ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1,1998 Естественные науки

Механика

УДК 62.50

В.Р. БАРСЕГЯН

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ КОЛЕБАНИЯМИ МЕМБРАНЫ ПРИ ФИКСИРОВАННЫХ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ СОСТОЯНИЯХ

Рассматривается задача оптимального управления собственными колебаниями мембраны, края которой закреплены. Требуется с помощью внешних сил, действующих на нее за заданный промежуток времени, перевести систему из начального состояния через фиксированные промежуточные состояния в конечное при заданном критерии качества на всем промежутке времени.

Методом Фурье решение задачи сводится к проблеме моментов в пространстве $L_{2[O,T]}$. Определен вид оптимальных управляющих воздействий. Исследована сходимость рядов для полученных решений.

1. Рассмотрим однородную, упругую, прямоугольную мембрану, края которой закреплены. Пусть на мембрану действуют распределенные силы с плотностью u(x,y,t), перпендикулярные поверхности мембраны. Ограничимся рассмотрением малых колебаний мембраны и предположим, что область, на которую действуют распределенные силы, имеет положительную меру, по Лебегу.

Пусть прогиб мембраны будет Q(x,y,t), $0\le x\le b$, $0\le y\le c$, $t\ge 0$, подчиненной при $0<x<b$, $0<y<c$ и $t>0$ следующему уравнению [1]:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right)+u(x,y,t) \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$\left.\begin{aligned} &Q(x,y,o)=\varphi_o(x,y),\\ &\left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_o(x,y) \end{aligned}\right\} \quad 0\le x\le b,\ 0\le y\le c, \tag{1.2}$$

и однородными граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} &Q(x,0,t)=0, \quad Q(x,c,t)=0,\\ &Q(0,y,t)=0, \quad Q(b,y,t)=0. \end{aligned}\right\} \quad t>0. \tag{1.3}$$

В правой части уравнения (1.1) функция u(x,y,t) – плотность внешней силы, рассчитанная на единицу массы мембраны, $a^2=\dfrac{T_o}{\rho}$, где T_o – натяжение, а ρ - плотность мембраны.

Пусть в некоторые промежуточные моменты времени $0=t_o<t_1<\ldots<t_n<t_{n+1}=T$ заданы значения состояния и скорости любой точки мембраны

$$Q(x,y,t_j)=\varphi_j(x,y),$$

$$0<x<b,\ 0<y<c, \quad (1.4)$$

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=t_j}=\psi_j(x,y) \quad (j=1,...,n).$$

Задача оптимального управления колебаниями мембраны ставится следующим образом: среди возможных управлений u(x,y,t), 0≤x≤b, 0≤y≤c, 0≤t≤T требуется найти оптимальное управление $u^0(x,y,t)$, переводящее систему из заданного начального состояния (1.2) через промежуточные состояния (1.4) в конечное состояние

$$Q(x,y,T)=0,\ \left.\frac{\partial Q}{\partial T}\right|_{t=T}=0,\ 0\le x\le b,\ 0\le y\le c, \quad (1.5)$$

и минимизирующее функционал

$$\int_0^T\int_0^b\int_0^c [u(x,y,t)]^2\,dxdydt \quad (1.6)$$

2. Решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$Q(x,y,t)=\sum_{k,m=1}^{\infty} Q_{km}(t)\sin\frac{k\pi}{b}x\sin\frac{m\pi}{c}y. \quad (2.1)$$

Представив функции u(x,y,t), φ_j(x,y,t), ψ_j(x,y,t) в виде рядов Фурье и подставив их значения вместе с $Q(x,y,t)$ в уравнение (1.1) и в условие (1.2), 1.4), (1.5), получаем

$$\ddot{Q}_{km}(t)+\lambda_{km}^2 Q_{km}(t)=u_{km}(t), \quad (2.2)$$

$$Q_{km}(0)=\varphi_{km}^{(o)},\quad \dot{Q}_{km}(0)=\psi_{km}^{(0)}, \quad (2.3)$$

$$Q_{km}(t_j)=\varphi_{km}^{(j)},\ \dot{Q}_{km}(t_j)=\psi_{km}^{(j)} \quad (j=1,...,n), \quad (2.4)$$

$$Q_{km}(T)=\varphi_{km}^{(n+1)}=0,\ \dot{Q}_{km}(T)=\psi_{km}^{(n+1)}=0, \quad (2.5)$$

где через $u_{km}(t)$, $\varphi_{km}^{(j)},\psi_{km}^{(j)}$ обозначены коэффициенты Фурье соответственно функциям

$$u(x,y,t),\ \varphi_j(x,y),\ \psi_j(x,y), \quad \text{а}\ \lambda_{km}^2=a^2\pi^2\left(\frac{k^2}{b^2}+\frac{m^2}{c^2}\right).$$

Предполагается, что функция u(x,y,t) такая, что ее коэффициенты Фурье $u_{km}(t)$, 0≤t≤T для каждой пары индексов k, m не равны нулю.

