ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1986 Естественные науки

Математика

УДК 517.956

Г. С. АКОПЯН

О НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА С. Л. СОБОЛЕВА

В работе изучается следующая начально-краевая задача для уравнения типа С. Л. Соболева:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} L(u(t, x)) + M(u(t, x)) = 0, \; x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega, \; t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \\ u|_{\Gamma_1} = 0, \end{cases} \tag{*}$$

где $\Gamma_1 \subset \Gamma = \partial\Omega$, L и M—дифференциальные операторы.

Рассматриваются случаи, когда допускается, чтобы эллиптический оператор L вырождался на части начальной гиперплоскости, а оператор M—не всегда предполагается эллиптическим. Упомянутая задача была изучена путем построения соответствующего функционального пространства H и установления эквивалентности этой задачи задаче Коши для операторного уравнения $\frac{du}{dt} = -Au$. Доказывается, что если порядок вырождения оператора M сильнее, чем порядок вырождения оператора L, ($\alpha \gg \beta$), то задача (*) имеет единственное решение для любого $u_0 \in H$. При $\alpha < \beta$ предполагается, что M—эллиптический оператор, тогда для любого $u_0 \in D(\hat{A})$ доказывается существование и единственность решения задачи (*).

П1°. Пусть Ω—ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, расположенная в полупространстве $x_n > 0$ с достаточно гладкой границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$, где Γ_0—область в гиперплоскости $x_n = 0$.

Рассматривается следующая начально-краевая задача для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} L(u(t, x)) + M(u(t, x)) = 0, \; x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega, \; t > 0, \tag{1}$$

при начальном условии $u|_{t=0} = u_0(x)$ (2)

и граничном условии $u|_{\Gamma_1} = 0, t > 0,$ (3)

где

$$L(u) = -\sum_{i, j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_n}\left(b_{nn}(x)\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

$$(b_{ij}(x) = b_{ji}(x), \; i, j = 1, \ldots, n-1),$$

$$M(u)=-\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)-\frac{\partial}{\partial x_n}\left(a_{nn}(x)\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

$$(a_{ij}(x)=a_{ji}(x),\ i,\ j=1,\ \dots,\ n-1).$$

Относительно функций $a_{ij}(x)$, $b_{ij}(x)$ $(i,\ j=1,\ \dots,\ n-1)$, $a_{nn}(x)$, $b_{nn}(x)$ предполагается, что они непрерывны в замкнутой области $\bar{\Omega}$, существуют такие показатели $\alpha>0$, $\beta(1<\beta<2)$, что произведения $x^{-\beta}b_{nn}(x)$ и $|x_n^{-\alpha}a_{nn}(x)|$ ограничены сверху и снизу положительными числами, предполагается также, что для любой точки $x\in\Omega$ квадратичная форма

$$L(x,\ \xi)=\sum_{i,j=1}^{n-1}b_{ij}(x)\xi_i\xi_j+b_{nn}(x)\xi_n^2$$

положительно определенная, а для $x\in\Gamma_0$ ранг квадратичной формы равен $n-1$.

Впервые задача (1)—(3) была рассмотрена С. Л. Соболевым в связи с его исследованиями, посвященными изучению малых колебаний вращающейся идеальной жидкости в том частном случае, когда $L=\Delta$— трехмерный оператор Лапласа, $\Gamma_1=\Gamma$, а $M=\frac{\partial^2}{\partial z^2}$. В дальнейшем аналогичные задачи изучались Александряном [2], Гальперном [3], а также многими отечественными и зарубежными авторами (библиографию см., напр., в [4]).

В настоящей работе изучаются случаи, когда допускается, чтобы эллиптический оператор L вырождался на части начальной гиперплоскости, что же касается оператора M, то он не всегда предполагается эллиптическим. Таким образом, мы рассматриваем также случаи, когда уравнение (1) является псевдо-параболическим и притом с вырождением.

