ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 2005 Естественные науки

Математика

УДК 519.21

Х. Л. ВАРДАНЯН

О МОДЕЛИ ОЧЕРЕДИ С «ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ» ЗАПРОСАМИ

Рассмотрена модель $M_r/G_r/1/\infty$ очередей с относительными приоритетами и дополнительным потоком сигналов, которые либо уничтожают имеющиеся вызовы, либо при их отсутствии остаются в очереди.
Найдено стационарное распределение длин очередей.

Введение. С развитием информационных технологий и сети *Интернет* актуальными становятся механизмы организации обработки запросов пользователей и обеспечение качества их обслуживания. Важное значение приобретают соответствующие математические модели сетевых сервисов и систем – модели очередей [1–3]. В частности при анализе воздействий вирусов, атак, сбоев и отказов на сервисы и серверы в глобальной сети возникают модели очередей с «отрицательными» запросами – сигналами. Сигналы не накапливаются и не обслуживаются. Если в момент поступления сигнала регулярные запросы отсутствуют, то он теряется. В противном случае сигнал может преобразовать (объединять, перемещать, уничтожать) находящиеся в модели регулярные запросы.

Модели очередей с сигналами предложены Э. Джеленбе [4]. Модели типа $G/G/1$, $M/G/1$, $G/M/1$, $M/M/1$ с различными механизмами рассмотрены в [5–8]. Сетевым моделям очередей с сигналами (G-сетям) посвящены работы [3, 9, 10], обзор представлен в [11].

В настоящем сообщении исследуется длина очереди модели $M_r/G_r/1/\infty$ с относительными приоритетами и сигналами.

Модель. Рассматривается система $M_r/G_r/1/\infty$ с r независимыми пуассоновскими потоками запросов с интенсивностями $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Запросы разных потоков обслуживаются в соответствии с относительными приоритетами. Запросы i-го потока имеют более высокий приоритет, чем j-го, если $i<j$. Запросы одного потока обслуживаются по дисциплине FIFO (в порядке очереди). Длительности обслуживания запросов для i-го потока – независимые случайные величины (CB) B_i с функциями распределения (ФР) $B_i(x)=P(B_i<x)$ и плотностями $b_i(x)$, $i=\overline{1,r}$. В систему поступают также

сигналы, которые не накапливаются и не обслуживаются. Поток сигналов – пуассоновский с параметром ν. Если при поступлении сигнала система свободна, то он теряется. В противном случае сигнал уничтожает регулярные запросы.

Обозначения. Пусть $L(t)=\left(L_1(t),\, L_2(t),\dots,\, L_r(t)\right)$, где $L_i(t)$ – число запросов i-го потока (приоритета) в системе в момент t. Положим:

$\sigma=a_1+a_2+\dots+a_r, (a,z)=a_1z_1+a_2z_2+\dots+a_rz_r, (a,z)'=a_{i+1}z_{i+1}+a_{i+2}z_{i+2}+\dots+a_rz_r$;

$P(n,t)=P(L(t)=n)$ – вероятность нахождения $n=(n_1,n_2,\dots,n_r)$ запросов приоритетов $i=\overline{1,r}$ в системе в момент t;

$P(z,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n P(n,t),\ \ z=(z_1,z_2,\dots,z_r)$ – производящая функция от $P(n,t)$;

$$P(z)=\lim_{t\to\infty}P(z,t),\ z=(z_1,z_2,\dots,z_r);\ \eta_i(x)=b_i(x)(1-B_i(x))^{-1};\ \delta_{ij}=\begin{cases}1, & при\ i=j,\\ 0, & при\ i\neq j,\end{cases}$$

$$1_i=\Big(\underbrace{0,\dots,0}_{i-1},1,\underbrace{0,\dots,0}_{n-1}\Big);$$

$\overset{0}{B}_i(s)=\int\limits_0^{\infty}e^{-st}dB_i(x)$ – преобразование Лапласа–Стилтьеса (ПЛС) ФР $B_i(x),\ i=\overline{1,r}$.

Период занятости (ПЗ). Пусть $\overset{0}{\pi}_\nu(s),\bar{\pi}_\nu$ и $\overset{0}{\pi}(s),\bar{\pi}$ – ПЛС, среднее значение ПЗ модели с сигналами и без сигналов соответственно.

Лемма. ПЛС $\overset{0}{\pi}_\nu(s)$ и среднее значение $\bar{\pi}_\nu$ ПЗ рассматриваемой модели определяются соотношениями

$$\overset{0}{\pi}_\nu(s)=\frac{\nu+s\overset{0}{\pi}(s)}{\nu+s},\quad \bar{\pi}_\nu=\frac{1-\overset{0}{\pi}(\nu)}{\nu},\tag{1}$$

где, согласно [2], $\sigma\overset{0}{\pi}(s)=\sum\limits_{i=1}^{r}a_i\overset{0}{B}_i(s+\sigma-\sigma\overset{0}{\pi}(s))$.

Доказательство леммы проводится методом введения дополнительного события [2]. Среднее значение $\bar{\pi}_\nu$ ПЗ определяется из формулы

$$\bar{\pi}_\nu=\overset{0}{\pi}{}'_\nu(\theta)/_{\theta=0}=\frac{1-\overset{0}{\pi}(\nu)}{\nu}.\tag{2}$$

Период регенерации (ПР). Момент перехода системы в свободное состояние есть момент регенерации описывающего функционирование модели случайного процесса. ПР – промежуток времени между двумя соседними переходами системы в свободное состояние. Обозначим через $\tau_i(t)$ ФР i-го ПР, $i=1,2,\dots$. Последовательные ПР образуют процесс восстановления (ПВ). Из теории восстановления [2, 12] для ПЛС ФР $\tau_i(t)$ и среднего значения $\bar{\tau}_i$

ПР получим $\overset{0}{\tau}_i(s)=\overset{0}{\tau}(s)=\frac{\sigma}{\sigma+s}\overset{0}{\pi}_v(s)$, $i\ge 2$, $\overline{\tau}_1=\frac{1}{\sigma}$, $\overline{\tau}_i=\frac{1}{\sigma}+\frac{1-\overset{0}{\pi}}{v}$. Для ПЛС плотности такого ПВ имеем

$$\overset{0}{h}(s)=\frac{\overset{0}{\tau}_1(s)}{1-\overset{0}{\tau}(s)}=\frac{\sigma}{s+\sigma(1-\overset{0}{\pi}_v(s))},\ \text{где}\ \overset{0}{\tau}_1(s)=\frac{\sigma}{\sigma+s}.$$

Через $\overset{0}{P}_0(s)$ обозначим ПЛС вероятности того, что в момент t система свободна:

$$\overset{0}{P}_0(s)=\frac{1}{\sigma+s}+\frac{\overset{0}{\pi}_v(s)}{\sigma+s}\overset{0}{h}(s)=\frac{1}{s+\sigma-\sigma\overset{0}{\pi}_v(s)},$$

откуда для стационарной вероятности простоя системы P_0 имеем

$$P_0=\lim_{s\to 0}s\overset{0}{P}_0(s)=\frac{1}{1+\sigma E[\min\{\pi,V\}]}.$$

Здесь $E[\min\{\pi,V\}]$ – среднее от минимума двух СВ: π – ПЗ стандартной модели $M_r/G_r/1/\infty$ и V – интервал времени между двумя соседними сигналами. Откуда для P_0 получаем

$$P_0=\frac{1/\sigma}{1/\sigma+(1-\overset{0}{\pi}(v))/v}=\frac{v}{v+\sigma(1-\overset{0}{\pi}(v))}=\frac{1}{1+\alpha(1-\overset{0}{\pi}(v))},\tag{3}$$

где $\alpha=\sigma/v$.

Длина очереди. Рассмотрим случайный процесс $(L(t),x(t),i(t))$, где $x(t)$ – время, прошедшее до момента t с начала обслуживания находящегося в момент t на приборе запроса, если $L(t)\ne 0$, и $x(t)$=0, если $L(t)=0$; $i(t)$ – номер потока (приоритета), запрос которого обслуживается в момент t. Если в момент t система свободна, то полагаем $i(t)=0$.

Введенный процесс – марковский. По изменениям его состояний в интервале $(t,t+\Delta)$ можно составить уравнения для вероятностей $P_i(n,x,t)=P(L(t)=n,x(t)<x,i(t)=i)$. При стационарном режиме функционирования предполагаем, что существуют пределы

$$P_i(n,x)=\lim_{t\to\infty}P_i(n,x,t),\quad i=\overline{1,r},\quad n_i\ge 0, x\ge 0.$$

Теорема. При $|z_i|\le 1$, $i=\overline{1,r}$, производящая функция определяется по формуле

$$P(z)=P_0+\sum_{i=1}^{r}\frac{1-\overset{0}{B}_i(\sigma+v-(a,z))}{\sigma+v-(a,z)}P_i(z,+0),\tag{4}$$

где $P_i(z,+0)$ определяется из рекуррентных соотношений

$$\sum_{i=j+1}^{r}\left(1-z_i^{-1}\overset{0}{B}_i\left(\sigma+\nu-(a,z)^j\right)\right)P_i(z,+0)=\nu-(\sigma+\nu-(a,z)^j)P_0. \qquad (5)$$

Доказательство основано на методе введения дополнительной переменной [2, 12]. Стандартным способом составим уравнения для вероятностей $P_i(n,x)$:

$$\frac{d}{dx}P_i(n,x)=-[\sigma+\nu+\eta_i(x)]P_i(n,x)+\sum_{j\neq i}(1-\delta_{n_j,0})a_jP_i(n-1_j,x)+$$

$$+(1-\delta_{n_i,1})P_i(n-1_i,x), i=\overline{1,r},$$

$$\sigma P_0=\sum_{i=1}^{r}\int_0^\infty P_i(1_i,x)\eta_i(x)dx+\nu(1-P_0)\sum_{i=1}^{r}P_i(n,+0)=$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\int_0^\infty P_i(n+1_i,x)\eta_i(x)dx+\sum_{i=1}^{r}\prod_{j\neq i}\delta_{n_j,0}\delta_{n_i,1}a_iP_0.$$

Переходя к производящим функциям, будем иметь

$$\frac{d}{dx}P_i(z,x)=-[\sigma+\nu-(a,z)+\eta_i(x)]P_i(z,x), \qquad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{r}P_i(z,+0)=\sum_{i=1}^{r}z_i^{-1}\int_0^\infty P_i(z,x)\eta_i(x)dx+\nu-(\sigma+\nu-(a,z))P_0. \qquad (7)$$

Решение дифференциальных уравнений (6) записывается в виде $P_i(z,x)=\left[1-B_i(x)\right]\exp\{-(\sigma+\nu-(a,z))\}P_i(z,+0)$, что с учетом (7), дает

$$\sum_{i=1}^{r}P_i[1-z_i^{-1}\overset{0}{B}_i(\sigma+\nu-(a,z)]P_i(z,+0)=\nu-(\sigma+\nu-(a,z))P_0.$$

Так как величины $P_i(z,+0)$ не зависят от $z_1,z_2,\dots,z_{i-1}$, то их можно определить из (5), а P_0 – из (3). Теперь вывод (4) не представляет труда.

Кафедра теории вероятностей
и математической статистики

Поступила 22.10.2004

ЛИТЕРАТУРА

1. **Клейнрок Л.** Теория массового обслуживания.М.: Машиностроение, 1978, с. 432.
2. **Гнеденко Б.В., Даниелян Э.А.** и др. Приоритетные системы обслуживания. М.: МГУ, 1973, с. 448.
3. **Chao X., Miyazawa M.** Piendo m. Queuing Networks: customers, signals and product form solution. New York: Pergamon Press, 1999.
4. **Gelenbe E.** – Neural Computation, 1989, № 1, p. 502–510.
5. **Yang W.S., Chae K.C.** – J. Appl. Prob., 2001, v. 38, p. 1081–1085.
6. **Li Q.L.** and **Zhao Y.A.** – Queueing Systems, 2003, v. 37, p. 1–43.
7. **Chakka R., Harrison P.G.** – Acta Informatica, 2001, v. 37, p. 881–919.
8. **Dudin A.N., Karolik A.V.** – Performance Evalution, 2000, v. 895, p. 1–13.
9. **Kerobyan Kh.V., Tovmasyan A.S.** Multiplicativity and stability G-network. ITM, 2002, 2.
10. **Chao X.A.** – Oper. Res. Letters, 1995, v. 18, p. 75–79.

11. **Artalejo J.R.** – European Journal of Operational Research, 2000, v. 126, p. 233–249.
12. **Матвеев В.Ф. Ушаков В.Г.** Системы массового обслуживания. М.: МГУ, 1984, с. 240.

Խ. Լ. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

ԲԱՑԱՍԱԿԱՆ ՊԱՀԱՆՋԱՐԿՆԵՐՈՎ ՀԵՐԹԵՐԻ ՄԻ ՄՈԴԵԼԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է $M_r/G_r/1/\infty$ հերթերի մոդելը հարաբերական նախապատվությամբ հերթակարգով և ազդանշանների լրացուցիչ պուասոնյան հոսքով:

Առաջացող ազդանշանը ոչնչացնում է մոդելում գտնվող պահանջները: Գտնվում է հերթի երկարության ստացիոնար բաշխումը ծնորդ ֆունկցիաների տերմիններով:

Kh. L. VARDANYAN

ON THE QUEUEING MODEL WITH NEGATIVE CUSTOMERS

Summary

The queueing model $M_r/G_r/1/\infty$ with head – of-the-line priority discipline and with the additional Poisson stream of signals is considered. The arising signal destroys the customers being in model.

The stationary distribution of queue length for this model is of tained in terms of generating functions.