Общее решение уравнения (2.2) с начальными условиями (2.3) имеет вид [2]

$$Q_{km}(t)=\varphi_{km}^{(o)}\cos\lambda_{km}t+\frac{1}{\lambda_{km}}\psi_{km}^{(0)}\sin\lambda_{km}t+\frac{1}{\lambda_{km}}\int_0^t u_{km}(\tau)\sin\lambda_{km}(t-\tau)d\tau. \quad (2.6)$$

Имея явное выражение (2.6) для *Q(x,y,t)* и учитывая условия (2.4) и (2.5), получим, что функции $u_{km}(\tau)$ должны удовлетворять следующей бесконечной системе равенств:

$$\int_0^{t_j} u_{km}(\tau)\sin\lambda_{km}(t_j-\tau)d\tau=\lambda_{km}\varphi_{km}^{(j)}-\lambda_{km}\varphi_{km}^{0}\cos\lambda_{km}t_j-\psi_{km}^{(0)}\sin\lambda_{km}t_j, \quad (2.7)$$

$$\int_0^{t_j} u_{km}(\tau)\cos\lambda_{km}(t_j-\tau)d\tau=\psi_{km}^{(j)}+\lambda_{km}\varphi_{km}^{(0)}\sin\lambda_{km}t_j-\psi_{km}^{(0)}\cos\lambda_{km}t_j. \quad (2.8)$$

Эти равенства удобно представить в виде

$$\int_0^{t_j} u_{km}(\tau)\sin\lambda_{km}\tau d\tau=c_{1km}(t_j),$$

$$(j=1,\ldots,n+1), \quad (2.9)$$

$$\int_0^{t_j} u_{km}(\tau)\cos\lambda_{km}\tau d\tau = c_{2km}(t_j),$$

где

$$\begin{aligned} c_{1km}(t_j) &= \lambda_{km}\varphi_{km}^{(0)} - \lambda_{km}\varphi_{km}^{(j)}\cos\lambda_{km}t_j + \psi_{km}^{(j)}\sin\lambda_{km}t_j, \\ c_{2km}(t_j) &= -\psi_{km}^{(0)} + \psi_{km}^{(j)}\cos\lambda_{km}t_j + \lambda_{km}\varphi_{km}^{(j)}\sin\lambda_{km}t_j. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Для того чтобы возможно было левую часть системы (2.9) для каждого k,m=1,2,... рассматривать как линейную операцию, порожденную функцией $u_{km}(\tau)$ на отрезке [0,T], целесообразно ввести следующие функции:

$$h_{1km}^{(j)}(\tau) = \begin{cases} \sin\lambda_{km}\tau \text{ при } 0 \le \tau \le t_j, \\ 0 \quad \text{при } t_j < \tau \le T, \end{cases} \tag{2.11}$$

$$h_{2km}^{(j)}(\tau) = \begin{cases} \cos\lambda_{km}\tau \text{ при } 0 \le \tau \le t_j \\ 0 \quad \text{при } t_j < \tau \le T \ \ (j=1,\dots,n+1) \end{cases} \tag{2.12}$$

Соотношения (2.9) при помощи функций $h_{1km}^{(j)}(\tau)$ (2.11) и $h_{2km}^{(j)}(\tau)$ (2.12) запишутся так:

$$\begin{aligned} &\int_0^T h_{1km}^{(j)}(\tau)u_{km}(\tau)d\tau = c_{1km}(t_j), \\ &\int_0^T h_{2km}^{(j)}(\tau)u_{km}(\tau)d\tau = c_{2km}(t_j), \qquad (j=1,\dots,n+1). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Учитывая, что $u(x,y,t)$ является элементом пространства L_2 при $x\in[0,b]$, $y\in[0,c]$, получим

$$\int_0^T\int_0^b\int_0^c [u(x,y,t)]^2 dxdydt = \frac{bc}{4}\sum_{k,m=1}^{\infty}\int_0^T u_{km}^2(\tau)d\tau. \tag{2.14}$$

