ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 1980 Естественные науки

Математика

УДК 519.1

Т. Э. ПИЛИПОСЯН, Д. О. МУРАДЯН

ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ ДЛИНЫ И ШИРИНЫ ПОЛНОГО р-ДОЛЬНОГО ГРАФА

Приводится алгоритм нахождения минимальных по длине нумераций полного р-дольного графа, а также описывается класс его минимальных по ширине нумераций. Доказывается, что среди полных р-дольных графов на n вершинах наибольшую длину и ширину имеет уравновешенный. Приводятся достижимые верхние оценки длины и ширины произвольного графа, зависящие от количества вершин и хроматического числа.

В настоящее время не известны эффективные алгоритмы для нахождения минимальных по длине (ширине) нумераций произвольного графа. Эффективные алгоритмы нахождения минимальных по длине нумераций известны лишь для отдельных классов графов. В случае единичного n-мерного куба такой алгоритм найден в [1], параллелепипеда—[2], деревьев—[3]. В [4] вводится понятие плоской нумерации и дается эффективный алгоритм нахождения минимальной по ширине плоской нумерации произвольного дерева.

В [5] для отдельных классов графов приводятся оценки длины и ширины, зависящие от некоторых параметров графа.

Пусть $G(X, U)$—граф с множеством вершин $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и множеством ребер U (см. [6]), а $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$—некоторое множество действительных чисел, где $a_1<a_2<\ldots<a_n$. Нумерацией (вершин) графа G множеством A называется взаимно однозначное отображение $\varphi: X\to A$. Множество всех нумераций графа G множеством A обозначим через $\Phi_{G,A}$ и, если $A=\{1, 2, \ldots, n\}$,—через Φ_G.

Пусть $X'\subseteq X$, $\varphi\in\Phi_{G,A}$. Введем следующие обозначения:

$$\omega_G(X')=|\{(x_i, x_j)/(x_i, x_j)\in U;\ x_i\in X';\quad x_j\in X\setminus X'\}|;$$

$$X_\varphi^{k,l}=\{x_i/x_i\in X;\ a_k\leqslant\varphi(x_i)\leqslant a_l\},$$

где $k\leqslant l$.

$$E_\varphi(G)=\sum_{(x_i, x_j)\in U}|\varphi(x_i)-\varphi(x_j)|.$$

Число $E_\varphi(G)$ называется длиной нумерации φ.

Лемма 1. Для любой нумерации $\varphi\in\Phi_{G,A}$

$$E_\varphi(G)=\sum_{l=1}^{n-1}(a_{l+1}-a_l)\omega_G(X_\varphi^{1,l}).$$

Доказательство следует из определений $E_\varphi(G)$ и $\omega_G(X_\varphi^{1,l})$.

В случае, когда $\varphi \in \Phi_G$, имеем $E_\varphi(G) = \sum_{l=1}^{n-1} \omega_G(x_\varphi^{1,l})$, что было получено в [1]. Нумерация $\varphi_0 \in \Phi_{G,A}$ называется минимальной по длине, если $E_{\varphi_0}(G) \leqslant E_\varphi(G)$ для всех $\varphi \in \Phi_{G,A}$.

Обозначим

$$\omega_G^l = \min_{X' \subseteq X, |X'|=l} \omega_G(X').$$

Нумерацию $\varphi \in \Phi_G$ назовем нормальной, если для всех $l=\overline{1, n-1}$, $\omega_G^l = \omega_G(X_\varphi^{1,l})$. Множество нормальных нумераций графа G обозначим через Φ_G^n. Граф G назовем нормально нумеруемым, если $\Phi_G^n \neq \varnothing$.

Каждой нумерации $\varphi \in \Phi_G$ поставим в соответствие нумерацию $\tilde{\varphi} \in \Phi_{G,A}$, определенную следующим образом: $\tilde{\varphi}(x) = a_i$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x) = i$ $(i=\overline{1, n})$.

Теорема 1. Пусть $\varphi \in \Phi_G$. $\tilde{\varphi}$ будет минимальной по длине нумерацией графа G для произвольного множества A тогда и только тогда, когда $\varphi \in \Phi_G^n$.

Доказательство. По определению $\tilde{\varphi}$ $X_\varphi^{1,l} = X_{\tilde{\varphi}}^{1,l}$ $(l=\overline{1, n})$ и по лемме 1 $E_{\tilde{\varphi}}(G) = \sum_{l=1}^{n-1} (a_{l+1} - a_l)\omega_G(X_{\tilde{\varphi}}^{1,l})$. Пусть $\varphi \in \Phi_G^n$. Тогда $\omega_G(X_\varphi^{1,l}) = \omega_G(X_{\tilde{\varphi}}^{1,l}) = \omega_G^l$ и $\tilde{\varphi}$ является минимальной по длине нумерацией графа G.

Пусть $\varphi \bar{\in} \Phi_G^n$. Тогда существует $l \in \overline{1, n}$, что $\omega_G(X_\varphi^{1,l}) > \omega_G^l$. Возьмем

$$a_i = \begin{cases} i\,\varepsilon, & \text{если } i \leqslant l \\ 1 + (i - l - 1)\varepsilon, & \text{если } i > l \end{cases} \qquad (\varepsilon > 0)$$

и такую нумерацию $\psi \in \Phi_{G,A}$, что $\omega_G(X_\psi^{1,l}) = \omega_G^l$.

Число ε можно выбрать настолько близким к нулю, что $E_\psi(G)$ станет меньше $E_{\tilde{\varphi}}(G)$, т. е. $\tilde{\varphi}$ не будет минимальной по длине нумерацией графа G для построенного множества.

Теорема 1 доказана.

В [1, 2] фактически доказано, что единичный n-мерный куб и параллелепипед нормально нумеруемы, и описан класс их нормальных нумераций. В [7] описан класс минимальных по длине нумераций единичного n-мерного куба произвольным множеством. Последнее получается также из результатов, полученных в [1], и теоремы 1.

Далее будем рассматривать только нумерации из Φ_G.

Введем следующие обозначения:

$$W_\varphi(G) = \max_{l=\overline{1, n-1}} \omega_G(X_\varphi^{1,l}),$$

$$W(G) = \min_{\varphi \in \Phi_G} W_\varphi(G),$$

$$E(G)=\min_{\varphi\in\Phi_G} E_\varphi(G).$$

Число $E(G)$ называется длиной, а $W(G)$—шириной графа G. Нумерация φ_0 называется минимальной по ширине, если $W_{\varphi_0}(G)=W(G)$. Класс минимальных по длине (ширине) нумераций графа G обозначим через Φ_G^E (соответственно через Φ_G^W).

Нетрудно заметить, что если G нормально нумеруемый граф, то

$$\Phi_G^n=\Phi_G^E\subseteq\Phi_G^W.$$

Граф называется полным p-дольным, если существует такое разбиение множества его вершин—$X=\bigcup_{i=1}^{p} X_i$, что две вершины в графе смежны тогда и только тогда, когда они принадлежат различных X_i. Полный p-дольный граф обозначим через $K(Q)$, где $Q=(q_1, q_2, \cdots, q_p)$, а $q_i=|X_i|$ $(i=\overline{1, p})$. Через L_n^p обозначим класс попарно неизоморфных полных p-дольных графов на n вершинах.

Рассмотрим следующий алгоритм нумерации полных p-дольных графов. На первом этапе работы над $K(Q)\in L_n^p$ алгоритм строит последовательность $V(X)$ вершин. Если $X'\subset X$, то через $V(X')$ будем обозначать последовательность, построенную алгоритмом при работе над подграфом графа $K(Q)$, порожденным вершинами X' (ясно, что этот подграф также является полным p'-дольным, где $p'\leqslant p$). Для полного графа алгоритм строит произвольную последовательность его вершин. Работая над $K(Q)\in L_n^p$, где $p<n$, алгоритм находит все те множества X_i, которые имеют наибольшее число элементов, выбирает из них две произвольные непересекающиеся системы различных представителей S_1 и S_2 и строит последовательность $V(X)=V(S_1)$, $V(X\setminus\{S_1\cup S_2\})$, $V(S_2)$. На втором этапе работы, алгоритм строит нумерацию φ, соответствующую последовательности $V(X)$, т. е. i-ой вершине последовательности сопоставляет номер i. Множество всех нумераций, которые могут получиться этим алгоритмом, обозначим через $\Phi^*_{K(Q)}$. Ясно, что $\Phi^*_{K(Q)}\neq\neq\varnothing$. Так как для упорядочения p чисел требуется не более $cp\log_2 p$ операций, то сложность описанного алгоритма не превышает $c_1(n++p\log_2 p)$, где c и c_1—некоторые константы.

