ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 1989 Естественные науки

Математика

С. К. АФЯН

СИСТЕМА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕКАНОНИЧЕСКОГО ВИДА. II

Рассматривается уравнение $Ay'+By=f(t)$, где A, B—постоянные квадратные матрицы, $y'=\frac{dy}{dt}$. Решение ищется в классе таких вектор-функций, компоненты которых вместе со своими производными растут на бесконечности не быстрее, чем некоторая степень t. Изучается случай, когда $\det A=0$. Получены необходимые и достаточные условия для разрешимости начальной и общей начальной задачи.

Рассматривается уравнение

$$Ay'+By=f(t),\ t\geqslant 0,$$

где $A=\|a_{ij}\|$, $B=\|b_{ij}\|$—постоянные матрицы порядка n, $f(t)=\|f_i(t)\|$—столбец заданных комплекснозначных функций, $y'=\frac{dy}{dt}$.

Многие краевые задачи для систем уравнений в частных производных приводятся к таким уравнениям, когда их решают методом преобразования Фурье, причем решения ищутся в таком классе M вектор-функций, компоненты которых вместе со своими производными растут на бесконечности не быстрее, чем некоторая степень t.

Случай $\det A\neq 0$ рассматривался многими авторами [1—4]. В этой работе изучается случай $\det A=0$.

1°. Рассмотрим однородную систему

$$Ay'+By=0. \tag{2.1}$$

Поскольку $\det A=0$, то легко видеть, что число корней характеристического уравнения

$$\det(A\lambda+B)=0 \tag{2.2}$$

меньше, чем n и $r=\operatorname{rang}A<n$. Без ограничения общности можно считать, что один из базисных миноров матрицы A находится в верхнем левом углу. Вычитая из каждого уравнения системы (2.1) с номерами $r+1, \ldots, n$ некоторые линейные комбинации первых r уравнений, превратим в нули члены, содержащие производные в этих уравнениях, т. е. приведем систему к виду

$$A_1y'+B_1y=0, \tag{2.3}$$

где

$$A_1=\left\|\begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1r}, a_{1r+1}, \ldots a_{1n} \\ a_{r1} \ldots a_{rr}, a_{rr+1}, \ldots a_{rn} \\ 0 \ldots 0\ 0 \ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 \ldots 0\ 0 \ldots 0 \end{matrix}\right\|, \qquad B_1=\|b_{ij}\|.$$

Рассмотрим алгебраическую систему, состоящую из последних уравнений системы (2.3):

$$\bar{B}_1 y=0. \tag{2.4}$$

1). Пусть $\det(A\lambda+B)\neq 0$. Если $\operatorname{rang}\bar{B}_1<n-r$, то уравнения системы (2.1) линейно зависимы. Тогда $\det(A\lambda+B)\equiv 0$, следовательно, $\operatorname{rang}\bar{B}_1=n-r$.

Без нарушения общности предположим, что некоторый базисный минор матрицы $\bar{B}_1$ находится в правой части. Решая систему (2.4) относительно $y_{r+1}, \ldots, y_n$ и подставляя в (2.3), получим систему вида

$$A_2 y'+B_2 y=0, \tag{2.5}$$

где

$$A_2=\left\|\begin{matrix} a_{11}^{(2)} \ldots a_{1r}^{(2)}\ 0 \ldots 0 \\ a_{r1}^{(2)} \ldots a_{rr}^{(2)}\ 0 \ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 \ldots 0\ 0 \ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 \ldots 0\ 0 \ldots 0 \end{matrix}\right\|, \quad B_2=\left\|\begin{matrix} b_{11}^{(2)} \ldots b_{1r}^{(2)}\ 0 \ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{r1}^{(2)} \ldots b_{rr}^{(2)}\ 0 \ldots 0 \\ b^{(2)}_{r+1,1} \ldots b^{(2)}_{r+1,r}\ b_{r+1,r+1} \ldots b^{(2)}_{r+n,n} \\ b_{n1}^{(2)} \ldots b_{nr}^{(2)}, b^{(2)}_{n,r+1}, \ldots b_{nn}^{(2)} \end{matrix}\right\|. \tag{2.6}$$

Систему, состоящую из первых r уравнений системы (2.5), приведем к каноническому виду

$$\tilde{y}^1=\tilde{D}\tilde{y} \quad (\tilde{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_r)). \tag{2.7}$$

Поскольку система (2.5) получена из системы (2.1) при помощи элементарных преобразований, то нетрудно убедиться, что характеристическое уравнение (2.2) эквивалентно уравнению

$$\det(\lambda\tilde{E}-\tilde{D})=0, \tag{2.8}$$

где $\tilde{E}$—единичная матрица порядка r.

