ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2005 Естественные науки

Математика

УДК 518.9

А. Г. МАТЕВОСЯН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА СБЛИЖЕНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ ЦЕЛЕВЫМИ МНОЖЕСТВАМИ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Рассматривается задача сближения с m целевыми множествами, когда движение системы описывается системой линейных стохастических дифференциальных уравнений. Построено стохастическое гипотетическое рассогласование. Получен стохастический дифференциал гипотетического рассогласования, который дает условие для определения экстремальных стратегий.

Рассмотрим стохастическую дифференциальную игру при m целевых множествах для линейных стохастических систем. Пусть движение конфликтно-управляемой системы описывается следующей системой стохастических дифференциальных уравнений:

$$dx(t)=A(t)x(t)dt+B(t)ud\xi(t,\omega)+C(t)vd\xi(t,\omega), \qquad (1)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ – $(n\times n)$-, $(n\times p)$-, $(n\times q)$-матрицы с измеримыми и ограниченными элементами при $t\in[t_0,\ T]$. Управления u и v стеснены включениями

$$u\in P\subset R^p,\ v\in Q\subset R^q, \qquad (2)$$

где P и Q – заданные компакты, характеризующие возможности игроков. $\xi=\xi(t,\omega)$ – случайный процесс, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega,\ B,\ P)$ и измеримый относительно B_t^Ω. $(\Omega,\ B,\ P)$ обозначает некоторое фиксированное вероятностное пространство: Ω – пространство элементарных событий; B – σ-алгебра подмножеств Ω; P – вероятность, определенная на B; B_t^Ω — неубывающее семейство борелевских σ-подалгебр B, т.е. при $t_1<t_2$ имеет место включение $B_{t_1}^\Omega\subset B_{t_2}^\Omega$. Пусть $\xi(t,\omega)$ является однородным процессом с независимыми приращениями и конечным моментом 2-го порядка, а моменты 1-го и 2-го порядка функции $\xi(t+h,\omega)-\xi(t,\omega)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$M\left|\xi(t+h,\omega)-\xi(t,\omega)\right|\le Ch,\ \ M\left|\left(\xi(t+h,\omega)-\xi(t,\omega)\right)\right|^2\le Ch,\, h>0, C=const. \quad (3)$$

Тогда случайное поле

$$\zeta(t,x,h,\omega)=A(t)xh+B(t)u\left(\xi(t+h,\omega)-\xi(t,\omega)\right)+C(t)v\left(\xi(t+h,\omega)-\xi(t,\omega)\right)$$

удовлетворяет условию квазидифференциальности, определенному в [1]. Обозначим через H_C пространство случайных процессов (случайных кривых) $x(t)=x(t,\omega)$, $t\in[t_*,\vartheta]$, $\omega\in\Omega$, со значениями в R^n, измеримых при каждом ω и среднеквадратически непрерывных на $[t_*,\vartheta]$, т.е. $M\left|x(t+h,\omega)-x(t,\omega)\right|^2\to 0$ при $h\to 0$, $t,t+h\in[t_*,\vartheta]$. При этих предположениях, согласно теореме существования и единственности [1], стохастическое дифференциальное уравнение (1) при любом начальном значении x имеет в H_C единственное решение.

Таким образом, случайное движение системы (1) можно трактовать как пучок реализаций $\left\{x\left(t_*,[\cdot],\vartheta,\omega\right),\quad \omega\in\Omega\right\}$. Каждая реализация $x\left(t_*,[\cdot],\vartheta,\omega\right)$ отвечает некоторому значению $\omega\in\Omega$.

Предположим, что заданы некоторые замкнутые и ограниченные множества M_k, $k\in I=(1,...,m)$, в евклидовом пространстве R^{n+1}. Пусть также заданы моменты времени $\{\vartheta_k\}$ такие, что $t_0\le\vartheta_1<...<\vartheta_m\le T$. Предположим, что проекция множества M_k на ось t содержит точку ϑ_k, т.е.

$$M_k\bigcap\left[(t,x):t=\vartheta_k, x\in R^n\right]=M_k(\vartheta_k)\ne\varnothing,\quad k\in I.$$

Пусть $M_k(\vartheta_k)$ – выпуклые, замкнутые и ограниченные множества в пространстве R^n.

Рассмотрим задачу сближения с множествами $M_k(\vartheta_k)$ в моменты ϑ_k. Согласно [2], решение системы (1) определяется следующей формулой:

$$x(t,\omega)=X[t,t_0]x(t_0)+\int_{t_0}^{t}X[t,\tau]B(\tau)ud\xi(\tau,\omega)+\int_{t_0}^{t}X[t,\tau]C(\tau)vd\xi(\tau,\omega), \quad (4)$$

где последние два интеграла следует понимать как стохастические интегралы по процессу $\xi(t,\omega)$, а $X[t,\tau]$ – нормированная фундаментальная матрица с абсолютно непрерывными элементами.

Имея в виду формулу решения (4), для уравнения (1) поставим следующую задачу.

Задача. Дана начальная позиция (t_*,x_*) и моменты времени ϑ_k. Требуется найти стратегию $U_0\div u_0(t,\omega)$, которая обеспечивает встречи $x[\vartheta_k,t_*,x_*,u_0,\omega]\in M_k(\vartheta_k)$, $k\in I$, почти наверно (п.н.) при любых действиях противника, стесненных вторым условием из (2).

Используя приведенные в [3], а также в [4–6] для m целевых множеств рассуждения для детерминированных линейных систем, можем построить гипотетическое рассогласование, которое в нашем случае будет стохастическим:

$$\varepsilon_0\left(t_*,x_*,x_1,\dots,x_{l-1},\{\vartheta_k\},\omega\right)=\max_{\|l\|\le 1}\left[\sum_{k=1}^{l-1}l_k'x_k+\sum_{k=1}^{l-1}\min_{-p_k\in M_k}l_k'p_k+\sum_{k=l}^{m}l_k'\bar{X}[\vartheta_k,t_*]x_*+\right.$$

$$+\int_{t_*}^{\vartheta_m}\min_{u\in P}\sum_{k=1}^{m}l_k'\bar{\bar{X}}[\vartheta_k,\tau]B(\tau)u\,d\xi(\tau,\omega)+\int_{t_*}^{\vartheta_m}\max_{v\in Q}\sum_{k=1}^{m}l_k'\bar{\bar{X}}[\vartheta_k,\tau]C(\tau)v\,d\xi(\tau,\omega)+ \qquad (5)$$

$$\left.+\sum_{k=l}^{m}\min_{-p_k\in M_k}l_k'p_k\right]$$

и $\varepsilon_0\left(t_*,x_*,x_1,\dots,x_{l-1},\{\vartheta_k\},\omega\right)=0$, если правая часть в (5) отрицательна [3–6].

Здесь $\{t_*,x_*\}$ – начальное положение системы (1), причем $t_*\in[\vartheta_{l-1},\vartheta_l)$, величины x_j, $j=1,\dots,l-1$, считаются постоянными, а матрицы $\bar{X}[t,\tau]$ и $\bar{\bar{X}}[t,\tau]$ определяются следующим образом:

$$\bar{X}[t,\tau]=\begin{cases}X[t,\tau], & t\ge\tau,\\ E, & t\le\tau;\end{cases}\qquad \bar{\bar{X}}[t,\tau]=\begin{cases}X[t,\tau], & t>\tau,\\ 0, & t\le\tau.\end{cases}$$

Из формулы (5) вытекает справедливость следующего утверждения.

Если $\varepsilon_0\left(t,x(t,\omega),\{\vartheta_k\},\omega\right)=0$ п.н. при $t\in[t_*,\vartheta_m]$, то для всех $k\in I$ $x(\vartheta_k,\omega)\in M_k$ п.н. [3–6].

Скажем, что задача регулярна, если максимум в правой части (5) достигается на единственном векторе $\{l_k^0\}$ для каждой фиксированной ω.

Вследствие единственности максимизирующего вектора $l^0=\{l_k^0\}$, он изменяется непрерывно с изменением позиции $\{t_*,x_*\}$, $t\in[\vartheta_{k-1},\vartheta_k)$, для каждой фиксированной ω [3].

Применим правило стохастического дифференцирования для гипотетического рассогласования.

Теорема 1. (Формула Ито. Правило стохастического дифференцирования). Пусть z – n-мерный вектор, который удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dz=f(z,t)dt+q(z,t)d\xi(t,\omega). \qquad (6)$$

Пусть функция $\varepsilon(z,t)$ непрерывно дифференцируема по t и дважды дифференцируема по z. Тогда $\varepsilon(z,t)$ также имеет стохастический дифференциал [1, 2, 7]

$$d\varepsilon=\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z_i}f_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial z_i\partial z_j}q_{ik}q_{jk}\right]dt+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z_i}(q\,d\xi)_i\,. \qquad (7)$$

В регулярном случае гипотетическое рассогласование $\varepsilon(\cdot)$ – непрерывная функция на каждом промежутке $(\vartheta_{k-1},\vartheta_k)$ и имеет следующий вид:

$$\varepsilon(\cdot)=\sum_{k=1}^{l-1} l_k'^0 x_k^0+\sum_{k=1}^{m}\min_{-p_k\in M_k} l_k'^0 p_k+\sum_{k=l}^{m} l_k'^0 \bar{X}[\vartheta_k,t]x+$$

$$+\int_t^{\vartheta_m}\min_{u\in P}\sum_{k=1}^{m} l_k'^0 \bar{\bar{X}}[\vartheta_k,\tau]B(\tau)u\,d\xi(\tau,\omega)+\int_t^{\vartheta_m}\max_{v\in Q}\sum_{k=1}^{m} l_k'^0 \bar{\bar{X}}[\vartheta_k,\tau]C(\tau)v\,d\xi(\tau,\omega) \tag{8}$$

Принимая

$$y=\int_t^{\vartheta_m}\min_{u\in P}\sum_{k=1}^{m} l_k'^0 \bar{\bar{X}}[\vartheta_k,\tau]B(\tau)u\,d\xi(\tau,\omega)+\int_t^{\vartheta_m}\max_{v\in Q}\sum_{k=1}^{m} l_k'^0 \bar{\bar{X}}[\vartheta_k,\tau]C(\tau)v\,d\xi(\tau,\omega), \tag{9}$$

получим

$$\varepsilon(\cdot)=\left[\sum_{k=1}^{l-1} l_k'^0 x_k^0+\sum_{k=1}^{m}\min_{-p_k\in M_k} l_k'^0 p_k+\sum_{k=l}^{m} l_k'^0 \bar{X}[\vartheta_k,t]x+y\right], \tag{10}$$

где x,y удовлетворяют следующим стохастическим дифференциальным уравнениям:

$$dx=A(t)x\,dt+\big(B(t)u+C(t)v\big)d\xi(t,\omega), \tag{11}$$

$$dy=-\left[\min_{u\in P}\sum_{k=1}^{m} l_k'^0 \bar{\bar{X}}[\vartheta_k,t]B(t)u+\max_{v\in Q}\sum_{k=1}^{m} l_k'^0 \bar{\bar{X}}[\vartheta_k,t]C(t)v\right]d\xi(t,\omega). \tag{12}$$

Обозначим $z=(x,y)$ и получим

$$\varepsilon(\cdot)=R_1+R_2 z, \tag{13}$$

где $\quad R_1=\sum_{k=1}^{l-1} l_k'^0 x_k^0+\sum_{k=1}^{m}\min_{-p_k\in M_k} l_k'^0 p_k, \quad R_2=\begin{pmatrix}\sum_{k=l}^{m} l_k'^0 \bar{X}[\vartheta_k,t]\\ 1\end{pmatrix}.$

Тогда $dz=A_1(t,z)dt+Q_1(t,z)d\xi(t,\omega)$, где $A_1(t,z)=\begin{pmatrix}A(t)x\\ 0\end{pmatrix}$,

$$Q_1(t,z)=\begin{pmatrix}B(t)u+C(t)v\\ -\left[\min_{u\in P}\sum_{k=1}^{m} l_k'^0 \bar{\bar{X}}[\vartheta_k,t]B(t)u+\max_{v\in Q}\sum_{k=1}^{m} l_k'^0 \bar{\bar{X}}[\vartheta_k,t]C(t)v\right]\end{pmatrix}.$$

В силу непрерывности l_k^0 от своих аргументов как в детерминированном случае,так и здесь игнорируем зависимость вектора l_k^0 от t при дифференцировании. Тогда

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=\frac{\partial R_2}{\partial t}z=\begin{pmatrix}-\sum_{k=l}^{m} l_k'^0 \bar{X}[\vartheta_k,t]A(t)\\ 0\end{pmatrix}z, \tag{14}$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}=R_2=\begin{pmatrix}\sum_{k=l}^{m} l_k'^0 \bar{X}[\vartheta_k,t]\\ 1\end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial z^2}=0. \tag{15}$$

В силу теоремы 1 на каждом промежутке $(\vartheta_{k-1},\vartheta_k)$ гипотетическое рассогласование имеет стохастический дифференциал

$$d\varepsilon = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} A_1(t,z)\right] dt + \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} Q_1(t,z) d\xi(t,\omega),$$

$$d\varepsilon = \left[\sum_{k=1}^{m} l_k'^0 \bar{\bar{X}}[\vartheta_k,t] B(t) u - \min_{u\in P} \sum_{k=1}^{m} l_k'^0 \bar{\bar{X}}[\vartheta_k,t] B(t) u\right] d\xi(t,\omega) + \qquad (16)$$

$$+ \left[\sum_{k=1}^{m} l_k'^0 \bar{\bar{X}}[\vartheta_k,t] C(t) v - \max_{v\in Q} \sum_{k=1}^{m} l_k'^0 \bar{\bar{X}}[\vartheta_k,t] C(t) v\right] d\xi(t,\omega).$$

В случае когда $\xi(t,\omega)$ – винеровский процесс, то $\xi(t,\omega)$ имеет необычный дифференциал $\left(\dfrac{d\xi(t,\omega)}{dt} = e(t,\omega)\right)$, который является белым шумом. В этом случае, когда первый игрок выбирает экстремальную стратегию из следующего условия

$$\sum_{k=1}^{m} l_k'^0 \bar{\bar{X}}[\vartheta_k,t] B(t) u^0 e(t,\omega) = \min_{u\in P} \sum_{k=1}^{m} l_k'^0 \bar{\bar{X}}[\vartheta_k,t] B(t) u e(t,\omega), \qquad (17)$$

то $\dfrac{d\varepsilon(\cdot)}{dt} < 0$ для каждой реализации траектории.

Теорема 2. Пусть для всех $t \in [t_0, \vartheta_m)$ ситуация для задачи регулярна. Тогда экстремальная стратегия $U_0 \div u_0(t,\omega)$, определяемая при $\varepsilon_0(t,x,\omega) > 0$ условием (17), где $l_k'^0(\cdot)$ – максимизирующий вектор из (5), а при $\varepsilon_0(t,x,\omega) = 0$ – любым допустимым управлением $u \in P$, обеспечит встречу всех движений $x(t,\vartheta_k,u_0,\omega)$ со всеми множествами M_k, $k \in I$, п.н., если только $\varepsilon_0(t_0, x_0\{\vartheta_k\}, \omega) = 0$ п.н.

Доказательство. Доказательство аналогичной теоремы в детерминированном случае основывается на том факте, что вдоль всякого решения существует производная гипотетического рассогласования и вдоль всякого решения гипотетическое рассогласование не возрастает [3–5]. В нашем случае стохастическое гипотетическое рассогласование имеет стохастический дифференциал, который не возрастает для каждой реализации траектории, что и при условий $\varepsilon_0(t_0, x_0\{\vartheta_k\}, \omega) = 0$ п.н. доказывает теорему 2.

Кафедра теоретической механики *Поступила 18.02.2005*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гихман И.И., Скороход А.В.** Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968, 353 с.
2. **Пугачев В.С., Синицын И.Н.** Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1985.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974, 445 с.

4. **Габриелян М.С.** – Известия АН Арм. ССР, Механика, 1985, т. 38, № 3, с. 55–65.
5. **Габриелян М.С., Субботин А.И.** – ПММ, 1979, т. 43, № 2, с. 204–208.
6. **Габриелян М.С., Матевосян А.Г.** – Ученые записки ЕГУ, 2003, № 1, с. 25–29.
7. **Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.** Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, 696 с.

Ա. Գ. ՄԱԹԵՎՈՍՅԱՆ

ՄԻ ՔԱՆԻ ՆՊԱՏԱԿԱՅԻՆ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԵՏ ՄՈՏԵՑՄԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԽԱՂ ՍՏՈԽԱՍՏԻԿ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Դիտարկված է m նպատակային բազմությունների հետ մոտեցման դիֆերենցիալ խաղ, երբ համակարգը նկարագրվում է ստոխաստիկ դիֆերենցիալ հավասարումներով: Կառուցված է ստոխաստիկ հիպոթետիկ անհամապատասխանության դիֆերենցիալը, որը տալիս է էքստրեմալ ստրատեգիաները որոշելու պայմաններ:

A. G. MATEVOSYAN

DIFFERENTIAL GAME OF RAPPROCHEMENT WITH SEVERAL TARGET SETS FOR STOCHASTIC LINEAR SYSTEMS

Summary

The problem of rapprochement with m target sets when movement of system is described by system of the linear stochastic differential equations is considered. The stochastic hypothetical mismatch is constructed. The stochastic differential of a hypothetical mismatch gives a condition for definition of extreme strategy.