Теорема 2.

$$\Phi^n_{K(Q)}=\Phi^*_{K(Q)}.$$

Для доказательства этой теоремы введем некоторые обозначения и докажем две леммы.

Подграф графа G, порожденный множеством вершин $X_\varphi^{k+1,\, n-k}$ $\left(k=\overline{1, \left]\frac{n}{2}\right[-1}\right)$, обозначим через G^k, а его нумерацию, соответствующую последовательности вершин множества $X_\varphi^{k+1,\, n-k}$ при нумерации φ,—через φ^k. Заметим, что G^k и φ^k зависят от φ и $\varphi^k\in\Phi_{G^k}$.

Лемма 2. Пусть $G=K(Q)\in L_n^p$, $\varphi\in\Phi_G$ и $k=\overline{1,\ p}$. Если для любого $i=\overline{1,\ k}$ $|X_\varphi^{i,\ k}\cap X_i|=|X_\varphi^{n-k+1,\ n}\cap X_i|=1$, то

$$\omega_G(X_\varphi^{1,\ k})=\omega_G(X_\varphi^{1,\ n-k})=\sum_{i=1}^{k}(n-q_i-k+1),$$

$$\omega_G(X_\varphi^{1,\ l})=\omega_{G^k}(X_\varphi^{k+1,\ l})+\omega_G(X_\varphi^{1,\ k})\quad (l=\overline{k+1,\ n-k-1}).$$

Доказательство следует из того, что при условиях леммы вершина, принадлежащая $X_\varphi^{1,\ k}\cap X_i$, в множестве $X_\varphi^{k+1,\ n}$ имеет $n-q_i-k+1$ соседей, а каждая вершина из $X_\varphi^{k+1,\ n-k}$ имеет равное количество соседей в множествах $X_\varphi^{1,\ k}$ и $X_\varphi^{n-k+1,\ n}$.

Пусть $q_1=q_2=\ldots=q_d>q_{d+1}\geqslant\ldots\geqslant q_p$ и $V(X)=x_1,\ x_2,\ldots,x_n$—некоторая последовательность вершин графа $K(Q)$. Допустим, что x_m—вершина с наименьшим номером в последовательности $V(X)$, принадлежащая X_1. Пусть $x_{m-1}\in X_l$, и r_l—число вершин из X_l в последовательности $x_1,\ x_2,\ldots,x_{m-1}$. Построим последовательность $V'(X)$, полученную из $V(X)$ заменой мест вершин x_m с x_{m-1}, и рассмотрим нумерации φ и φ', соответствующие последовательностям $V(X)$ и $V'(X)$. Тогда очевидным образом выполняется следующая лемма.

Лемма 3.

$$\omega_{K(Q)}(X_\varphi^{1,\ i})-\varphi_{K(Q)}(X_\varphi^{1,\ i})=\begin{cases}0, & \text{если } i\neq m\\ q_l-q_1-2r_l+2, & \text{если } i=m,\end{cases}$$

а $q_l-q_1-2r'+2\leqslant 0$, и равенство имеет место тогда и только тогда, когда $q_l=q_1$ и $r_l=1$.

Доказательство следует из того, что вершина x_{m-1} имеет $m-r_l-1$ соседей из множества $X_\varphi^{1,\ m-2}$ и $n-q_l-m+r_l+1$ из множества $X_\varphi^{m,\ n}$, а вершина x_m имеет $m-1$ соседей из $X_\varphi^{1,\ m-1}$ и $n-q_1-m+1$ из $X_\varphi^{m+1,\ n}$.

Заметим, что лемма остается справедливой, если x_m—вершина с наименьшим номером в последовательности $V(X)$, принадлежащая множеству X_i, где $i=\overline{1,\ d}$.

Доказательство теоремы 2. Проведем его индукцией по n. Для малых n справедливость теоремы очевидна.

Пусть $q_1=q_2=\cdots=q_d>q_{d+1}\geqslant\cdots\geqslant q_p$, $G=K(Q)\in L_n^p$ и $\varphi\in\Phi_G^*$. Докажем, что $\varphi\in\Phi_G^n$. Не нарушая общности, можно предположить, что $\varphi^{-1}(1)$ и $\varphi^{-1}(n)$ принадлежат X_1. Это следует из определения алгоритма и леммы 3.

Из леммы 2 при $k=1$ имеем

$$\omega_G(X_\varphi^{1,\ i})=\omega_{G^1}(X_\varphi^{2,\ i})+n-q_1,\quad i=\overline{2,\ n-2},$$

Заметим, что $\varphi^1\in\Phi_{G^1}^*$. Так как по индуктивному предположению $\omega^{G^1}(X_\varphi^{2,\ i})=\omega_{G^1}^{i-1}$ при всех $i=\overline{2,\ n-2}$, то при всех $i=\overline{1,\ n-1}$ $\omega_G(X_\varphi^{1,\ i})=\omega_G^i$, т. е. $\varphi\in\Phi_G^n$.

Обратно, пусть $\varphi\in\Phi_G^n$. Тогда из леммы 3 следует, что начальные и конечные d вершин являются системами различных представителей множеств $X_1, \dots, X_d$, т. е. для любого $i=\overline{1, d}$, $|X_\varphi^{1, d} \cap X_i| = |X_\varphi^{n-d+1, n} \cap X_i| = 1$. Из нормальности нумерации φ и из леммы 2 следует, что $\omega_{G^d}(X_\varphi^{d+1, l}) = \omega_{G^d}^{l-d}$ при всех $l=\overline{d+1, n-d+1}$, т. е. φ^d является минимальной по длине нумерацией графа G^d. По индуктивному предположению $\varphi^d \in \Phi_{G^d}^*$. Следовательно, $\varphi \in \Phi_G^*$, и теорема доказана.

Следствие 1. $\omega_{K(Q)}^{\left[\frac{n}{2}\right]} = W(K(Q))$, $\Phi_{K(Q)}^* \subseteq \Phi_{K(Q)}^W$.

Описание класса $\Phi_{K(Q)}^W$ дается теоремой 3, которое мы приводим без доказательства.

Введем следующие обозначения:

$$a_i^\varphi = |X_i \cap X_\varphi^{1, \left[\frac{n}{2}\right]}|, \quad \bar{a}_i^\varphi = q_i - a_i^\varphi, \quad i = \overline{1, p}.$$

Теорема 3. $\varphi \in \Phi_{K(Q)}^W$ тогда и только тогда, когда φ удовлетворяет следующим условиям:

α) $|a_i^\varphi - \bar{a}_i^\varphi| \leqslant 1$, $i=\overline{1, p}$;

β) если n нечетное число и $\varphi^{-1}\left(\frac{n+1}{2}\right) \in X_c$, то $\bar{a}_c^\varphi > a_c^\varphi$;

γ) если n четное число и $\varphi^{-1}\left(\frac{n}{2}\right) \in X_k$, $\varphi^{-1}\left(\frac{n}{2}+1\right) \in X_h$, то $\bar{a}_k^\varphi \leqslant a_k^\varphi$ и $a_h^\varphi \leqslant \bar{a}_h^\varphi$.

Из пункта α) теоремы 3 следует, что либо $a_i^\varphi = \left[\frac{q_i}{2}\right]$, $\bar{a}_i^\varphi = \left]\frac{q_i}{2}\right[$, либо $a_i^\varphi = \left]\frac{q_i}{2}\right[$, $\bar{a}_i^\varphi = \left[\frac{q_i}{2}\right]$, где $i=\overline{1, p}$.

Но $\omega_{K(Q)}^{\left[\frac{n}{2}\right]} = \sum_{i=1}^p a_i^\varphi \left(\left]\frac{n}{2}\right[- \bar{a}_i^\varphi\right) = \left]\frac{n}{2}\right[\left[\frac{n}{2}\right] - \sum_{i=1}^p a_i^\varphi \bar{a}_i^\varphi = \left[\frac{n^2}{4}\right] - \sum_{i=1}^p \left[\frac{q_i^2}{4}\right]$,

откуда следует справедливость следующего утверждения.

Следствие 2. $W(K(Q)) = \left[\frac{n^2}{4}\right] - \sum_{i=1}^p \left[\frac{q_i^2}{4}\right]$.

Пусть $G = K(Q) \in L_n^p$; $q_1 \geqslant q_2 \geqslant \dots \geqslant q_p$, а $q_l \geqslant q_m + 2$ для пары индексов (l, m), где $1 \leqslant l < m \leqslant p$. Рассмотрим граф $G_1 = K(Q')$, где

$$q_i' = \begin{cases} q_i & i \neq l, m \\ q_l - 1 & i = l \\ q_m + 1 & i = m. \end{cases}$$

Скажем, что G_1 получается из G с помощью операции уравновешивания. Заметим, что G_1 зависит от l и m.

Теорема 4. Если G_1 получается из графа G с помощью операции уравновешивания, то

$$\omega_{G_1}^k \geqslant \omega_G^k \quad \text{для любого } k = \overline{1, n-1},$$

и хотя бы для одного k имеет место строгое неравенство.

Доказательство проведем индукцией по n. Для малых значений n справедливость теоремы очевидна.

1. $l>1$.

Рассмотрим такие $\varphi\in\Phi_G^*$ и $\psi\in\Phi_{G_1}^*$, что $\varphi^{-1}(1)$, $\varphi^{-1}(n)\in X_1$ и $\psi^{-1}(1)$, $\psi^{-1}(n)\in X_1'$. Из леммы 2 и теоремы 2 имеем

$$\omega_G^k=\omega_{G^1}^{k-1}+n-q_1,$$

$$\omega_{G_1}^k=\omega_{G_1^1}^{k-1}+n-q_1', \text{ где } k=\overline{2,n-2}.$$

Нетрудно проверить, что G_1^1 получается из G^1 операцией уравновешивания. По индуктивному предположению $\omega_{G_1^1}^{k-1}\geqslant\omega_{G^1}^{k-1}$, где $k=\overline{2,n-2}$ и хотя бы для одного k имеет место строгое неравенство. Так как $q_1'=q_1$, то $\omega_{G_1}^k\geqslant\omega_G^k$ для всех $k=\overline{1,n-1}$, и хотя бы для одного k имеет место строгое неравенство.

Справедливость теоремы в случаях $l=1$, $q_1=q_2$ и $l=1$, $q_1>q_2$, $q_1>q_m+3$ доказывается аналогично.

2. $l=1$, $q_1>q_2$, $q_1=q_m+3$.

Рассмотрев те же нумерации, что в случае 1, получим, что граф G^1 изоморфен графу G_1^1 и $n-q_1'=n-q_1+1$. Значит, $\omega_{G_1}^k=\omega_G^k+1$ для всех $k=\overline{1,n-1}$.

3. $l=1$, $q_1>q_2$, $q_1=q_m+2$.

Можно предположить, что $q_m>q_{m+1}$. Рассмотрим нумерации $\varphi\in\Phi_G^*$, $\psi\in\Phi_{G_1}^*$, для которых при всех $k=\overline{1,m}$

$$\varphi^{-1}(k),\ \varphi^{-1}(n-k+1)\in X_k,\quad \psi^{-1}(k),\ \psi^{-1}(n-k+1)\in X_k'.$$

Из определения q_i' и из леммы 2 получаем

$$\omega_G^k=\sum_{i=1}^{k}(n-q_i-k+1)=\begin{cases}\omega_{G_1}^k-1, & k<m\\ \omega_{G_1}^k, & k=m.\end{cases}$$

Из леммы 3 следует, что

$$\omega_G^k=\omega_{G^m}^{k-m}+\omega_G^m,\qquad \omega_{G_1}^k=\omega_{G_1^m}^{k-m}+\omega_{G_1}^m,$$

где $k=\overline{m+1,\ n-m-1}$.

Заметим, что G_1^m получается от G^m операцией уравновешивания. По индуктивному предположению

$$\omega_{G_1^m}^{k-m}\geqslant\omega_{G^m}^{k-m} \text{ при } k=\overline{m+1,\ n-m-1}.$$

Следовательно, при всех $k=\overline{1,\ n-1}$

$$\omega_G^k\leqslant\omega_{G_1}^k$$

и для $k=\overline{1,m-1}$ и $k=\overline{n-m+1.\ n}$ имеет место строгое неравенство.

Теорема доказана.

Граф $K(Q)\in L_n^p$ назовем уравновешенным, если $|q_i-q_j|\leqslant 1$ $(i,j=\overline{1,p})$. Через K_n^p обозначим уравновешенный граф из L_n^p.

Следствие 3. Для любого $K(Q)\in L_n^p\setminus\{K_n^p\}$

$$E(K(Q))<E(K_n^p).$$

Этот результат следует из теоремы 4, поскольку для любого $K(Q)\in L_n^p$ существует последовательность графов $K(Q)\cong G_1, \dots G_t\cong K_n^p$, где G_{i+1} получается из G_i применением операции уравновешивания.

Следствие 4. Для любого $K(Q)\in L_n^p$

$$W(K(Q))\leq W(K_n^p).$$

Лемма 4.

$$W(K_n^p)=\left[\frac{n^2}{4}\right]-k\left[\frac{\left]\frac{n}{p}\right[^2}{4}\right]-(p-k)\left[\frac{\left[\frac{n}{p}\right]^2}{4}\right],$$

$$E(K_n^p)=\frac{n}{6}(n^2-1)-\frac{1}{6p}(n-k)(n-k+p)(n+2k-p),$$

где $k=n-p\left[\frac{n}{p}\right]$.

Доказательство. Первое равенство получается из следствия 2. Для доказательства второго—предположим, что в графе K_n^p $q_1\geqslant q_2\geqslant\dots\geqslant q_p$. Рассмотрим нумерацию φ графа K_n^p, удовлетворяющую условию $\varphi^{-1}(r+1)\in X_{h+1}$, где $r=\overline{0, n-1}$, $h=r-p\left[\frac{r}{p}\right]$. Нетрудно заметить, что $\varphi\in\Phi^*_{K_n^p}$. Поскольку для любого n вершинного графа G и любой его нумерации ψ

$$E_\psi(G)=E_\psi(K_n)-E_\psi(\overline{G}) \quad \text{и} \quad E_\psi(K_n)=E(K_n)=\frac{n}{6}(n^2-1),$$

где K_n—полный граф, а $\overline{G}$—дополнение G, то

$$E(K_n^p)=E(K_n)-pkE(K_{]\frac{n}{p}[})-p(p-k)E(K_{[\frac{n}{p}]}).$$

Подставляя сюда значения $E(K_{[\frac{n}{p}]})$ и $E(K_{]\frac{n}{p}[})$, получим второе равенство.

Следствие 5. Если G—p-хроматический n-вершинный граф, то

$$E(G)\leqslant E(K_n^p), \quad W(G)\leqslant W(K_n^p).$$

Доказательство следует из того, что каждой минимальной p-раскраске графа G соответствует граф $K(Q)\in L_n^p$.

ВЦ АН Арм. ССР и ЕГУ *Поступила 23.04.1979*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Harper L. H.**, J. Soc. Indust. Appl. Math., 12, 1, 131-135, 1964.
2. **Lindsey J. H.**, Amer. Math. Monthly, 71, 5, 508-516, 1964.
3. **Гольдберг М. К., Клипкер И. А.**, Минимальные размещения деревьев на прямой, ФТИНТ АН УССР, Препринт, Харьков, 1976.
4. **Геолецян Г. Г.**, ДАН Арм. ССР, 56, 4, 203—206, 1973.
5. **Шейдвассер М. А.**, Сб. Проблемы кибернетики, вып. 29, 63—102, изд-во «Наука», М., 1974.
6. **Харари Ф.**, Теория графов, изд-во «Мир», М., 1973.
7. **Steiglitz K., Bernstein A. J.**, J. Soc. Indust. Appl. Math., 13, 2, 441-443, 1965.

Տ. Է. ՓԻԼԻՊՈՍՅԱՆ, Դ. Հ. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ

ԼՐԻՎ p-ՄԱՍՆՅԱ ԳՐԱՖԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ԼԱՅՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԳՏՆԵԼՈՒ ԽՆԴԻՐԸ

Ամփոփում

Տրվում է լրիվ p*-մասնյա գրաֆի ըստ երկարության մինիմալ համարակալումները գտնող ալգորիթմ, ինչպես նաև նկարագրվում է ըստ լայնության մինիմալ համարակալումների դասը։ Ապացուցվում է, որ լրիվ* p*-մասնյա գրաֆների դասում ամենամեծ երկարություն և լայնություն ունի հավասարակշռված լրիվ* p*-մասնյա գրաֆը։ Բերվում են կամայական գրաֆի երկարության և լայնության գնահատականներ։*