ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ **1, 1982** **Естественные науки**

Математика

УДК 519.95

Э. В. ЕГИАЗАРЯН

ДЛИНА МИНИМАЛЬНОГО ТЕСТА ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ТАБЛИЦ

Рассматривается класс случайных k-значных таблиц с различными вероятностями их появлений. Показывается, что с вероятностью, стремящейся к единице, когда число столбцов стремится к бесконечности, таблицы этого класса имеют минимальные тесты не более двух длин.

Понятие «тест» (минимальный, тупиковый, условный и т. д.) было введено в работе [1], посвященной исследованию методов контроля электрических схем. В дальнейшем исследованием длины минимальных тестов для таблиц занимались ряд авторов. В [2, 3] находились длины тестов, близких к минимальным, для почти всех бинарных таблиц некоторого класса. В [4, 5] получены оценки длин минимальных тестов (с точностью до аддитивной постоянной) для почти всех бесповторных k-значных таблиц. В указанных работах исследуемые таблицы имели одинаковые веса. Это ограничение было снято в [6], где показано, что почти все бинарные таблицы некоторого класса имеют минимальные тесты не более двух длин. В настоящей работе аналогичный результат получен для k-значных таблиц.

§ 1. Формулировка основного результата

Пусть T_{ln}—k-значная таблица, составленная из l строк и n столбцов, элементы которой принимают значения из множества $E_k=\{0,1,\dots,k-1\}$. Совокупность $<i_1, i_2, \dots, i_m>$ столбцов таблицы T_{ln} называется тестом T_{ln}, если после удаления из T_{ln} всех столбцов, за исключением указанных, получается таблица с попарно разными строками. Число столбцов в тесте называется его длиной. Минимальным тестом таблицы T_{ln} называется тест наименьшей длины.

Будем полагать таблицу T_{ln} случайной, каждый элемент которой, независимо от других элементов, принимает значение i с вероятностью p_i, $i=0, 1, \dots, k-1$, $\sum_{i=0}^{k-1} p_i=1$. Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1.

$$\text{При } \ln^{\mu} n \leqslant l \leqslant \left(\sum_{i=0}^{k-1} p_i^2\right)^{-\frac{\sqrt{n}}{\varphi(n)}}, \quad \mu > \frac{2\log\sum\limits_{i=0}^{k-1} p_i^3}{2\log\sum\limits_{i=0}^{k-1} p_i^3+3}$$

($\rho(n)\to\infty$ при $n\to\infty$ сколь угодно медленно) с вероятностью, стремящейся к единице при $n\to\infty$, случайная таблица T_{ln} имеет минимальный тест длины m_0 или m_0+1,

$$m_0=\left]\log\frac{l^2}{2\sigma\ln\frac{n}{\sigma}}-\frac{1}{2}\right[,\qquad \sigma=\log\frac{l^2}{2\ln n},$$

где основание логарифма—$\left(\sum_{i=0}^{k-1}p_i^2\right)^{-1}$, а $]a[$ обозначает наименьшее целое, не меньшее a.

§ 2. Асимптотика вероятности теста

Пусть $P(l, m, k)$ обозначает вероятность теста, т. е. вероятность того, что в случайной k-значной таблице T_{lm} строки попарно различны.

Теорема 2.

Вероятность теста и ее асимптотика определяются следующими формулами:

$$P(l,m,k)=\frac{l!}{2\pi i}\oint\Pi\left(1+zp_0^{j_0}\cdot\ldots\cdot p_{k-1}^{j_{k-1}}\right)\frac{m!}{j_0!\cdot\ldots\cdot j_{k-1}!}\frac{dz}{z^{l+1}},\tag{1}$$

где интегрирование ведется на комплексной плоскости z по любому замкнутому контуру вокруг начала координат. Произведение в (1) берется по всем целым неотрицательным $j_0, \ldots, j_{k-1}$, сумма которых равна m;

$$P(l,\ m,\ k)\sim e^{-\frac{l^2}{2}\left(\sum_{i=0}^{k-1}p_i^2\right)^m},\qquad l^3\left(\sum_{i=0}^{k-1}p_i^3\right)^m\to\infty(l,m\to\infty).\tag{2}$$