Минимизация функционала (2.14) равносильна минимизации каждого слагаемого, т.е. функционалов

$$\int_0^T u_{km}^2(\tau)d\tau, \quad (k,m=1,2,\dots). \tag{2.15}$$

Таким образом, для каждой пары индексов k, m надо найти такое оптимальное управляющее воздействие $u_{km}^0(t)$, $t\in[0,T]$, $k,m=1,2,\dots$, которое удовлетворяет интегральным условиям (2.13) и минимизирует функционал (2.15). Так как (2.15) является квадратом нормы линейного нормированного пространства, то решение поставленной задачи можно найти с помощью проблемы моментов [3].

3. Для простоты изложения решений (2.13), (2.15) предположим, что состояние и скорость любой точки мембраны заданы в одном промежуточном моменте времени, т.е. $0<t_1<t_2=T$ (или $n=1$).

Нужно найти такие числа p_{jkm} и q_{jkm}, $j=1,2$, связанные условием

$$\sum_{j=1}^{2}\left[p_{jkm}c_{1km}(t_j) + q_{jkm}c_{2km}(t_j)\right] = 1, \tag{3.1}$$

для которых

$$(\rho_{km}^0)^2 = \min_{(3.1)}\int_0^T h_{km}^2(\tau)d\tau, \tag{3.2}$$

где

$$h_{km}(\tau) = \sum_{j=1}^{2}\left[p_{jkm}h_{1km}^{(j)}(\tau) + q_{jkm}h_{2km}^{(j)}(\tau)\right] \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в (3.2), проведя соответствующие вычисления и вводя следующие обозначения:

$$a_{ikm}=t_i-\frac{\sin 2\lambda_{km}t_i}{2\lambda_{km}},\ b_{ikm}=t_i+\frac{\sin 2\lambda_{km}t_i}{2\lambda_{km}}, \tag{3.4}$$

$$d_{ikm}=\frac{\sin^2\lambda_{km}t_i}{\lambda_{km}},\quad i=1,2,$$

для искомых величин p^o_{jkm}, q^o_{jkm} $(j=1,2)$ будем иметь

$$P^o_{1km}=\frac{M_{1km}}{A_{km}},\quad p^o_{2km}=-\frac{\Delta_{1km}}{\Delta_{km}}\cdot\frac{M_{2km}}{A_{km}},$$

$$q^o_{1km}=\frac{N_{1km}}{A_{km}},\qquad q^o_{2km}=-\frac{\Delta_{1km}}{\Delta_{km}}\cdot\frac{N_{2km}}{A_{km}}. \tag{3.5}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Delta_{km}=\sigma_{1km}\sigma_{2km}-\sigma^2_{3km},\quad \Delta_{1km}=a_{1km}\cdot b_{1km}-d^2_{1km},$$

$$M_{1km}=e_{km}+\frac{\Delta_{1km}}{\Delta_{km}}M_{2km},\quad M_{2km}=c_{1km}\sigma_{2km}-c_{2km}\sigma_{3km},$$

$$N_{1km}=f_{km}+\frac{\Delta_{1km}}{\Delta_{km}}N_{2km},\quad N_{2km}=c_{2km}\sigma_{1km}-c_{1km}\sigma_{3km},$$

$$A_{km}=b_{1km}c^2_{1km}(t_1)+a_{1km}c^2_{2km}(t_1)-2d_{1km}c_{1km}(t_1)c_{2km}(t_1)- \tag{3.6}$$

$$-\frac{\Delta_{1km}}{\Delta_{km}}(c^2_{1km}\sigma_{2km}+c^2_{2km}\sigma_{1km}-2c_{1km}c_{2km}\sigma_{3km}),$$

$$\sigma_{1km}=a_{1km}-a_{2km},\ \sigma_{2km}=b_{1km}-b_{2km},\ \sigma_{3km}=d_{1km}-d_{2km},$$

$$e_{km}=b_{1km}c_{1km}(t_1)-d_{1km}c_{2km}(t_1),\ c_{1km}=c_{1km}(t_2)-c_{1km}(t_1),$$

$$f_{km}=a_{1km}c_{2km}(t_1)-d_{1km}c_{1km}(t_1),\ c_{2km}=c_{2km}(t_2)-c_{2km}(t_1).$$

Из (3.2) с учетом (3.5) будем иметь

$$(\rho^o_{km})^2=\frac{\Delta_{1km}}{A_{km}}. \tag{3.7}$$

Подставляя из (3.5) значения для p^o_{km}, q^o_{km} в (3.3), получим

$$h^o_{km}(\tau)=\frac{1}{A_{km}}\left[d_{km}h^{(1)}_{1km}(\tau)+f_{km}h^{(2)}_{2km}+\frac{\Delta_{1km}}{\Delta_{km}}M_{2km}\left(h^{(1)}_{1km}(\tau)-h^{(1)}_{1km}(\tau)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\Delta_{1km}}{\Delta_{km}}\cdot N_{2km}\left(h^{(1)}_{2km(\tau)}-h^{(2)}_{2km(\tau)}\right)\right].$$

Так как

$$u^o_{km}(t)=\frac{1}{(\rho^o_{km})^2}h^o_{km}(t), \tag{3.9}$$

то, (2.11), (2.12) подставляя в (3.8) и учитывая (3.7), получим

$$u^o_{km}(t)=\begin{cases}u^{o-}_{km}(t) & \text{при } 0\le t\le t_1,\\ u^{o+}_{km}(t) & \text{при } t_1<t\le t_2,\end{cases} \tag{3.10}$$

где

$$u_{km}^{o-}(t)=\frac{2}{t_1^2-\dfrac{\sin^2\lambda_{km}t_1}{\lambda_{km}^2}}\left\{\left[\varphi_{km}^{o}\lambda_{km}\left(t_1+\frac{\sin 2\lambda_{km}t_1}{2\lambda_{km}}\right)-\varphi_{km}^{(1)}\lambda_{km}(t_1\cos\lambda_{km}t_1+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\sin\lambda_{km}t_1}{\lambda_{km}})+\varphi_{km}^{(1)}t_1\sin\lambda_{km}t_1+\psi_{km}^{(0)}\frac{\sin^2\lambda_{km}t_1}{\lambda_{km}}\right]\sin\lambda_{km}t+$$

$$+\left[\varphi_{km}^{(1)}\lambda_{km}t_1\sin\lambda_{km}t_1-\varphi_{km}^{(0)}\sin^2\lambda_{km}t_1+\right.$$

$$\left.\left.+\psi_{km}^{(1)}\left(t_1\cos\lambda_{km}t_1-\frac{\sin\lambda_{km}t_1}{\lambda_{km}}\right)-\psi_{km}^{(o)}\left(t_1-\frac{\sin 2\lambda_{km}t_1}{2\lambda_{km}}\right)\right]\cos\lambda_{km}t\right\}, \qquad (3.11)$$

$$u_{km}^{o+}(t)=\frac{2}{(t_2-t_1)^2-\dfrac{\sin^2\lambda_{km}(t_2-t_1)}{\lambda_{km}^2}}\{[(t_2-t_1)(\lambda_{km}\varphi_{km}^{(1)}\cos\lambda_{km}t_1-\psi_{km}^{(1)}\sin\lambda_{km}t_1)+$$

$$+(\varphi_{km}^{(1)}\cos\lambda_{km}t_2+\frac{\psi_{km}^{(1)}}{\lambda_{km}}\sin\lambda_{km}t_2)\sin\lambda_{km}(t_2-t_1)]\sin\lambda_{km}t-[(t_2-t_1)(\psi_{km}^{(1)}\cos\lambda_{km}t_1+$$

$$+\lambda_{km}\varphi_{km}^{(1)}\sin\lambda_{km}t_1)+(\varphi_{km}^{(1)}\sin\lambda_{km}t_2-\frac{\psi_{km}^{(1)}}{\lambda_{km}}\cos\lambda_{km}t_2)\sin\lambda_{km}(t_2-t_1)]\cos\lambda_{km}t]\}.$$

Явные выражения для $u_{km}^{o-}(t)$ и $u_{km}^{o+}(t)$ позволяют вычислить значение функционала (2.15), вид которого здесь не приводится.

4. В пункте 3 полностью определены функции $u_{km}^{o}(t)(k,m=1,2,...)$, имеющие вид (3.10), (3.11), (3.12).

