквивалентное ему поведение.

Пример. В качестве примера рассмотрим известную дискретную игру преследования «бомбардировщик и корабль».

Это игра преследования, в которой у преследователя P (бомбардировщика) имеется бомба, которой он может поразить любую точку плоскости (поверхности моря). Преследуемый E (корабль) за единицу времени может переместиться на единицу расстояния в северо-восточном либо в юго-восточном направлении. Предполагается, что бомба достигает поверхности воды через k единиц времени (k—натуральное число) после сброса.

Решение этой игры довольно сложно (см. [1]), если не предполагать, что корабль видит (узнает) момент сброса бомбы.

Предположим здесь, что момент сброса бомбы кораблю известен. Тогда за время, прошедшее от этого момента до достижения поверхности моря, корабль должен переместиться на k единиц расстояния и может оказаться в одной из k+1 точек поверхности моря. Движение корабля после сброса бомбы можно изобразить графом. На рисунке представлен граф движения корабля при k=4.



Естественно, что оптимальной стратегией корабля является стратегия, дающая максимум неопределенности о своем истинном местонахождении, т. е. стратегия, приводящая к одинаковым вероятностям $\frac{1}{k+1}$ появления в окончательных вершинах графа.

Найдем оптимальное поведение корабля для k=4.

Разложение графа представлено на рисунке. Распределение на V^* имеет следующий вид:

$$\lambda(v_1^*)=\lambda(v_{16}^*)=\frac{1}{5};\qquad \lambda(v_2^*)=\lambda(v_{15}^*)=\frac{1}{10};$$

$$\lambda(v_3^*)=\ \dots\ =\lambda(v_{14}^*)=\frac{1}{30}.$$

Поведение корабля запишется следующим образом (так как в каждой вершине только две исходящие дуги, то можно определить вероятности только северо-восточных дуг).

Положим $\mu_{\xi_{u^j_i}}(1)=\mu^i_j$.

Тогда искомо оптимальное поведение игрока запишется следующим образом:

$$\mu_0=\frac{1}{2};\quad \mu^1_1=\frac{11}{15};\quad \mu^1_2=\frac{4}{15};$$

$$\mu^2_1=\frac{9}{11};\quad \mu^2_2=\frac{1}{2};\quad \mu^2_3=\frac{2}{11}$$

$$\mu^3_1=\frac{2}{3};\quad \mu^3_2=\frac{1}{2};\quad \mu^3_3=\frac{1}{2};\quad \mu^3_4=\frac{1}{3}.$$

Кафедра теории оптимального управления и приближенных методов

Поступила 3.02.1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петросян Л. А., Томский Г. В.* Дифференциальные игры с неполной информацией. Иркутск: 1984.
2. *Сагателян К. В.* О марковских процессах на графах.—В сб.: Математические методы в социальных науках, вып. 17. Вильнюс: 1984.

Ամփոփում

Դիտարկվում են պատահական պրոցեսներ վերջավոր գրաֆների վրա։ Ապացուցվում է, որ գրաֆի ծայրային գագաթների բազմության վրա նախապես տված ցանկացած բաշխման համար գոյություն ունի պրոցես, որը բերում է այդ բաշխմանը։ Որպես օրինակ լուծված է հայտնի դիֆերենցիալ խաղի մի տարբերակ։

Summary

Stochastic processes on finite graphs were considered. The existence of a process which brings to each apriory given measure on the set of the graphs terminal tops has been proved.

As an example a version of known differential game was solved.