Доказательство. Занумеруем произвольным образом все k-значные строки длины m. Обозначим через $p_q(m, k)$ вероятность появления q-й строки ($q=1, 2, \ldots, k^m$). Легко видеть, что вероятность теста равна коэффициенту при z^l в многочлене

$$p(z)=l!\prod_{q=1}^{k^m}(1+p_q(m,k)z).\tag{3}$$

Среди сомножителей, входящих в (3), будут и одинаковые, так как строки, содержащие значение i в j_i местах $\left(i\in E_k,\ \sum_{i=0}^{k-1}j_i=m\right)$, имеют равные вероятности, равные $\prod_{i=0}^{k-1}p_i^{j_i}$. Число таких строк равно $\frac{m!}{j_0!\ldots j_{k-1}!}$, поэтому производящую функцию для вероятности теста (3) можно представить в виде

$$p(z)=l!\prod_{\substack{0\leqslant j_0,\ldots,j_{k-1}\leqslant m\\ j_0+\ldots+j_{k-1}=m}}\left(1+zp_0^{j_0}\ldots p_{k-1}^{j_{k-1}}\right)^{\frac{m!}{j_0!\cdot\ldots\cdot j_{k-1}!}}. \tag{4}$$

Отсюда и из свойства интеграла Коши следует первое утверждение теоремы 2.

Методом перевала определим асимптотику интеграла в (1). Пусть для определенности $p_i\leqslant p_{k-1}$, $i=0, 1,\ldots, k-2$. Сделаем замену переменной в интеграле, положив $z=(l+1)u$. Тогда (1) примет вид

$$P(l,m,k)=\frac{l!}{2\pi i(l+1)l}\oint e^{(l+1)f(u,k,l,m)}\,du, \tag{5}$$

где

$$f(u,k,l,m)=-\ln u+\frac{1}{l+1}\sum_{j_0+\ldots+j_{k-1}=m}\frac{m!}{j_0!\ldots j_{k-1}!}\ln(1+$$

$$+u(l+1)p_0^{j_0}\cdot\ldots\cdot p_{k-1}^{j_{k-1}})=-l\mathrm{n}u+$$

$$+\frac{1}{l+1}\sum_{j_0+\ldots+j_{k-1}=m}\frac{m!}{j_0!\ldots j_{k-1}!}\ln\left(1+u\,(l+1)p_{k-1}^{m}\left(\frac{p_0}{p_{k-1}}\right)^{j_0}\ldots\left(\frac{p_{k-2}}{p_{k-1}}\right)^{j_{k-2}}\right). \tag{6}$$

За контур интегрирования возьмем окружность с центром в начале координат и радиусом $r_1=1+s_{2k}^{m}l$, где $s_{vk}=\sum_{i=0}^{k-1}p_i^{v}$. Тогда $lup_{k-1}^{m}\to 0$ при $l,m\to\infty$ и $l^3s_{3k}^{m}\to 0$. Действительно, используя неравенство Коши-Гёльдера, получаем, что

$$\sum_{i=0}^{k-1}p_i^2\leqslant\left(\sum_{i=0}^{k-1}p_i^3\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\sum_{i=0}^{k-1}p_i^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Отсюда вытекает справедливость неравенства $s_{2k}^3<s_{3k}$. Следовательно,

$$r_1p_{k-1}^{m}l=(1+ls_{2k}^{m})(ls_{3k}^{m})^{\frac{1}{3}}p_{k-1}^{m}s^{-\frac{m}{3}}<$$

$$<\left(1+(l^3s_{3k}^{m})^{\frac{1}{3}}(l^3s_{3k}^{m})^{\frac{1}{3}}\right)\left(1+\sum_{i=0}^{k-2}\left(\frac{p_i}{p_{k-1}}\right)^{3}\right)^{-\frac{m}{3}}\to 0.$$

При указанных условиях справедливо разложение

$$\ln\left((1+u(l+1)p_{k-1}^{m}\prod_{i=0}^{k-2}\left(\frac{p_i}{p_{k-1}}\right)^{j_i}\right)=$$

$$=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(-1)^{q+1}}{q}(up_{k-1}^{m}(l+1))^{q}\prod_{i=0}^{k-2}\left(\frac{p_i}{p_{k-1}}\right)^{qj_i}.$$

Подставляя полученное выражение в (6) и меняя порядок суммирования, получаем

$$f(u,k,l,m)=-\ln u+\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(-1)^{q+1}}{q}u^{q}(l+1)^{q-1}s_{qk}^{m}. \tag{7}$$

Полагая $u=r_1 e^{i\varphi}$, из (7) и (5) получаем

$$P(l,m,k)=\frac{l!\,r_1}{\pi(l+1)l}\operatorname{Re}\int_0^{\pi} e^{(l+1)g(\varphi)+i\varphi}d\varphi, \tag{8}$$

где

$$g(\varphi)=f(r_1 e^{i\varphi},\ k,l,m)=-\ln r_1-i\varphi-$$
$$-\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(-1)^q}{q}r_1^q(l+1)^{q-1}s_{qk}^m e^{iq\varphi}.$$

Так как $r_1 l p_{k-1}^m \to 0(l,m\to\infty)$, то

$$(l+1)g(\varphi)=(l+1)\Big(-\ln r_1-i\varphi+r_1 e^{i\varphi}-$$
$$-\frac{r_1^2(l+1)s_{2k}^m e^{2i\varphi}}{2}\Big)+0(1)=(l+1)g_0(\varphi)+0(1).$$

Поэтому в (8) можно заменить $g(\varphi)$ на $g_0(\varphi)$ и применить метод Лапласа [7]. Заметим, что радиус окружности, по которой проводится интегрирование, определен в соответствии с методом перевала из уравнения $f_0'(r)=0$, где $f_0(u)=-\ln u+u-\frac{1}{2}u^2(l+1)s_{2k}^m$.

Так как $\operatorname{Re}g_0(0)-\operatorname{Re}g_0(\varphi)=r_1(1-\cos\varphi)-r_1(l+1)s_{2k}^m\sin\varphi>0$ при $\varphi\neq0$ ввиду $r_1 l s_{2k}^m\to0$, то получаем

$$P(l,m,k)\sim\frac{l!\,r_1}{2\pi(l+1)^l}\sqrt{-\frac{2\pi}{(l+1)(\operatorname{Re}g_0(0))''}}e^{(l+1)\operatorname{Re}g_0(0)}.$$

Используя формулу Стирлинга и соотношения

$$\operatorname{Re}g_0(0)=-\ln r_1+r_1-\frac{r_1^2(l+1)s_{2k}^m}{2},\quad r_1=1+ls_{2k}^m\to1,$$
$$r_1(l+1)s_{2k}^m\to0(l,\ m\to\infty),$$

получаем

$$P(l,\ m,\ k)\sim e^{-\frac{(l+1)^2}{2}s_{2k}^m}\sim e^{-\frac{l^2}{2}s_{2k}^m}.$$

Теорема 2 доказана.

§ 3. Нижняя оценка длины минимального теста

Сопоставим каждой совокупности столбцов $<i_1,\ \ldots,\ i_m>$ таблицы T_{ln} случайную величину $\xi_{<i_1,\ldots,i_m>}$, принимающую значение 1, если $<i_1,\ldots,i_m>$ является тестом T_{ln}, и 0 в противном случае. Рассмотрим случайную величину

$$\eta(m)=\sum_{<i_1,\ldots,i_m>}\xi_{<i_1,\ \ldots,\ i_m>},$$

где суммирование ведется по всем наборам $<i_1, \ldots, i_m>$. Очевидно, что

$$M\eta(m)=C_n^k P(l,\ m,\ k),$$

где $M\eta(m)$ обозначает математическое ожидание случайной величины $\eta(m)$.

Используя формулу Стирлинга, заменим C_n^m выражением

$$C_n^m \sim P(n,\ m)=\frac{1}{\sqrt{2\pi m}}\left(\frac{en}{m}\right)^m,$$

справедливым при $m=o(\sqrt{n})(m,\ n\to\infty)$. Отсюда и из утверждения теоремы 2 следует, что

$$M\eta(m)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi m}}\left(\frac{n}{em}\right)^m e^{-\frac{l^2}{2}s_{2k}^m}$$

$$(l^3 s_{3k}^m\to 0,\ n,\ m\to\infty,\ m=o(\sqrt{n})).$$

Полагая m непрерывным, покажем справедливость следующего утверждения (при этом заменим $M\eta(m)$ его асимптотикой).

Лемма 1.

Пусть при $m=\acute{m}$ имеет место $M\eta(m)\sim 1$. Тогда

$$M\eta\left(\acute{m}-\frac{1}{2}\right)\to 0,\quad \frac{\acute{m}}{M\eta\left(\acute{m}+\frac{1}{2}\right)}\to 0;$$

$M\eta(m)$ монотонно возрастает с ростом m

$$(l^3 s_{3k}^m\to o,\ m,\ \acute{m}=o(\sqrt{n}),\ m,\ n\to\infty).$$

Доказательство. Имеем

$$M\eta\left(\acute{m}-\frac{1}{2}\right)\sim\frac{M\eta\left(\acute{m}-\frac{1}{2}\right)}{M\eta(\acute{m})}\sim\sqrt{\frac{\acute{m}}{en}}\left(1-\frac{1}{2\acute{m}}\right)^{-\acute{m}+\frac{1}{2}}\times$$

$$\times e^{\frac{l^2}{2}s_{2k}^{\acute{m}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{s_{2k}}}\right)}<\sqrt{\frac{\acute{m}}{n}}e^{\frac{l^2}{2}s_{2k}^{\acute{m}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{s_{2k}}}\right)}\sim\sqrt{\frac{\acute{m}}{n}}\times$$

$$\times(P(n,\acute{m}))^{-\frac{1}{\sqrt{s_{2k}}}+1}\to 0.$$

Аналогичным образом находим, что

$$\frac{\bar{m}}{M\eta\left(\bar{m}+\frac{1}{2}\right)}\sim\frac{\bar{m}M\eta(\bar{m})}{M\eta\left(\bar{m}+\frac{1}{2}\right)}\sim\sqrt{\frac{\bar{m}^3}{en}}\left(1+\frac{1}{2\bar{m}}\right)^{\bar{m}+\frac{1}{2}}\times$$

$$\times e^{\frac{l^2}{2}s_{2k}^{\bar{m}}(\sqrt{s_{2k}}-1)}\lesssim\sqrt{\frac{\bar{m}^3}{en}}(P(n,\bar{m}))^{\sqrt{s_{2k}}-1}\to 0.$$

Последнее утверждение леммы очевидно.

Методом итераций из уравнения $M\eta(m)\sim 1$ находим значение $\bar{m}$:

$$\bar{m}=\log_b\frac{l^2}{2\sigma\ln\frac{n}{\sigma}}+o(1),\quad \sigma=\log_b\frac{l^2}{2\ln n},\quad b=s_{2k}^{-1}$$

которое справедливо при условиях $l^3s_{3k}^{\bar{m}}\to 0$, $\bar{m}=o(\sqrt{n})(n,\bar{m}\to\infty)$. Значение $\bar{m}$ удовлетворяет им при указанном в теореме 1 диапазоне изменения параметра l.

Из определения значения m_0 (теорема 1) и утверждений леммы 1 следует, что $\bar{m}-\frac{3}{2}\leqslant m_0-1<\bar{m}-\frac{1}{2}$, $M\eta(m_0-1)\to 0(n\to\infty)$. Применяя к случайной величине $\eta(m)$ первое неравенство Чебышева $P(\eta(m)\geqslant t)\leqslant\leqslant\frac{M\eta(m)}{t}$ при $t=1$ и $m=m_0-1$, получаем, что $P(\eta(m_0-1)=0)\to 1$. Поэтому из самого определения случайной величины $\eta(m)$ следует нижняя оценка длины минимального теста.

§ 4. Верхняя оценка длины минимального теста

Рассмотрим случайную таблицу $T_{l(2k-v)}$. Будем считать, что она составлена из двух таблиц $T_{lm}^{(1)}$ и $T_{lm}^{(2)}$, имеющих v общих столбцов. Совместной вероятностью тестов $p(v)$ будем называть вероятность того, что вышеуказанные таблицы $T_{lm}^{(1)}$ и $T_{lm}^{(2)}$ одновременно являются тестами.

Лемма 2. Совместная вероятность $p(v)$ является неубывающей функцией v.

Доказательство такое же, что и в [6]. Пусть $p^\circ(j, v, k)$—вероятность j-го состояния общей части ($j=1, \ldots, k^{lm}$), а $p(l, m, j, k)$—вероятность того, что таблица $T_{lm}^{(1)}$ (или $T_{lm}^{(2)}$) является тестом при j-м состоянии их общей части. Тогда

$$p(v)=\sum_{j=1}^{k^{lv}}p^0(j,\ v,\ k)p^2(l, m,\ j,\ k). \qquad (9)$$

Увеличим общую часть T_{lv} на один столбец (размеры таблиц $T_{lm}^{(1)}$ и $T_{lm}^{(2)}$ те же). Тогда

$$p(l, m, j, k)=\sum_{q=1}^{k^l} p_q^0(l, k)p(l, m, j, k, q), \tag{10}$$

где $p_q^0(l, k)$—вероятность q-го состояния нового столбца, а $p(l, m, j, k, q)$—вероятность теста при этих условиях.

Далее,

$$p(v+1)=\sum_{j=1}^{k^{lv}}\sum_{q=1}^{k^l} p_q^0(l, k)p^0(j, v, k)p(l, m, j, k, q)=$$

$$=\sum_{j=1}^{k^{lm}} p^0(j, v, k)\sum_{q=1}^{k^l} p_q^0(l, k)p(l, m, j, k, q). \tag{11}$$

Из формул (9) и (10) следует, что

$$p(v)=\sum_{j=1}^{k^{lm}} p^0(j, v, k)\left(\sum_{q=1}^{k^l} p_q^0(l, k)p(l, m, j, k, q)\right)^2. \tag{12}$$

Утверждение леммы следует теперь из (11) и (12).

Теорема 3. Совместная вероятность тестов и ее асимптотика определяются следующими формулами:

$$p(v)=\frac{l!}{2\pi i}\oint \prod_{v_0+\ldots+v_{k-1}=v}\left(1+\sum_{j=1}^{l_0} p^2(j, m-v, k)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{z^j}{j!}p_0^{j_0}\cdot\ldots\cdot p_{k-1}^{j_{k-1}}\right)\frac{v!}{v_0!\ldots v_{k-1}!}, \tag{13}$$

где интегрирование ведется по любому замкнутому контуру вокруг начала координат; $l_0=\min(l, k^{m-v})$;

$$p(v)\sim P^2(l, m, k)e^{\frac{1}{2}l^2 s_{2k}^{2m-v}} \quad \text{при} \quad l^3 s_{3k}^v\to 0,\ l,\ m\to\infty;$$

$$p(v)\sim e^{-l^2 s_{2k}^m}\sim P^2(l, m, k) \text{ при } v\leqslant v_0,\ l^3 s_{2k}^{v_0}\to 0,$$

$$l^2 s_{2k}^{2m-v_0}\to 0,\quad l,\ m\to\infty.$$

Доказательство. Рассмотрим множество всех строк длины v. Занумеруем их. Пусть $p_q(v, k)$—вероятность q-й строки ($q=1, \ldots, k^v$). Пусть общая часть таблиц состоит из j_q строк с номером q, ясно, что

$$\sum_{q=1}^{k^v} j_q=l. \tag{14}$$

Очевидно, что вероятность состояния общей части при фиксированном наборе $\langle j_1\ldots, j_{k^v}\rangle$, удовлетворяющем условию (14), равна

$$l!\prod_{q=1}^{k^v}\frac{1}{j_q!}p_q^{j_q}(v,\ k).$$

Но чтобы таблицы $T_{lm}^{(1)}$ и $T_{lm}^{(2)}$ одновременно были бы тестами, необходимо, чтобы оставшиеся $k-v$ столбцов в таблицах $T_{lm}^{(1)}$ и $T_{lm}^{(2)}$ делали равные строки общей части попарно различными. Поэтому при заданном наборе $\langle j_1,\ldots,j_{k^v}\rangle$ совместная вероятность тестов равна

$$l!\prod_{q=1}^{k^v}\frac{1}{j_q!}p_q^{j_q}(v,\ k)P^2(j_q,\ m-v,\ k).$$

Отсюда

$$p(v)=l!\sum_{j_1+\ldots+j_{k^v}=l}\prod_{q=1}^{k^v}\frac{p_q^{j_q}(v,\ k)}{j_q!}P^2(j_q,\ m-v,\ k). \tag{15}$$

Производящей функцией для $p(v)$ является многочлен

$$p_v(z)=l!\prod_{q=1}^{k^v}\left(1+\sum_{j=1}^{l_0}\frac{1}{j!}p_q^j(v,\ k)P^2(j,\ m-v,\ k)z^j\right), \tag{16}$$

где $l_0=\min\ (l,\ k^{m-v})$. Искомая вероятность равна коэффициенту при z^l.

Так как строки, содержащие значение i в j_i местах $\left(\sum_{i=0}^{k-1}j_i=v\right)$, имеют одинаковые вероятности $\sum_{i=0}^{k-1}p_i^{j_i}$ и число их равно $\frac{v!}{j_0!\ldots j_{k-1}!}$, то формулу (16) можно представить в виде

$$p_v(z)=l!\prod_{v_0+\ldots+v_{k-1}=v}\left(1+\sum_{j=1}^{l_0}\frac{z^j}{j!}P^2(j,\ m-v,\ k)\Pi p_i^{jv_i}\right)^{\frac{v!}{v_0!\ldots v_{k-1}!}}. \tag{17}$$

Отсюда следует формула (13).

Сделаем замену переменной в интеграле (13), положив $z=(l+1)u$. Тогда

$$p(v)=\frac{l!}{2\pi i(l+1)^l}\oint e^{(l+1)f(u,\ l,\ m,\ v)}\,du, \tag{18}$$

где

$$f(u,\ l,\ m,\ v)=-\ln u+\frac{1}{l+1}\sum_{v_0+\ldots+v_{k-1}=v}\frac{v!}{v_0!\ldots v_{k-1}!}\ln\Bigg(1+$$

$$+\sum_{j=1}^{l_0}\frac{u^j}{j!}(l+1)^jP^2(j,\ m-v,\ k)\prod_{i=0}^{k-1}p_i^{jv_i}\Bigg).$$

Интегрирование в (18) будем проводить по окружности с центром в начале координат и радиусом $r_2=1+(l+1)(2s_{2k}^m-s_{2k}^{2m-v})$.

Формула (13) примет вид

$$p(v)=\frac{l!r_2}{\pi(l+1)^l}\mathrm{Re}\int_0^{\pi} e^{(l+1)g(\varphi)+l\varphi}d\varphi, \tag{19}$$

$$g(\varphi)=-\ln r_2-i\varphi+\frac{1}{l+1}\sum_{\nu_0+\ldots+\nu_{k-1}=\nu}\frac{\nu!}{\nu_0!\ldots\nu_{k-1}!}\ln\Big(1+$$

$$+\sum_{j=1}^{l_0}Q(j,\ \nu_0,\ldots,\nu_{k-1}),$$

$$Q(j,\ \nu_0,\ldots,\ \nu_{k-1})=\frac{1}{j!}r_2^jP^2(j,\ m-v,\ k)e^{ij\varphi}(l+1)^j\prod_{i=0}^{k-1}p_i^{j\nu_i}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\ln\Big(1+\sum_{j=1}^{l_0}Q(j,\ \nu_0,\ldots,\ \nu_{k-1})=P^2(1,m-v,k)r_2(l+1)e^{i\varphi}\prod_{i=0}^{k-1}p_i^{\nu_i}-$$

$$-\frac{1}{2}(1-P^2(2,\ m-v,\ k))r_2^2(l+1)^2e^{2i\varphi}\prod_{i=0}^{k-1}p_i^{2\nu_i}+$$