Для функции $u^o(x,y,t)$ будем иметь

$$u^o(x,y,t)=\begin{cases}\sum\limits_{k,m=1}^{\infty}u_{km}^{o-}(t)\sin\dfrac{k\pi}{b}x\sin\dfrac{m\pi}{c}y, & 0\le t\le t_1, \qquad (4.1)\\ \sum\limits_{k,m=1}^{\infty}u_{km}^{o+}(t)\sin\dfrac{k\pi}{b}x\sin\dfrac{m\pi}{c}y, & t_1\le t\le t_2. \qquad (4.2)\end{cases}$$

Из формулы (2.6) для функции $Q_{km}(t)$ с учетом (3.10) и интегрального условия (2.7) будем иметь

$$Q_{km}^{-}(t)=\varphi_{km}^{(0)}\cos\lambda_{km}t+\frac{1}{\lambda_{km}}\psi_{km}^{(0)}\sin\lambda_{km}t+\frac{1}{\lambda_{km}}\int_0^t u_{km}^{o-}(\tau)\sin\lambda_{km}(t-\tau)d\tau, \qquad (4.3)$$

$$0\le t\le t_1,.$$

$$Q_{km}^{+}(t)=\varphi_{km}^{(1)}+\frac{1}{\lambda_{km}}\int_{t_1}^{t}u_{km}^{o+}(\tau)\sin\lambda_{km}(t-\tau)d\tau,\ \ t_1<t\le t_2. \qquad (4.4)$$

Следовательно, функция прогиба мембраны представится в виде

$$Q(x,y,t)=\begin{cases}\sum\limits_{k,m=1}^{\infty}Q_{km}^{-}(t)\sin\dfrac{k\pi}{b}x\sin\dfrac{m\pi}{c}y, & 0\le t\le t_1, \qquad (4.5)\\ \sum\limits_{k,m=1}^{\infty}Q_{km}^{+}(t)\sin\dfrac{k\pi}{b}x\sin\dfrac{m\pi}{c}y, & t_1<t\le t_2. \qquad (4.6)\end{cases}$$

Доказательство равномерной сходимости рядов (4.1), (4.2),(4.5),(4.6) и рядов для функции $Q_{tt}(x,y,t)$, $Q_{xx}(x,y,t)$, $Q_{yy}(x,y,t)$ сводится к доказательству сходимости рядов [4]

$$\sum_{k,m=1}^{\infty} \lambda_{km}^{\alpha} \left|\varphi_{km}^{(j)}\right| \qquad (\alpha = 0,1,2;\ j = 0,1), \tag{4.7}$$

$$\sum_{k,m=1}^{\infty} \lambda_{km}^{\alpha} \left|\psi_{km}^{(j)}\right| \qquad (\alpha = -1,0,1;\ j = 0,1). \tag{4.8}$$

Для сходимости рядов (4.7) достаточно потребовать, чтобы начальное и промежуточное отклонения, т.е. $\varphi_0(x,y)$ и $\varphi_1(x,y)$, удовлетворяли условиям сходимости ряда при $\alpha = 2$.

Для сходимости рядов (4.8) достаточно потребовать, чтобы начальная и промежуточная скорости $\psi_o(x,y)$ и $\psi_1(x,y)$ удовлетворяли условиям сходимости ряда при $\alpha = 1$.

Кафедра теоретической механики *Поступила 10.06.1997*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнение математической физики. М., 1977.
2. **Саакян Л.С., Барсегян В.Р.** Об управлении колебаниями мембраны.- Межвуз. сб. научных трудов: Механика, Ер.: Изд-во ЕГУ, 1987, в. 6.
3. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М., 1968.
4. **Габриелян М.С.** О стабилизации механической системы мощности континуума.- Уч. записки ЕГУ, 1975, N 2.

Վ. Ռ. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

ՄԵՄԲՐԱՆԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՂԵԿԱՎԱՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ ՖԻՔՍԱԾ ՄԻՋԱՆԿՅԱԼ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ

Ամփոփում

Դիտարկվում է ամրացված եզրերով ուղղանկյուն մեմբրանի տատանումների օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը: Պահանջվում է մեմբրանի վրա ազդող արտաքին ուժերի միջոցով համակարգը տեղափոխել սկզբնական վիճակից ֆիքսած միջանկյալ վիճակներով վերջնական վիճակին՝ մինիմիզացնելով ժամանակի ամբողջ ինտերվալի վրա տրված որակի հայտանիշը:

Փոփոխականների անջատման եղանակով խնդրի լուծումը բերվում է L_2 տարածությունում մոմենտների պրոբլեմին: Կառուցված են օպտիմալ ղեկավարող ազդեցությունները: