ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2,2000 Естественные науки

Математика

УДК 517.597

А.З. АРАКЕЛЯН, Э.А. ДАНИЕЛЯН

О МАКСИМУМЕ СУММ СЛУЧАЙНОГО ЧИСЛА НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность независимых случайных величин, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $\overline{S}_n = \max\limits_{1\le k\le n}|S_k|$, $n \ge 1$. Показано, что правильное изменение функции $N_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(|\xi_k| \ge t)$ на бесконечности, где P – знак вероятности, влечет предельные соотношения $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{P(\overline{S}_n \ge t)}{N_n(t)} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{P(|S_n| \ge t)}{N_n(t)} = 1$. Пусть $\nu>0$ – не зависящая от $\{\xi_n\}$ целочисленная случайная величина с конечным математическим ожиданием,

$$S_\nu = \xi_1 + \ldots + \xi_\nu, \quad \overline{S}_\nu = \max_{1\le n\le \nu}|S_n|.$$

Рассмотрим следующую *модель*. Пусть $\{\delta_n\}$ – последовательность положительных чисел, $\alpha \ge 0$, $L(t)$ медленно меняется на бесконечности,

$$\lim_{t\to+\infty} \left(P(|\xi_n| \ge t)/t^{-\alpha}L(t)\right) = \delta_n \ \textit{равномерно на}\ n \ge 1.$$

Обозначим $c_n=(\nu=n)$, $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\delta_n$, $n \ge 1$, $A = \sum\limits_{n\ge1} c_n \cdot A_n$

Доказано, что в рамках модели $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{P(\overline{S}_\nu \ge t)}{t^{-\alpha}L(t)} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{P(|S_\nu| \ge t)}{t^{-\alpha}L(t)} = A$.

В вышеприведенных условиях при существовании асимметрий у $P(\xi_n<x)$, $n \ge 1$, найдена асимметрия у $P(S_\nu<x)$.

1^0. Определение 1. Измеримая на $R^+=(0,+\infty)$ функция $L(t)>0$ медленно меняется на бесконечности (при $t\to+\infty$), если $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(L(x\cdot t)/L(t)\right)=1$ для любого $x>0$.

Функция на R^+ вида $t^\rho L(t)$, где $|\rho|<+\infty$, называется *правильно меняющейся* на бесконечности (при $t\to+\infty$) с *показателем* ρ.

Символ L обозначает медленно меняющуюся функцию.

Пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность независимых случайных величин,

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad \overline{S}_n = \max_{1\le k\le n}|S_k|.$$

При $t>0$ и $n \geq 1$ обозначим $N_n(t) = \sum_{k=1}^{n} P(|\xi_k| \geq t)$, где P – знак вероятности.

Лемма 1. Если $N_n(t)$ правильно меняется на бесконечности, то

$$P(\overline{S}_n \geq t) \approx P(|S_n| \geq t) \approx N_n(t), \ t \to +\infty. \tag{1}$$

Здесь $f(t) \approx g(t)$ означает, что $\lim\limits_{t \to +\infty} (f(t)/g(t)) = 1$.

При $t > 0$ и $n \geq 1$ обозначим

$$N_n^+(t) = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k \geq t), \quad N_n^-(t) = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k \leq -t).$$

Тогда $N_n(t) = N_n^+(t) + N_n^-(t)$.

Сформулируем *аналог леммы 1.*

1. Если $N_n^+(t)$ правильно меняется на бесконечности, то

$$P(S_n^+ \geq t) \approx P(S_n \geq t) \approx N_n^+(t), \ t \to +\infty. \tag{1$^+$}$$

2. Если $N_n^-(t)$ правильно меняется на бесконечности, то

$$P(S_n^- \geq t) \approx P(S_n \leq -t) \approx N_n^-(t), \ t \to +\infty. \tag{1$^-$}$$

Здесь обозначено $S_n^+ = \max\limits_{1 \leq k \leq n} S_k$, $S_n^- = \min\limits_{1 \leq k \leq n} S_k$, $n \geq 1$.

На второе асимптотическое равенство (1$^+$) при $n = 2$ в случае правильного изменения вероятностей $P(|\xi_k| \geq t)$, $k = \overline{1,n}$, на бесконечности с *одинаковым* показателем указал Феллер. Более того, при $n = 2$ и отсутствии ограничений на $P(|\xi_k| \geq t)$, $k = \overline{1,n}$, он показал, что

$$P(S_n \geq t) \succeq N_n^+(t), \ t \to +\infty \ \text{(см.[1], с.319-320)}. \tag{2}$$

Здесь $f(t) \succeq g(t)$, $t \to +\infty$, означает, что $\underline{\lim}_{t \to +\infty} (f(t)/g(t)) \geq 1$.

Индукцией (2) с $n = 2$ распространяется на произвольное $n \geq 2$.

Функция распределения G на R^1 имеет правый хвост $G^+(t) = 1 - G(t)$, левый хвост $G^-(t) = G(-t)$ и сумму хвостов $G^+(t) + G^-(t)$ при $t > 0$.