$$+\Big(\prod_{i=0}^{k-1}p_i^{3\nu_i}\Big)O(l^3).$$

Так как $P(1,\ m-v,k)=1$, $P^2(2,\ m-v,\ k)=1-s_2^{m-v}$, то, суммируя по $\nu_0,\ldots,\nu_{k-1}$, получаем $(l+1)g(\varphi)=-(l+1)g_1(\varphi)+0(1)(l^3s_{3k}^v\to 0)$, где

$$g_1(\varphi)=-(l+1)(2s_{2k}^m-s_{2k}^{2m-v})-i\varphi+r_2e^{i\varphi}-$$

$$-\frac{1}{2}r_2^2(l+1)e^{2i\varphi}(2s_{2k}^m-s_{2k}^{2m-v}).$$

Заменим в (19) $g(\varphi)$ на $g_1(\varphi)$. Так как $\mathrm{Re}g_1(0)>\mathrm{Re}g_1(\varphi)$, то, применяя метод Лапласа, находим

$$p(v)\sim e^{-l^2s_{2k}^m+\frac{l^2}{2}s_{2k}^{2m-v}}\sim P^2(l,\ m,\ k)e^{\frac{1}{2}l^2s_{2k}^{2m-v}}$$

$$(l^3s_{3k}^v\to 0,\ l,\ m,\ v\to\infty).$$

При $l^3s_{3k}^{v_0}\to 0$, $l^2s_{2k}^{2m-v_0}\to 0$ получаем $p(v_0)\sim P^2(l,\ m,\ k)$. Отсюда $p(v)\sim$ $\sim P^2(l,\ m,\ k)$ и при $v<v_0$, так как при этом справедливо $P^2(l,\ m,\ k)\leqslant p(v)\leqslant p(v_0)$ (лемма 2).

Теорема 3 доказана.

Рассмотрим дисперсию $D\eta(m)$ ранее введенной случайной величины $\eta(m)$.

$$D\eta(m)=M\eta^2(m)-(M\eta(m))^2=C_n^m\sum_{v=\max\{0,2m-n\}}^{m}C_m^vC_{n-m}^{m-v}p(v)-$$

$$-(C_n^mP(l,\ m,\ k))^2.$$

Теорема 4. В условиях теоремы 1 имеет место $\frac{D\eta(m)}{(M\eta(m))^2} \to 0$ при $m=m_0+1$ $(n\to\infty)$.

Доказательство. Имеем

$$\frac{D\eta(m)}{M\eta(m))^2}=\sum_{v=\max(0,2m-n)}\frac{C_n^v C_{n-m}^{m-v}p(v)}{C_n^m P^2(l,m,k)}-1.$$

Разобьем эту сумму на две части, предварительно обозначим v-е слагаемое через a(v):

$$\frac{D\eta(m)}{(M\eta(m))^2}=\sum_{v=\max(0,2m-n)}^{v_0}a(v)+\sum_{v=v_0+1}^{m}a(v)-1, \tag{20}$$

где $v_0=\left]\log\frac{l^2}{4\sigma^2\ln^2\frac{n}{\sigma}\gamma(n)}\right[$ при $n\to\infty$ сколь угодно медленно, а основание логарифма—s_{sk}^{-1}. При указанных в теореме 1 условиях и выбранном значении v_0 выполняются соотношения

$$l^2 s_{2k}^{2m-v_0}\to 0,\ l^3 s_{3k}^{v_0}\to 0(m=m_0+1,\ l,\ n\to\infty).$$

Используя утверждения теоремы 3, получаем

$$\sum_{v=\max(0,2m-n)}^{v_0}a(v)\lesssim\frac{1}{C_n^k}\sum_{v=\max(0,2m-n)}^{n}C_m^v C_{n-m}^{m-v}=1.$$

Рассмотрим вторую сумму. Из теоремы 3 следует, что

$$\sum_{v=v_0+1}^{m}a(v)\sim\frac{1}{C_n^m}\sum_{v=v_0+1}^{k}C_m^v C_{n-k}^{m-v}e^{\frac{1}{2}l^2 s_{2k}^{2m-v}}.$$

Обозначим v-е слагаемое полученной суммы через b(v) и рассмотрим отношение

$$c(v)=\frac{b(v+1)}{b(v)}=\frac{(m-v)^2}{(v+1)(n-2k+v+1)}e^{\frac{1}{2}l^2 s_{2k}^{2m-v}\left(\frac{1}{s_{2k}}-1\right)}.$$

Функция c(v) в промежутке $[v_0, m_0]$ монотонно возрастает. Далее, для достаточно больших n справедливо $c(v_0)<1$, $c(m_0)>1$. Отсюда вытекает, что функция b(v) в промежутке $[v_0+1, m_0+1]$ вначале убывает, а затем возрастает. Следовательно,

$$\sum_{v=v_0+1}^{m}a(v)\lesssim(m-v_0)(a(v_0+1)+a(m)).$$

Так как $\bar{m}+\frac{1}{2}\leqslant m_0+1<\bar{m}+\frac{3}{2}$, то согласно лемме 1 имеем

$$(m-v_0)a(m)<ma(m)\sim\frac{m}{M\eta(m)}\to 0 \tag{21}$$

при $m=m_0+1$ $(n\to\infty)$.

Далее, при выбранном значении v_0 получаем, что

$$(m-v_0)a(v_0+1)\lesssim\frac{(m-v_0)C_m^{v_0+1}C_{n-m}^{m-v_0-1}}{C_n^m}<$$

$$<\frac{(m-v_0)C_m^{v_0+1}C_n^{m-v_0-1}}{C_n^m}\lesssim\frac{m-v_0}{(v_0+1)!}\left(\frac{m^2}{n}\right)^{v_0}\to 0$$

при $m=m_0+1$. Отсюда и из (21) следует утверждение теоремы 4.

Применяя к случайной величине $\eta(m)$ второе неравенство Чебышева

$$P(|\eta(m)-M\eta(m)|\geqslant t)\leqslant\frac{D\eta(m)}{t^2}$$

при $t=\frac{1}{2}$ и $m=m_0+1$, получаем, что с вероятностью, стремящейся к единице при $n\to\infty$, в случайной таблице T_{ln} имеются тесты длины m_0+1.

Теорема 1 доказана.

Следствие. При указанном в теореме 1 диапазоне изменения параметра l с вероятностью, стремящейся к единице при $n\to\infty$, случайная таблица T_{ln} является тестом.

Кафедра математической кибернетики *Поступила 24.04.1981*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Чегис И. А., Яблонский С. В.** Логические способы контроля работы электрических схем.—Тр. МИАН им. В. А. Стеклова, 1958, т. 51.
2. **Коспанов Э. Ш.** Об одном алгоритме построения достаточно простых тестов.—В сб. Дискретный анализ, вып. 8, Новосибирск: 1966.
3. **Носков В. Н.** О тупиковых и минимальных тестах для одного класса таблиц.—В сб. Дискретный анализ, вып. 12, Новосибирск: 1968.
4. **Коршунов А. Д.** О длине минимальных тестов для прямоугольных таблиц.—Кибернетика. Киев: Наукова думка, 1970, № 6.
5. **Коршунов А. Д.** О длине минимальных тестов для прямоугольных таблиц.—Кибернетика. Киев: Наукова думка, 1971, № 1.
6. **Слепян В. А.** Длина минимального теста для некоторого класса таблиц.—В сб. Дискретный анализ, вып. 23, Новосибирск: 1973.
7. **Федорюк М. В.** Метод перевала. М.: Наука, 1977.

Է. Վ. ԵՂԻԱԶԱՐՅԱՆ

ՄԻՆԻՄԱԼ ՏԵՍՏԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՂՅՈՒՍԱԿՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ԴԱՍԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է k-արժեքային պատահական աղյուսակների մի դաս։ Ապացուցվում է, որ եթե սյուների քանակը ձգտում է անսահմանության, ապա մեկին ձգտող հավանականությամբ այդ դասի աղյուսակների մինիմալ տեստերը կարող են ունենալ միայն երկու երկարություն։