П2°. Обозначим через K_L (соответственно через K_M)—множество функций, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $u(x)$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(i,\ j<n)$, $x_n^\beta\frac{\partial u}{\partial x_n}$ $\left(\text{соответственно } x_n^\alpha\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x_n}\left(x_n^\beta\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ $\left(\text{соответственно } \frac{\partial}{\partial x_n}\left(x_n^\alpha\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\right)$ непрерывны в $\bar{\Omega}$.

2. $u(x)$ обращается в нуль в некоторой окрестности поверхности Γ_1.

Пусть $u(x)$ и $v(x)\in K_L$, тогда

$$(L(u),v)=\int_\Omega L(u)\cdot v\,dx=-\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_n}\left(b_{nn}(x)\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\right]v\,dx=-\int_\Gamma\left[\sum_{i,j=1}^{n-1}b_{ij}(x)\cos nx_i\cos nx_j+\right.$$

$$\left.+b_{nn}(x)\cos^2 nx\right]\frac{\partial u}{\partial n}\,v\,ds+\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^{n-1}b_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+b_{nn}(x)\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial v}{\partial x_n}\right]dx=$$

$$=-\int_{\Gamma_0}b_{nn}(x)\frac{\partial u}{\partial n}v\,ds+\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^{n-1}b_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+b_{nn}(x)\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial v}{\partial x_n}\right]dx.$$

Докажем, что $\int\limits_{\Gamma_0} b_{nn}(x)\frac{\partial u}{\partial n}v ds=0$. Для этого достаточно доказать, что на Γ_0 существует предел

$$\lim_{x_n\to 0} x_n^{\beta}\frac{\partial u(\hat{x}, x_n)}{\partial x_n}=w(\hat{x}), \quad \hat{x}=(x_1, \ldots, x_{n-1}), \tag{4}$$

причем $w(\hat{x})=0$.

Существование предела непосредственно следует из условия $u(x)\in K_L$. Пусть, вопреки утверждению, для некоторого $\hat{x}_0$ $w(\hat{x}_0)>0$. Если $x_n>0$ достаточно мало, то $\frac{\partial u(\hat{x}_0, x_n)}{\partial x_n}>\frac{w(\hat{x}_0)}{2x_n^{\beta}}$, и, стало быть, интеграл $\int\limits_0^{x_n}\frac{\partial u(\hat{x}_0, x_n)}{\partial x_n}dx_n$ должен расходиться, что противоречит непрерывности $u(x)$ в $\bar{\Omega}$.

Таким образом,

$$(L(u), v)=\int\limits_{\Omega}\left[\sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+b_{nn}(x)\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial v}{\partial x_n}\right]dx, \tag{5}$$

откуда следует, что на K_L оператор L положителен. Нетрудно доказать (см. [5]), что на K_L оператор L положительно определенный.

Расширим, по Фридрихсу, оператор L до самосопряженного и расширенный оператор обозначим снова через L.

На линейном многообразии K_L определим скалярное произведение по формуле

$$[u, v]=(L(u), v). \tag{6}$$

Замкнем линейное многообразие K_L в метрике (6) и получаемое при этом полное гильбертово пространство, которое состоит из функций, имеющих обобщенные первые производные, и в смысле С. Л. Соболева исчезают на Γ_1, обозначим через H.

Определение. $u(t, x)$ называется обобщенным решением задачи (1)—(3), если $u|_{t=0}=u_0(x)$ и

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}+b_{nn}(x)\frac{\partial u(t, x)}{\partial x_n}\frac{\partial v(x)}{\partial x_n}\right]dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\left[\sum_{i,j=1}^{n-1} c_{ij}(x)\frac{\partial u(t, x)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}+a_{nn}(x)\frac{\partial u(t, x)}{\partial x_n}\frac{\partial v}{\partial x_n}\right]dx=0$$

для всех $v(x)\in K_L$.