Смысл формулы (1$^+$) в том, что *вклад в правый хвост вероятности $P(S_n \geq t)$ при $t \to +\infty$ для суммы независимых случайных величин привносят лишь правые хвосты вероятностей $P(\xi_k \geq t)$, $k = \overline{1,n}$, от слагаемых, в частности в случае их правильного изменения на бесконечности.*

Отметим, что сумма конечного числа правильно меняющихся на бесконечности функций правильно меняется на бесконечности [2].

Аналогично интерпретируется формула (1$^-$).

Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ одинаково распределены, то из (1$^+$) следует

$$P(S_n \geq t) \approx n \cdot P(\xi_1 \geq t), \ t \to +\infty, \tag{3}$$

а правильное изменение $P(\xi_1 \geq t)$ равносильно правильному изменению $P(S_n \geq t)$ на бесконечности в этом случае.

Асимптотические равенства (3) допускают следующее *обобщение.*

Если $\nu > 0$ *– не зависящая от* $\{\xi_n\}$ *целочисленная случайная величина,* $S_\nu = \xi_1 + \ldots + \xi_\nu$, $M\nu < +\infty$ *(M — знак математического ожидания) и* $P(\xi_1 \geq t)$ *правильно меняется на бесконечности, то (см.[1], зад.31, с.330, гл.8).*

$$P(S_\nu \geq t) \approx M\nu \cdot P(\xi_1 \geq t),\ t \to +\infty. \qquad (3')$$

Соотношение (3′) сохраняется и при некоторых видах зависимости случайных величин ξ_i и ν (см., например, [3-4]).

При $M\nu < +\infty$ и правильном изменении $P(|\xi_1| \geq t)$ на бесконечности верен "двухсторонний" аналог (3′): $P(|S_\nu| \geq t) \approx M\nu \cdot P(|\xi_1| \geq t)$, $t \to +\infty$.

Результаты мы обобщим для одной *модели*, используемой при анализе "больших уклонений" сумм независимых случайных величин (см., например, [3–4]).

2^0. Пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность независимых случайных величин, $\nu > 0$ – не зависящая от $\{\xi_n\}$ целочисленная случайная величина,

$$S_\nu = \xi_1 + \ldots + \xi_\nu, \quad \overline{S}_\nu = \max_{1 \leq n \leq \nu} |S_n|.$$

Модель. Пусть $\{\delta_n\}$ – последовательность положительных чисел, $\alpha \geq 0$. $L(t)$ медленно меняется на бесконечности,

$$P(|\xi_n| \geq t) \approx \delta_n \cdot t^{-\alpha} L(t),\ t \to +\infty,\ \textit{равномерно по } n \geq 1 \text{ (сравни с [5,6])}. \qquad (4)$$

Обозначим

$$c_n = P(\nu = n), \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} \delta_n, \quad n \geq 1, \quad A = \sum_{n \geq 1} c_n \cdot A_n.$$

Теорема 1. Если $M\nu < +\infty$, *то для модели существуют пределы*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{P(\overline{S}_\nu \geq t)}{t^{-\alpha} L(t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{P(|S_\nu| \geq t)}{t^{-\alpha} L(t)} = A. \qquad (5)$$

При $A = +\infty$ *условие* $M\nu < +\infty$ *можно опустить.*

Действительно, по формуле полной вероятности,

$$P(|S_\nu| \geq t) = \sum_{n \geq 1} c_n \cdot P(|S_n| \geq t) \geq \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot P(|S_k| \geq t) \text{ при } t > 0 \text{ и } n \geq 1. \qquad (6)$$

В силу леммы 1 и (4)

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot P(|S_k| \geq t) \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot c_k \cdot t^{-\alpha} L(t), \quad t \to +\infty,$$

т.е., согласно (6),

$$\underline{\lim}_{t \to +\infty} \left(P(|S_\nu| \geq t) / t^{-\alpha} L(t)\right) \geq \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot c_k \text{ при всех } n \geq 1.$$

Устремляя $n \to +\infty$ и учитывая неравенство $P(\overline{S}_\nu \geq t) \geq P(|S_\nu| \geq t)$, $t > 0$, выводим утверждение при $A = +\infty$. ▷

$A<+\infty$, и $\underline{\delta}=\inf\limits_{n\geq 1}\delta_n>0$ – *пример*, при котором верно (5). Действительно,

$$0<\underline{\delta}\cdot Mv=\sum_{n\geq 1}n\cdot c_n\cdot\underline{\delta}=\sum_{n\geq 1}c_n(\delta_1+\ldots+\delta_n)=\sum_{n\geq 1}c_n\cdot A_n=A<+\infty$$

и применима теорема1. ▷

Сформулируем "односторонние" *аналоги теоремы1*. Если в модели

$$P(\xi_n\geq t)\approx\delta_n\cdot t^{-\alpha}L(t),\ t\to+\infty,\ \textit{равномерно}\text{ по }n\geq 1$$

или

$$P(\xi_n\leq -t)\approx\delta_n\cdot t^{-\alpha}L(t),\ t\to+\infty,\ \textit{равномерно}\text{ по }n\geq 1,$$

то при $Mv<+\infty$ в (5) $\overline{S}_v$ и $|S_v|$ следует заменить на $S_v^+=\max\limits_{1\leq n\leq v}S_n$ и S_v, или на $S_v^-=\min\limits_{1\leq n\leq v}S_n$ и S_v соответственно.

Замечание 1. В модели можно δ_n, $n\geq 1$ брать неотрицательными, но предположить, что A>0. При $\delta_n=0$ вместо (4) пишем $P(|\xi_n|\geq t)=o\left(t^{-\alpha}L(t)\right)$. Тогда сохраняется утверждение теоремы 1. ▷

Обозначим $C(t)=\sum\limits_{n\geq 1}c_n\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}P\left(|S_k|\geq t\right),\ t>0$. Очевидно, что для модели

$$C(t)\approx A\cdot t^{-\alpha}L(t),\ t\to+\infty. \qquad (7)$$

Идея доказательства теоремы 1 заключается в следующем. Устанавливаются асимптотические неравенства

$$C(t)\preceq P\left(|S_v|\geq t\right),\ t\to+\infty, \qquad (8)$$

и

$$P\left(\overline{S}_v\geq t\right)\succeq C(t),\ t\to+\infty. \qquad (9)$$

Так как $P\left(\overline{S}_v\geq t\right)\geq P\left(|S_v|\geq t\right)$, то из (7)–(9) следует теорема1. ▷

Асимптотическое неравенство (8) получается аналогично утверждению выше в случае $A=+\infty$ и не используется условие $Mv<+\infty$.

Условие $Mv<+\infty$ является *ограничением нашего метода доказательства* асимптотического неравенства (9). ▷

Напомним, что функция распределения G на R^1 имеет *асимметрию* β, если существует предел [1]:

$$\beta=\lim_{t\to+\infty}\frac{G^+(t)-G^-(t)}{G^+(t)+G^-(t)} \qquad (\text{тогда } -1\leq\beta\leq 1).$$

Теорема 2. Если в условиях теоремы 1 с $A<+\infty$ функции распределения $P(\xi_n<x)$, $n\geq 1$, имеют асимметрии β_n, то в модели у $P(S_v<x)$ существует асимметрия

$$\beta=A^{-1}\sum_{n\geq 1}c_n\cdot B_n, \qquad (10)$$

где $B_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k\cdot\delta_k$, $n\geq 1$. ▷

Результаты параграфа доказаны в приложении.

3^0. Результат леммы 1 дает основание для общих постановок задач.

По формуле полной вероятности,

$$P(\overline{S}_\nu \ge t) = \sum_{n\ge 1} c_n \cdot P(\overline{S}_n \ge t)\,, t>0\,. \qquad (6')$$

Формальная подстановка асимптотических равенств (1) в (6) и (6′) дает

$$P(\overline{S}_\nu \ge t) \approx P(|S_\nu| \ge t) \approx C(t)\,, \quad t\to+\infty. \qquad (11)$$

Возникает следующая ***задача: найти условия, при которых справедливы асимптотические равенства (11).***

Выше формулировка результатов по *задаче* дана в случае нашей *модели.*

Сделаем несколько общих *замечаний.*

Замечание 2. Сходимость ряда $C(t)$ при больших $t>0$ ***необходима*** для справедливости (11). Она равносильна существованию предела $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)=0$.

Действительно, из $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)=0$ следует сходимость ряда $C(t)$ при больших $t>0$. Обратно, по признаку Вейерштрасса [7], с.427, ряд $C(t)$ в области сходимости сходится *равномерно,* а из теоремы 4 [7] (с.434) следует $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)=0$.

Замечание 3. Необходимое условие в замечании 2 согласуется с равенствами $P(\overline{S}_\nu = +\infty) = P(|S_\nu| = +\infty) = 0$. Покажем, что эти равенства выполнены. Действительно, из доказательства леммы 1 (см.прилож.) имеем $P(|S_n| = +\infty)=0$ при всех $n\ge 1$.

Далее (см. [8], зад.19, с.95, гл.3),

$$P(S_n^+ \ge t) = 1 - P(S_k < t,\ k=\overline{1,n}) \le 1 - \prod_{k=1}^{n} P(S_k<t) \text{ при } t>0 \text{ и } n\ge 1,$$

откуда следует $P(S_n^+ = +\infty)=0,\ n\ge 1$. Аналогично $P(S_n^- = -\infty)=0,\ n\ge 1$.

Следовательно, $P(\overline{S}_n = +\infty)=0$ при всех $n\ge 1$. Теперь из (6) и (6′) следует утверждение.

Замечание 4. Отказ от правильного изменения $P(|\xi_n| \ge t)$, $n\ge 1$, на бесконечности может привести к нарушению асимптотических равенств (13).

Пример 1. Пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин,

$$P(\xi_n < x) = \begin{cases} 1-\exp(-x), & x\ge 0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases} \quad n\ge 1,$$

а $\{c_n\}$ – пуассоновское распределение с параметром 1. Тогда

$$P(S_\nu \ge t) \approx e^{-1}\cdot C(t),\ t>0.\triangleright$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем *лемму 1.*

Полагая $0<\delta<1/2$, $\lambda=(1-\delta)^n$, $t>0$, к $P(S_n\ge t)$ последовательно применяем верхнюю оценку из [1], с.320.

$$P(S_n \ge t) \le \sum_{k=1}^{n} P\left(\xi_k \ge (1-\delta)^{n-k+1}\cdot t\right) + \sum_{k=2}^{n} P\left(\xi_k \ge \delta\cdot(1-\delta)^{n-k+2}\cdot t\right)\times$$

$$\times P\left(S_{k-1} \geq \delta \cdot (1-\delta)^{n-k+2} \cdot t\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k \geq \lambda \cdot t) +$$

$$+ \{\max_{1 \leq k \leq n} P(S_k \geq \delta \cdot \lambda \cdot t)\} \cdot N_n(\delta \cdot \lambda \cdot t).$$

Записав эту оценку для последовательности $\{-\xi_n\}$ и сложив с первоначальной, получаем

$$P\left(|S_n| \geq t\right) \leq N_n(\lambda \cdot t) + \{\max_{1 \leq k \leq n} P(S_k \geq \delta \cdot \lambda \cdot t)\} \cdot N_n(\delta \cdot \lambda \cdot t), \quad t>0.$$

Фиксируем δ и n. Тогда $\lim\limits_{t \to +\infty} \{\max\limits_{1 \leq k \leq n} P(S_k \geq \delta \cdot \lambda \cdot t)\} = 0$.

Если $N_n(t)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $(-\alpha) \leq 0$, то

$$N_n(xt) \approx x^{-\alpha} N_n(t),\ t \to +\infty, \text{ для любого } x > 0. \qquad (\text{П.1})$$

Следовательно,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\{\max\limits_{1 \leq k \leq n} P(|S_k| \geq \delta \cdot \lambda \cdot t)\} \cdot N_n(\delta \cdot \lambda \cdot t)}{N_n(\lambda \cdot t)} = 0,$$

откуда следует $P\left(|S_n| \geq t\right) \preceq N_n(\lambda \cdot t)$, $t \to +\infty$. Из этого асимптотического неравенства и (П.1), устремляя $\delta \downarrow 0$, получаем верхнюю оценку

$$P\left(|S_n| \geq t\right) \preceq N_n(t), \quad t \to +\infty. \qquad (\text{П.2})$$

Записав нижнюю оценку (2) для последовательности $\{-\xi_n\}$ независимых случайных величин и сложив с оценкой (2), получаем следующую нижнюю оценку:

$$P\left(|S_n| \geq t\right) \succeq N_n(t), \quad t \to +\infty. \qquad (\text{П.3})$$

Оценки (11.2), (11.3) доказывают второе асимптотическое равенство (1).

В случае последовательности $\{|\xi_n|\}$ независимых случайных величин из второго асимптотического равенства (1) имеем

$$P\left(\overline{S}_n \geq t\right) \leq \left(\max_{1 \leq k \leq n} \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \geq t\right) = P\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \geq t\right) \approx N_n(t), \quad t \to +\infty$$

(первые два соотношения справедливы при любом $t>0$).

Здесь учтено, что функции распределения $P(\xi_k < x)$ и $P(|\xi_k| < x)$ при каждом k имеют одинаковые суммы хвостов. Следовательно,

$$P\left(\overline{S}_n \geq t\right) \preceq N_n(t), \quad t \to +\infty. \qquad (\text{П.4})$$

Так как $P\left(\overline{S}_n \geq t\right) \leq P\left(|S_n| \geq t\right)$, $t>0$, то из второго асимптотического равенства (1) следует оценка

$$P\left(\overline{S}_n \geq t\right) \succeq N_n(t), \quad t \to +\infty. \qquad (\text{П.5})$$

Асимптотические неравенства (П.4), (П.5) завершают доказательство леммы 1. ▷

Аналог леммы 1 доказывается аналогично лемме 1. Отметим лишь, что в выводе (1^+) используется последовательность $\{\max(0,\xi_n)\}$ независимых случайных величин вместо $\{|\xi_n|\}$. При этом учитываем, что функции распределения $P(\xi_k < x)$ и $P(\max(0,\xi_k)<x)$ при каждом k имеют одинаковый правый хвост.

Асимптотические равенства (1^-) следуют из (1^+) рассмотрением вместо $\{\xi_n\}$ последовательности $\{-\xi_n\}$. ▷

Метод доказательства *леммы 1* проходит и при доказательстве следующего ее аналога.

Лемма 1. Если* $N_n(t) \preceq t^{-\alpha} \cdot L(t)$, $t \to +\infty$, *где* $\alpha \geq 0$, *то*

$$P(\overline{S}_n \geq t) \preceq t^{-\alpha} \cdot L(t), \quad t \to +\infty. \tag{П.6}$$

Замечание 5. Пусть $P(|\xi_k| \geq t) \preceq t^{-\alpha_k} \cdot L_k(t)$, $t \to +\infty$, $k = \overline{1,n}$. Известно, что сумма конечного числа правильно меняющихся на бесконечности функций правильно меняется на бесконечности. Следовательно, существуют $\alpha \geq 0$ и $L(t)$, такие, что

$$\sum_{k=1}^{n} t^{-\alpha_k} \cdot L_k(t) \approx t^{-\alpha} \cdot L(t), \quad t \to +\infty.$$

Тогда $N_n(t) \preceq t^{-\alpha} \cdot L(t)$, $t \to +\infty$. При этих предположениях асимптотическое неравенство (П.6) доказывается очень просто. Действительно, при $n=2$ из неравенства (см.[1], с.320)

$$P(S_2 \geq t) \leq P(\xi_1 \geq (1-\delta)t) + P(\xi_2 \geq (1-\delta)t) + P(\xi_1 \geq \delta \cdot t)P(\xi_2 \geq \delta \cdot t), \; t > 0,$$

где $0 < \delta < 1/2$, следует неравенство для модулей

$$P(|S_2| \leq t) \leq P(|\xi_1| \geq (1-\delta)t) + P(|\xi_2| \geq (1-\delta)t) + P(|\xi_1| \geq \delta \cdot t)P(|\xi_2| \geq \delta \cdot t) \preceq$$

$$\preceq t^{-\alpha_1} L_1(t) \cdot (1-\delta)^{-\alpha_1} + t^{-\alpha_2} L_2(t) \cdot (1-\delta)^{-\alpha_2} \preceq$$

$$\preceq (1-\delta)^{-\min(\alpha_1, \alpha_2)} t^{-\alpha} L(t), \quad t \to +\infty.$$

Устремляя $\delta \downarrow 0$, получаем $P(|S_2| \geq t) \preceq t^{-\alpha} \cdot L(t)$, $t \to +\infty$.

Осталось использовать вывод верхней оценки (11.4), что дает (11.6) при $n = 2$. Индукцией утверждение распространяется с $n = 2$ на произвольное $n \geq 2$. ▷

Доказательство *теоремы 1* заключается в получении при $A < +\infty$ оценок (8) и (9). (Случай $A = +\infty$ рассмотрен выше). Его мы разобьем на *леммы 2, 3, 4.*

Предварительно отметим, что если $P(\nu \leq k < +\infty)$ при некотором $k < 1$, то *теорема 1* есть очевидное следствие *леммы 1*. Поэтому в дальнейшем считаем, что

$$c_{>n} \overset{def}{=} \sum_{k>n} c_k > 0 \text{ при всех } n \geq 1.$$

Лемма 2. Если $A < +\infty$, *то в предположениях модели справедливо асимптотическое неравенство (8).*

Доказательство. По $\varepsilon \in (0,1)$ выберем $n_0 > 1$ такое, что $\sum_{n=1}^{n_0} c_n A_n \geq A \cdot \sqrt{1-\varepsilon}$. По лемме 1,

$$\sum_{n=1}^{n_0} c_n P(|S_n| \geq t) \approx \sum_{n=1}^{n_0} c_k \sum_{k=1}^{n} P(|\xi_k| \geq t) \overset{def}{=} f_{n_0}(t), \quad t \to +\infty, \tag{П.7}$$

так как вероятности $P(|\xi_k|\geq t)$, $k\geq 1$, в силу (4) правильно меняются на бесконечности (тогда правая часть (П.7), т.е. $f_{n_0}(t)$, правильно меняется на бесконечности).

При данных ε и n_0 согласно (4) и (11.7) выберем $t_0>0$ такое, что

$$\sum_{n=1}^{n_0} c_n P(|S_n|\geq t)\geq g_{n_0}\cdot\sqrt{1-\varepsilon}\cdot t^{-\alpha}L(t) \text{ для всех } t>t_0,$$

где обозначено $g_{n_0}=\sum_{n=1}^{n_0} c_n A_n$. При $t\geq t_0$ из (5) и вышеприведенных неравенств имеем

$$P(|S_\nu|\geq t)\geq g_{n_0}\cdot\sqrt{1-\varepsilon}\cdot t^{-\alpha}L(t)\geq A\cdot(1-\varepsilon)t^{-\alpha}L(t).$$

Следовательно, $\underline{\lim}_{t\to+\infty}(P(|S_\nu|\geq t)/t^{-\alpha}L(t))\geq A\cdot(1-\varepsilon)$, откуда, устремляя $\varepsilon\downarrow 0$, получаем (8). ▷

Обозначим $\eta_n=|\xi_n|$, $n\geq 1$, $s_\nu=\eta_1+\ldots+\eta_\nu$.

Лемма 3. Если $M\nu<+\infty$ и $A<+\infty$, то в предположениях модели

$$P(s_\nu\geq t)\preceq 2\cdot A\cdot t^{-\alpha}L(t),\ t\to+\infty. \qquad (\text{П.8})$$

Доказательство. Пусть для $t>0$ и $n\geq 1$: $(\eta_n)_t=\eta_n$ при $\eta_n<t$ и $(\eta_n)_t=0$ при $\eta_n\geq t$; $s_n=\eta_1+\ldots+\eta_n$, $s_n(t)=(\eta_1)_t+\ldots+(\eta_n)_t$, $s_\nu(t)=(\eta_1)_t+\ldots+(\eta_\nu)_t$.

При $t>0$, $k\geq 1$, $\beta\geq\alpha$ интегрируя по частям, получаем

$$0<M(\eta_k)_t^\beta=\int_0^t x^\beta dP(\eta_k<x)=-t^\beta\cdot P(\eta_k\geq t)+\beta\cdot\int_0^t x^{\beta-1}P(\eta_k\geq x)dx<$$

$$<\beta\cdot\int_0^t x^{\beta-1}P(\eta_k\geq x)dx,$$

где строгое неравенство вызвано правильным изменением $P(\eta_k\geq t)$ на бесконечности (что, впрочем, несущественно).

По $\varepsilon\in(0,1)$ выберем $t_0>0$ так, чтобы при $t\geq t_0$ согласно (4) выполнялись неравенства

$$P(\eta_k\geq t)\leq\delta_k(1+\varepsilon)\cdot t^{-\alpha}L(t),\quad k\geq 1. \qquad (\text{П.9})$$

С учетом (П.9), при $t>t_0$ имеем

$$\sum_{n\geq 1}c_n\cdot\sum_{k=1}^n M(\eta_k)_t^\beta<\beta\cdot\sum_{n\geq 1}c_n\cdot\left(\int_0^{t_0}+\int_{t_0}^t\right)x^{\beta-1}P(\eta_k\geq x)dx\leq$$

$$\leq\beta\cdot t_0^{\beta-1}\cdot M\nu+\beta(1+\varepsilon)\cdot A\cdot\int_{t_0}^t x^{\beta-\alpha-1}L(x)dx.$$

В силу теоремы 2.1 [2], (с.54–55, гл.2) имеем

$$\int_{t_0}^t x^{\beta-\alpha-1}L(x)dx\approx\frac{t^{\beta-\alpha}}{\beta-\alpha}L(t),\qquad t\to+\infty.$$

Следовательно, учитывая неравенство $\beta>\alpha$, получаем

$$t^{-\beta}\cdot\sum_{n\geq 1}c_n\cdot\sum_{k=1}^n M(\eta_k)_t^\beta\preceq\frac{\beta\cdot A}{\beta-\alpha}(1+\varepsilon)t^{-\alpha}L(t),\ t\to+\infty. \qquad (\text{П.10})$$

Устремляя $\varepsilon\downarrow 0$, выводим

$$t^{-\beta}\cdot\sum_{n\ge1}c_n\cdot\sum_{k=1}^{n}M(\eta_k)_t^{\beta}\preceq\frac{\beta\cdot A}{\beta-\alpha}t^{-\alpha}L(t)\,,\quad t\to+\infty.$$

Далее, по неравенству Чебышева, для любого $t>0$

$$P(s_\nu(t)\ge t)=\sum_{n\ge1}c_nP(s_n(t)\ge t)\le t^{-\beta}\cdot\sum_{n\ge1}c_n\cdot\sum_{k=1}^{n}M(\eta_k)_t^{\beta}\,,$$

откуда, применяя (П.10), получаем $P(s_\nu(t)\ge t)\preceq\dfrac{\beta\cdot A}{\beta-\alpha}t^{-\alpha}L(t)$, $t\to+\infty$, при всех $\beta>\alpha$. Устремляя в асимптотическом неравенстве $\beta\to+\infty$, заключаем

$$P(s_\nu(t)\ge t)\preceq A\cdot t^{-\alpha}L(t)\,,\quad t\to+\infty. \qquad \text{(П.11)}$$

При $t>0$ запишем

$P(s_1\ge t)=P(s_1\ge t,$ хотя бы одно $\eta_k\ge t,\,k=\overline{1,\nu})+P(s_\nu(t)\ge t,\eta_k<t,$ $k=\overline{1,\nu})\le\sum_{n\ge1}c_n\cdot P$ (хотя бы одно $\eta_k\ge t,\ k=\overline{1,n})+P(s_\nu(t)\ge t)\le C(t)+P(s_\nu(t)\ge t)$.

Отсюда, используя (П.11) и (7), получаем (П.8). $\triangleright$

Лемма 4. Если $M\nu<+\infty$ *и* $A<+\infty$, *то в предположениях модели для любого* $\varepsilon\in(0,1)$ *найдется* $n_0>1$ *такое, что*

$$\sum_{n>n_0}c_n\cdot P(\overline{S}_n\ge t)\preceq\varepsilon\cdot A\cdot t^{-\alpha}L(t)\,,\ t\to+\infty. \qquad \text{(П.12)}$$

Доказательство. По данному $\varepsilon\in(0,1)$, выберем целое $n_0>1$ такое, что $2\cdot\sum_{n>n_0}c_n\cdot A_n<\varepsilon\cdot A$, и зафиксируем n_0. Пусть $\{\theta_k\}=\{\eta_{k+n_0}\}$, $\mu>0$ – не зависящая от $\{\theta_k\}$ целочисленная случайная величина,

$$P(\mu=k)=P(\nu=k+n_0/\nu>n_0)=(c_{k+n_0}/c_{>n})\,,\quad k\ge1\,.$$

Здесь $P(A/B)$ – условная вероятность события A при условии осуществления события B.