В силу теоремы 1.2 для того чтобы решение $\tilde{y}(t)$ уравнения (2.7) принадлежало классу M, необходимо и достаточно, чтобы имело место условие

$$\tilde{E}+\tilde{y}(0)=0, \tag{2.9}$$

где

$$\tilde{E}^{+}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^{+}}(\lambda\tilde{E}-D)^{-1}d\lambda. \tag{2.10}$$

Таким образом справедлива

Теорема 2.1. Если $\det(A\lambda+B)\neq 0$, то начальная задача

$$Ay'+By=0,\ \tilde{y}(o)=\tilde{b}\ \ (\tilde{b}=(b_1, b_2, \ldots, b_r))$$

имеет решение в классе M и при том единственное тогда и только тогда, когда $\tilde{E}^{+}\tilde{b}=0$.

Следствие. Если $\det(A\lambda+B)\neq 0$, то однородное уравнение (2.1) имеет в классе M столько линейно независимых решений, сколько корней с неположительными действительными частями имеет характеристическое уравнение $\det(A\lambda+B)=0$.

2) Пусть $\det(A\lambda+B)\neq 0$. Докажем, что $\operatorname{rang}\tilde{B}_1<n-r$. Действительно, если $\operatorname{rang}\tilde{B}_1=n-r$, то в предположении, что базисные миноры матриц $\tilde{B}_1$ и A находятся соответственно для $\tilde{B}_1$ в правой части, а для A—в левом верхнем углу, имеем

$$0\equiv\det(A\lambda+B)\equiv\det(A_2\lambda+B_2)\equiv\beta_0\lambda^r+\beta_1\lambda^{r-1}+\ldots+\beta_r,$$

т. е. $\beta_0=0$, но

$$\beta_0=\begin{vmatrix} a_{11}^{(2)} & \ldots & a_{1r}^{(2)} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{r1}^{(2)} & \ldots & a_{rr}^{(2)} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b^{(2)}_{r+1,\ r+1} & \ldots & b^{(2)}_{r+1,\ n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ b^{(2)}_{n,\ r+1} & \ldots & b^{(2)}_{nn} \end{vmatrix}\neq 0.$$

Следовательно, $\operatorname{rang}\tilde{B}_1<n-r$. В этом случае после исключения неизвестных $y_{n-\rho+1}, \ldots, y_n$ в первых r уравнениях будут участвовать $n-\rho$ неизвестных функций, т. е. $y_{r+1}, \ldots, y_{n-\rho}$ останутся свободными. Поэтому справедлива

Теорема 2.2. Если $\det(A\lambda+B)\equiv 0$, то однородное уравнение $Ay'+By=0$ (а вместе с ним и начальная задача) имеет в классе бесчисленное множество линейно независимых решений.

2°. Исследование неоднородного уравнения

$$Ay'+By=f(t),\ \ f\in M. \tag{2.11}$$

1). Пусть $\det(A\lambda+B)\neq 0$. Поступая так же, как при доказательстве теорем 2.1, систему (2.11) сведем к системе вида

$$\tilde{y}'=\tilde{D}\tilde{y}+\tilde{g}(t), \tag{2.12}$$

где $\tilde{y}=(y_1, \ldots, y_r)$, $\tilde{g}(t)=(g_1(t), \ldots, g_r(t))$. Поэтому из формулы (1.25) следует, что верна

Теорема 2.3. Если $\det(A\lambda+B)\neq 0$, то система (2.11) $(f\in M)$ разрешима при любом $f\in A$ в классе M.

2). Пусть теперь $\det(A\lambda+B)\equiv 0$. После приведения системы (2.11) (как это было сделано в 1°) к виду

$$A_1y'+B_1y=f^{(1)}(t), \tag{2.13}$$

будем рассматривать последние $n-r$ уравнений (2.13):

$$\tilde{B}_1 y=\tilde{f}^{(1)}(t) \quad (\tilde{f}^{(1)}(t)=(f^{(1)}_{r+1}(t), \ldots, f_n^{(1)}(t)). \tag{2.14}$$

Поскольку в этом случае $\operatorname{rang}\tilde{B}_1<n-r$, то для разрешимости алгебраической системы (2.14) необходимо и достаточно, чтобы определенная линейная комбинация компонент $\tilde{f}^1(t)$ равнялась нулю для всех t. Таким образом будет справедлива

Теорема 2.4. Если $\det(A\lambda+B)\equiv 0$, то для разрешимости неоднородного уравнения (2.11) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось бесконечное число условий.

3°. Теперь рассмотрим общую начальную задачу

$$Ay'+By=f(t) \quad (f\in M), \tag{2.11}$$

$$Cy(0)=b, \tag{2.15}$$

где C—заданная постоянная матрица размеров $m\times n$, а b—заданный постоянный столбец.

Выясним, каким условиям должны удовлетворять матрицы C, f и b, чтобы задача (2.11)—(2.25) имела решение в классе M и оно было единственно.

1). Пусть $\det(A\lambda+B)\neq 0$. Так как в этом случае $\operatorname{rang}\tilde{B}_1=n-r$ (см. 2.14), то, разрешая (2.14) относительно неизвестных $y_{r+1}, \ldots, y_n$, подставляя их в (2.13) и в начальные условия (2.15), сведем данную задачу к задаче вида

$$\begin{cases} \tilde{y}'=\tilde{D}\tilde{y}+\tilde{g}(t), \\ \tilde{K}\tilde{y}(o)=\tilde{b} \quad (\tilde{b}=(b_1, b_2, \ldots, b_r)). \end{cases} \tag{2.16}$$

Применяя теорему 1.3 для задачи (2.16), убеждаемся, что справедлива

Теорема 2.5. Если $\det(A\lambda+B)\neq 0$, то для того чтобы общая начальная задача (2.11)—(2.15) имела решение (единственное решение) в классе M, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений

$$\tilde{E}^+d=-\int_0^{+\infty}\tilde{E}^+e^{-\tau\tilde{D}}\tilde{g}(\tau)\,d\tau,$$

$$\tilde{K}d=\tilde{b} \tag{2.17}$$

имела решение (единственное решение).

В частности, для однозначной разрешимости (2.11)—(2.15) необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}\tilde{E}^+ \\ \tilde{K}\end{pmatrix}=n. \tag{2.18}$$

2). В случае, когда $\det(A\lambda+B)\equiv 0$, $\operatorname{rang}\tilde{B}_1<n-r$ аналогично теореме 2.4 будет иметь место

Теорема 2.6. Если $\det(A\lambda+B)\equiv 0$, то для разрешимости общей начальной задачи (2.11)—(2.15) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось бесконечное число условий.

В заключение выражаю благодарность проф. Н. Е. Товмасяну за постановку задачи.

Кафедра высшей математики физ. факультета *Поступила 20.01.1988*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шилов Г. Е.** Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965.
2. **Дикополов Г. В., Шилов Г. Е.** О корректных краевых задачах для уравнения в частных производных в полупространстве.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1960, т. 24. с. 369—380.
3. **Паламодов В. П.** О корректных краевых задачах для уравнения в частных производных в полупространстве.—Изв. АН СССР, сер. матем., 1960, т. 24, с. 381—386.
4. **Павлов А. Л.** Об общих краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве.— Матем. сб., 1977, т. 103 (145), № 3 (7), с. 367—391.

Ամփոփում

Դիտարկվում է $Ay'+By=f(t)$ *հավասարումը, որտեղ* A, B-*ն հաստատուն քառակուսի մատրիցներ են։ Լուծումը փնտրվում է այն վեկտոր-ֆունկցիաների դասում, որոնց բաղադրիչները իրենց ածանցյալների հետ մեկտեղ անվերջում ավելի արագ չեն աճում, քան* t-*ի որևէ աստիճանը։ Ուսումնասիրվում է* $\det A=0$ *դեպքը։ Ստացված են անհրաժեշտ ու բավարար պայմաններ սկզբնական և ընդհանուր սկզբնական խնդիրների լուծելիության համար։*

SUMMARY

The equation $Ay^1+By^1=f(x)$, where A and B are square matrices has been considered. The solution has been sought in such a class of vector functions, the components of which with their derivatives increase in infinition not faster than any degree of t. The case $\det A\neq 0$ has been considered. The sufficient and necessary conditions of the solution-existence for initial and general initial problems have been obtained.