Пусть $\alpha\geqslant\beta$, тогда ясно, что $|a_{nn}(x)|\leqslant Cb_{nn}(x)$ и $K_L\subset K_M$. Известно, что обратный к L оператор L^{-1} существует и отображает $L_2(\Omega)$ в H, следовательно, для $u\in K_L$ $L^{-1}Mu\in H$, поэтому в гильбертовом пространстве H может определить оператор **A** с областью **определения** K_L по формуле

$$A: u \to L^{-1}Mu. \qquad (7)$$

Теорема 1. Оператор A, рассматриваемый на линейном многообразии K_L, является симметрическим и ограниченным.

Доказательство. Пусть $u(x)$ и $v(x)$—произвольные функции из K_L. Если обозначим $\tilde{u}(x)=Au(x)$, $\tilde{v}(x)=Av(x)$, то $[Au, v]=[\tilde{u}, v]=(L\tilde{u}, v)=(Mu, v)=$

$$=-\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial}{\partial x_n}\left(a_{nn}(x)\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\right]v\,dx=$$

$$=-\int_\Gamma\left[\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}(x)\cos nx_i\cos nx_j+a_{nn}(x)\cos^2 nx\right]\frac{\partial u}{\partial n}v\,ds+$$

$$+\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+a_{nn}(x)\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial v}{\partial x_n}\right]dx=-\int_{\Gamma_0}a_{nn}(x)\frac{\partial u}{\partial n}v\,ds+$$

$$+\int_\Gamma\left[\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}(x)\cos nx_i\cos nx_j+a_{nn}(x)\cos^2 nx\right]u\frac{\partial v}{\partial n}ds+(u, Mv)=$$

$$=-\int_{\Gamma_0}a_{nn}(x)\left(\frac{\partial u}{\partial n}v-\frac{\partial v}{\partial n}u\right)ds+(u, Mv).$$

Так как $\alpha\geqslant\beta$, то $\int_{\Gamma_0}a_{nn}(x)\left(\frac{\partial u}{\partial n}v-\frac{\partial v}{\partial n}u\right)ds=0.$

Следовательно,

$$[Au, v]=(u, Mv)=[\tilde{v}, u]=[u, Av].$$

$$|[Au, u]|=\left|\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}+a_{nn}(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2\right]dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx\right|+\left|\int_\Omega a_{nn}(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant C\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^{n-1}b_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}+b_{nn}(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2\right]dx=C(L(u), u)=C\|u\|_H^2.$$

Теорема 1 доказана.

Распространим оператор **A** с линейного многообразия K_L на все пространство H по непрерывности и расширенный таким образом оператор снова обозначим через A, тогда только что доказанная теорема может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 1 bis. Оператор A является ограниченным и самосопряженным в гильбертовом пространстве H.

Рассмотрим теперь следующую вспомогательную задачу Коши для операторного уравнения:

$$\frac{du}{dt}=-Au, \tag{8}$$

$$u|_{t=0}=u_0. \tag{2}$$

Легко видеть, что, несколько обобщив постановку задачи (1)—(3), мы можем сформулировать ее в следующей операторной форме: найти решение уравнения (8), удовлетворяющее начальным условиям (2), или, другими словами, найти в H траекторию, удовлетворяющую при всех $t>0$ уравнению (8), которая при $t=0$ проходит через заданную точку $u_0\in H$.

Так как оператор A не зависит от t и ограничен в метрике пространства H, то для любого $u_0\in H$ задача (8), (2) имеет единственное решение, которое задается по формуле

$$u(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n A^n}{n!}u_0=e^{-tA}u_0.$$

Возвращаясь к исходной задаче, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $\alpha\geqslant\beta$, тогда для любого $u_0\in H$ существует и притом единственное обобщенное решение задачи (1)—(3).

П3°. Предположим теперь, что $0\leqslant\alpha<\beta$ и для любой точки $x\in\Omega$ квадратичная форма

$$M(x,\xi)=\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j+a_{nn}(x)\xi_n^2$$

положительно определенная, а для $x\in\Gamma_0$ ранг квадратичной формы M равен $n-1$, если $\alpha>0$, а при $\alpha=0$ равен n.

При $\alpha<\beta$ определенный выше оператор A не может быть задан по той же формуле, так как не для всех $u\in K_L$ $Mu\in L_2(\Omega)$, поэтому нам необходимо рассматривать его на подходяще выбранной области определения. Рассмотрим с этой целью семейство $\tilde K_M$, которое при $\alpha\geqslant 1$ совпадает с K_M, а при $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ состоит лишь из тех функций $u\in K_M$, которые исчезают так же и на Γ_0.

Предложение. Множество $K_L\cap\tilde K_M$ всюду плотно в H.

Доказательство. Пусть $v(x)\in K_L$, тогда $\|v(x)-\psi_\delta(x_n)v(x)\|<\varepsilon$ при достаточно малом δ, где $\psi_\delta(x_n)$—гладкая функция, такая, что $\psi_\delta(x_n)=1$ при $x_n\geqslant\delta$ и $\psi_\delta(x_n)=0$ при $0\leqslant x_n\leqslant\frac{\delta}{2}$.

В самом деле,

$$\|v(x)-\psi_\delta(x_n)v(x)\|=\int\limits_{\Omega\cap\{x_n\leqslant\delta\}}\sum_{i,j=1}^{n-1}b_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}(1-\psi_\delta(x_n))^2dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega\cap\{x_n\leqslant\delta\}}b_{nn}(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_n}\right)^2(1-\psi_\delta(x_n))^2dx-2\int\limits_{\Omega\cap\{x_n\leqslant\delta\}}b_{nn}(x)\frac{\partial v}{\partial x_n}v\times$$

$$\times(1-\psi_\delta(x_n))\frac{d\psi_\delta(x_n)}{dx_n}dx+\int\limits_{\Omega\cap\{x_n\leqslant\delta\}} b_{nn}(x)v^2\left(\frac{d\psi_\delta(x_n)}{dx_n}\right)^2 dx. \quad (9)$$

Учитывая, что мера области $\Omega\cap\{x_n\leqslant\delta\}$ имеет порядок $0(\delta)$ и в этой области $\frac{d\psi_\delta}{dx_n}=0(\delta^{-1})$, $b_{nn}(x)=0(\delta^\beta)$, $\beta>1$, заключаем, что все слагаемые справа в (9) стремятся к нулю при $\delta\to0$.

Ясно, что в пространстве H по той же формуле (7) можно определить оператор $\hat{A}$, областью определения которого является множество $K_L\cap\acute{K}_M$. Нетрудно убедиться, что оператор $\hat{A}$ симметричен и неограничен, однако все же имеет место следующая

Теорема 3. Для любого начального значения $u_0\in D(\hat{A})$ существует единственное решение $u(t)\in H$ уравнения

$$\frac{du}{dt}=-\hat{A}u \quad (10)$$

такое, что $u(0)=u_0$.

Доказательство. Так как ранг квадратичной формы M больше или равен $n-1$ и $b_{nn}(x)\leqslant C_1x_n^\beta\leqslant C_2x_n^\alpha\leqslant C_3a_{nn}(x)$, то, как и выше, доказывается, что для $\forall u$, $v\in K_L\cap\acute{K}_M$ имеем

$$[\hat{A}u, v]=[u, \hat{A}v] \text{ и } [\hat{A}u, u]=(Mu, u)\geqslant C_4(L(u), u)=C_4\|u\|^2_H. \quad (11)$$

Расширим, по Фридрихсу, оператор $\hat{A}$ до самосопряженного и полученное расширение обозначим снова через $\hat{A}$. Заметим, что после такого расширения область значений оператора $\hat{A}$ совпадает с H, оператор $\hat{A}$ положительно определен и имеет прежнюю нижнюю грань. Следовательно, при $\lambda>C_0>C_4$ определена резольвента $R_\lambda=(-\hat{A}-\lambda I)^{-1}$ оператора $\hat{A}$ и из интегрального представления резольвенты следует, что

$$\|R_{\lambda_0}\|\leqslant\frac{1}{|C_4-\lambda_0|}\leqslant\frac{1}{\lambda_0-C_0} \quad \text{при } \lambda_0>C_0.$$

В силу теоремы Хилле-Иосиды следует, что существует единственная полугруппа T_t с инфинитезиальным производящим оператором $\hat{A}$. Тогда для любого начального значения $u_0\in D(\hat{A})$ существует единственное решение уравнения (10), которое задается по формуле $u(t)=T_t u_0$. Теорема доказана.

Возвращаясь к исходной задаче, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 4. Пусть $\alpha<\beta$ и для любой точки $x\in\Omega$ квадратичная форма $M(x, \xi)$ —положительно определенная, а для $x\in\Gamma_0$ ранг квадратичной формы $M(x, \xi)$ равен $n-1$, если $\alpha>0$, а при $\alpha=0$—равен n, тогда для любого начального значения $u_0\in D(\hat{A})$ существует и притом единственное обобщенное решение задачи (1)—(3).

Замечание. $D(\hat{A})\subset\hat{H}$, где $\hat{H}$—пополнение множества $K_L\cap\hat{K}_M$ в метрике, порожденной скалярным произведением

$$\{u, v\}=[\hat{A}u, v]=(Mu, v).$$

Следовательно, при $0\leqslant\alpha<1$ функции из $D(\hat{A})$ исчезают на всей границе Γ.

Автор выражает благодарность проф. Р. А. Александряну за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Кафедра теории оптимального управления и приближенных методов *Поступила 14.06.1985*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Соболев С. Л.** Об одной новой задаче математической физики.—Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, т. 18, с. 3—50.
2. **Александрян Р. А.** Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С. Л. Соболева.—Тр. ММО, 1970, т. 9, с. 455—505.
3. **Гальперн С. А.** Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными.—Тр. ММО, 1960, т. 9, 1960, с. 401—423.
4. **Aleksandrian R. A., Berezanskii Ju. M., Ilin V. A., Kostjucenko A. G.** Some questions in spectral theory for partial differential equations.—Amer. Math. Soc. Transl (2), 1976, v. 105.
5. **Михлин С. Г.** К теории вырождающихся эллиптических уравнений.—ДАН СССР, 1954, т. 94, № 2, с. 183—186.
6. **Иосида К.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

Գ. Ս. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Ս. Լ. ՍՈԲՈԼԵՎԻ ՎԵՐԱՍԵՐՎՈՂ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ՍԿԶԲՆԱ–ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է (1)—(3) սկզբնա-եզրային խնդիրը, որտեղ L էլիպտական օպերատորը սկզբնական հիպերհարթության վրա վերասերվում է։ Կառուցվում է համապատասխան H հիլբերտյան տարածությունը և ապացուցվում (1)—(3) խնդրի համարժեքությունը Կոշու խնդրին օպերատորային հավասարման համար։ Այն դեպքում, երբ M օպերատորի վերասերման կարգը ավելի բարձր է L-ի վերասերման կարգից ($\alpha\geqslant\beta$), ապացուցվում է, որ (1)—(3) խնդիրն ունի լուծում և այն էլ միակը կամայական $U_0\in H$ համար։ $\alpha<\beta$ դեպքում ենթադրվում է, որ M-ը էլիպտական օպերատոր է, և ապացուցվում է, որ երբ u_0 պատկանում է համապատասխան օպերատորի որոշման տիրույթին, խնդրի լուծումը գոյություն ունի և միակն է։