Так как $\quad M\mu=\sum_{k\ge1}\dfrac{k\cdot c_{k+n_0}}{c_{>n}}<\sum_{k>n_0}\dfrac{k\cdot c_k}{c_{>n}}<\dfrac{M\nu}{c_{>n}}<+\infty$

и

$$\sum_{k\ge1}\frac{c_{k+n_0}}{c_{>n}}\left(A_{k+n_0}-A_{n_0}\right)=\sum_{k>n_0}\frac{c_k\cdot A_k}{c_{>n_0}}-A_{n_0}<\frac{A}{c_{>n}}-A_{n_0}<+\infty\,,$$

то к случайной величине ζ_μ применима *лемма 3*, где вместо A фигурирует число $A'=\sum_{k>n_0}\dfrac{c_k\cdot A_k}{c_{>n}}-A_{n_0}$. Следовательно,

$$P(\zeta_\mu\ge t)\preceq2\cdot A'\cdot t^{-\alpha}L(t)\,,\quad t\to+\infty. \qquad \text{(П.13)}$$

По *лемме 1*, $P(s_{n_0}\ge t)\approx A_{n_0}\cdot t^{-\alpha}L(t)$, $t\to+\infty$, а случайные величины s_{n_0} и ζ_μ независимы. Поэтому с учетом (П.13) и *замечания 5* к $P(s_{n_0}+\zeta_\mu\ge t)$ применима *лемма 1**. Именно:

$$\sum_{n>n_0}c_n\cdot P(s_n\ge t)=c_{>n_0}P(s_{n_0}+\zeta_\mu\ge t)\preceq(2A'+A_{n_0})\cdot c_{>n_0}\cdot t^{-\alpha}L(t)\,,\ t\to+\infty. \qquad \text{(П.14)}$$

При данных ε и n_0 в силу неравенств $(2A'+A_{n_0})\cdot c_{>n_0}<2\sum_{k>n_0}c_k\cdot A_k<\varepsilon\cdot A$ и $P(\overline{S}_n\ge t)=P(s_n\ge t)$ при $t>0$ и $n\ge 1$ из (П.14) получаем (П.12). ⊳

Докажем *теорему 1.*

Из равенства $P(\overline{S}_\nu\ge t)=\left(\sum_{n=1}^{n_0}+\sum_{n>n_0}\right)c_n\cdot P(\overline{S}_n\ge t)$, $t>0$ (П.12) и лемм 1,1*, заключаем $P(\overline{S}_\nu\ge t)\preceq(g_{n_0}+\varepsilon\cdot A)\cdot t^{-\alpha}L(t)\preceq(1+\varepsilon)\cdot t^{-\alpha}L(t)$, $t\to+\infty$. Устремляя $\varepsilon\downarrow 0$, получаем (9). По лемме 2, т.е. (8) и (9), получаем утверждение теоремы 1. ⊳

"Односторонние" *аналоги теоремы 1* выводятся аналогично *теореме 1.* ⊳

Докажем *теорему 2.*

Так как $|\beta|\le A^{-1}\cdot\sum_{n\ge1}c_n\cdot\sum_{k=1}^{n}\delta_k\cdot|\beta_k|\le A^{-1}\cdot\sum_{n\ge1}c_n\cdot A_n=1$ (см.(10)), то число β в формулировке теоремы 2 *может* играть роль асимметрии.

Пусть $\beta>-1$. Тогда $0<\dfrac{1+\beta}{2}=A^{-1}\cdot\sum_{n\ge1}c_n\cdot\sum_{k=1}^{n}\delta_k\cdot\dfrac{1+\beta_k}{2}$.

Покажем, что

$$P(S_\nu\ge t)\approx\frac{1+\beta}{2}P(|S_\nu|\ge t),\ t\to+\infty, \tag{П.15}$$

откуда в данном случае следует *теорема 2.*

По $\varepsilon\in(0,1)$ выберем целое $n_0>1$ так, чтобы одновременно выполнялись асимптотическое неравенство (П.12) и

$$(1-\varepsilon)\cdot\frac{1+\beta}{2}=A^{-1}\cdot\sum_{n=1}^{n_0}c_n\cdot\sum_{k=1}^{n}\delta_k\cdot\frac{1+\beta_k}{2}=(1+\varepsilon)\cdot\frac{1+\beta}{2}. \tag{П.16}$$

Если $P(\xi_k\ge t)=o(t^{-\alpha}L(t))$, $t\to+\infty$ при $k=\overline{1,n}$, то из [1] (с.319–320) легко следует $P(S_n\ge t)=o(t^{-\alpha}L(t))$, $t\to+\infty$. Этот факт и лемма 1 вместе с учетом неравенства $(1-\varepsilon)(1-\beta)/2>0$ позволяют записать цепочку асимптотических соотношений

$$0<\left(\sum_{n=1}^{n_0}c_n\cdot\sum_{k=1}^{n}\delta_k\cdot\frac{1+\beta_k}{2}\right)\cdot t^{-\alpha}L(t)\approx\sum_{n=1}^{n_0}c_n\cdot\sum_{k=1}^{n}\delta_k\cdot\frac{1+\beta_k}{2}P(|\xi_k|\ge t)\approx$$

$$\approx\sum_{n=1}^{n_0}c_n\cdot\sum_{k=1}^{n}P(\xi_k\ge t)\approx\sum_{n=1}^{n_0}c_n\cdot P(S_n\ge t),\quad t\to+\infty.$$

Поэтому в силу (П.16) и теоремы 1

$$(1-\varepsilon)\frac{1+\beta}{2}\le\varliminf_{t\to+\infty}\frac{\sum_{n=1}^{n_0}c_n\cdot P(S_n\ge t)}{P(|S_\nu|\ge t)}\le\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\sum_{n=1}^{n_0}c_n\cdot P(S_n\ge t)}{P(|S_\nu|\ge t)}\le(1+\varepsilon)\frac{1+\beta}{2} \tag{П.17}$$

С другой стороны, согласно (П.12) и теореме 1,

$$0<\varlimsup_{t\to+\infty}\left(\frac{P(S_\nu\ge t)}{P(|S_\nu|\ge t)}-\frac{\sum_{n=1}^{n_0}c_n\cdot P(S_n\ge t)}{P(|S_\nu|\ge t)}\right)\le\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\sum_{n>n_0}c_n\cdot P(|S_n|\ge t)}{P(|S_\nu|\ge t)}\le\varepsilon,$$

откуда и из (П.17) следует

$$(1-\varepsilon)\frac{1+\beta}{2}\le\varliminf_{t\to+\infty}\frac{P(S_\nu\ge t)}{P(|S_\nu|\ge t)}\le\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{P(S_\nu\ge t)}{P(|S_\nu|\ge t)}\le(1+\varepsilon)\frac{1+\beta}{2}+\varepsilon.$$

Устремляя $\varepsilon\downarrow 0$, получаем (П.15).

Если $\beta<1$ (куда включается оставшийся случай $\beta=-1$), то аналогично доказывается, что

$$P(S_\nu\le -t)\approx\frac{1-\beta}{2}P(|S_\nu|\ge t),\quad t\to+\infty,$$

откуда в данном случае следует *теорема 2*.

Теорема 2 доказана. ▷

Кафедра теории вероятности и мат. статистики *Поступила 18.02.2000*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984, т.2, 751с.
2. **Сенета Е.** Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 141 с.
3. **Greenwood P.** Asymptotics of randomly stopped sequences with independent increments. – Ann.Probability, 1973, v.1, p.317-321.
4. **Greenwood P., Monroe I.** Random stopping preserves regular variation. – Ann. Probability, 1977, v.5, p.42-51.
5. **Ткачук С.Г., Зулматов С.** Обобщение одной теоремы А.В.Нагаева о больших уклонениях для вероятностей попадания в интервал.- В сб.: Мат.анализ и теория вероятн., Ташкент, Фан, 1988.
6. **Зулматов С., Ткачук С.Г.** Аддитивное свойство вероятностей больших уклонений сумм независимых случайных величин. – ДАН Уз.ССР, 1987, No4, с.15-16.
7. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969, т.2, 800с.
8. **Петров В.В.** Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317с.

Ա.Զ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ, Է.Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ

ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ԹՎՈՎ ԱՆԿԱԽ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՆԵՐԻ ՄԱՔՍԻՄՈՒՄԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիցուք $\{\xi_n\}$-ը անկախ պատահական մեծությունների հաջորդականություն է, $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$, $\overline{S}_n=\max\limits_{1\le k\le n}|S_k|$, $n\ge 1$: Ցույց է տրված, որ $N_n(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}P(|\xi_k|\ge t)$ ֆունկցիայի կանոնավոր փոփոխումը, որտեղ P-ն հավանականության նշանն է, հանգեցնում է հետևյալ սահմանային առնչությունների՝

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{P(\overline{S}_n\ge t)}{N_n(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{P(|S_n|\ge t)}{N_n(t)}=1:$$

Դիցուք $\nu>0$-ն $\{\xi_n\}$-ից անկախ ամբողջ արժեքներով պատահական մեծություն է, որի մաթեմատիկական սպասումը վերջավոր է, $S_\nu=\xi_1+\ldots+\xi_\nu$, $\overline{S}_\nu=\max\limits_{1\le n\le \nu}|S_n|$:

Դիտարկենք հետևյալ *մոդելը:* Դիցուք $\{\delta_n\}$-ը դրական թվերի հաջորդականություն է, $\alpha\ge 0$. $L(t)$-ն դանդաղ է փոփոխվում և

$\lim\limits_{t\to+\infty}\left(P(|\xi_n|\ge t)/t^{-\alpha}L(t)\right)=\delta_n$-ը *հավասարաչափ է ըստ* $n\ge 1$-ի:

Նշանակենք $c_n=P(\nu=n)$, $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_n$, $n\ge 1$, $A=\sum\limits_{n\ge 1}c_n\cdot A_n$:

Մոդելի շրջանակներում ապացուցված է, որ $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{P(\overline{S}_\nu\ge t)}{t^{-\alpha}L(t)}=$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{P(|S_\nu|\ge t)}{t^{-\alpha}L(t)}=A:$$

Վերոհիշյալ պայմանների դեպքում և $P(\xi_n<x)$, $n\ge 1$, բաշխման ֆունկցիաների ասիմետրիաների գոյության ժամանակ գտնված է $P(S_\nu<x)$-ի ասիմետրիան: