ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1.1997 Естественные науки

Механика

УДК 532.516

Р.Ж. МНАЦАКАНЯН

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОМ КАНАЛЕ С ДВИЖУЩЕЙСЯ СТЕНКОЙ

Рассматривается нестационарное течение вязкой жидкости в пористом канале с движущейся стенкой под действием постоянной массовой силы. Получены законы изменения продольной скорости и мгновенного массового расхода, а также построены соответствующие графики при разных значениях чисел Рейнольдса.

1. Движение в пористом канале имеет важное значение в процессах испарительного охлаждения и химической технологии. Такие течения относятся к малоизученному классу задач в теории движения вязкой жидкости [1-5].

Рассмотрим движение жидкости, обусловленное постоянной массовой силой X и скоростью U верхней стенки канала, между двумя пористыми стенками при $y=h$ и $y=-h$. Так, под действием силы X, приложенной в момент $t=0$, начинает двигаться жидкость в пористом канале с движущейся стенкой. Принимается, что составляющая скорости в направлении y (скорость отсасывания) - везде постоянная и равна V, а продольная скорость не зависит от координаты x. Тогда уравнения Навье-Стокса сводятся к виду

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+V\frac{\partial v_x}{\partial y}=X+\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \tag{1.1}$$

здесь v_x - компонента скорости жидкости по оси oX, ν - кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Граничные условия для поставленной задачи будут иметь вид

$$\begin{aligned}&\text{при } t=0 \quad v_x=0;\\ &\text{при } t>0 \quad y=h, \quad v_x=U;\\ &\text{при } t>0 \quad y=-h, \quad v_x=0,\end{aligned} \tag{1.2}$$

где $2h$ - ширина канала.

Приступая к решению задачи, введем новые переменные, полагая

$$\xi=\frac{y}{h}, \quad u=\frac{v_x}{V}, \quad T=\frac{Vt}{h}, \quad X_1=\frac{Xh}{V^2}.$$

Тогда уравнение (1.1) и граничные условия (1.2) примут следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial T}+\frac{\partial u}{\partial \xi}=X_1+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}&\text{при } T=0 \quad u=0,\\ &\text{при } T>0 \quad \xi=1 \quad u=\frac{U}{V},\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\text{при } T>0 \quad \xi=-1, \quad u=0,$$

где $\mathrm{Re}=\dfrac{Vh}{\nu}$ - число Рейнольдса.

2. Уравнение (1.3) при граничных условиях (1.4) решаем с помощью интегрального преобразования Лапласа [6]. Применяя к уравнению (1.3) и к граничным условиям (1.4) преобразования Лапласа, получим

$$\lambda\bar{u}+\frac{d\bar{u}}{d\xi}=\frac{X_1}{\lambda}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d^2\bar{u}}{d\xi^2}, \tag{2.1}$$

$$\text{при } \xi=1 \quad \bar{u}=\frac{U}{\lambda V}, \tag{2.2}$$

$$\text{при } \xi=-1 \quad \bar{u}=0.$$

Решение уравнения (2.1) с учетом граничных условий (2.2) будет

$$\bar{u}=-\frac{X_1\exp\left(\frac{\mathrm{Re}\xi}{2}\right)}{\lambda^2}\left(\frac{chk\xi}{chk}ch\frac{\mathrm{Re}}{2}-\frac{shk\xi}{shk}sh\frac{\mathrm{Re}}{2}\right)+$$

$$+\frac{X_1}{\lambda^2}+\frac{U\exp\left[\frac{\mathrm{Re}(\xi-1)}{2}\right]}{V}\cdot\frac{shk(\xi+1)}{\lambda sh2k}, \tag{2.3}$$

где $k=\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda\mathrm{Re}+\mathrm{Re}^2}$.

Теперь, применяя обратное преобразование Лапласа к выражению (2.3) и переходя к старым переменным, для продольной скорости окончательно получим

$$v_x=e^{\frac{\mathrm{Re}}{4h}(2y-Vt)}\left[\frac{4}{V}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n(-1)^n\sin\pi ny/h}{4\pi^2n^2+\mathrm{Re}^2}\left(vUe^{-\frac{\mathrm{Re}}{2}}-\frac{8Xh^2sh\mathrm{Re}/2}{4\pi^2n^2+\mathrm{Re}^2}\right)e^{-\frac{v\pi^2n^2}{h^2}}-\frac{2}{V}\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi(2n+1)(-1)^n\cos\pi(2n+1)y/2h}{\pi^2(2n+1)^2+\mathrm{Re}^2}\left(vUe^{-\frac{\mathrm{Re}}{2}}+\frac{8Xh^2ch\mathrm{Re}/2}{\pi^2(2n+1)^2+\mathrm{Re}^2}\right)e^{-\frac{v\pi^2(2n+1)^2}{4h^2}t}\right]+$$

$$+\frac{Ush\mathrm{Re}(y+h)/2h}{sh\mathrm{Re}}e^{\mathrm{Re}(y-h)/2h}+\frac{Xh}{V}e^{\frac{\mathrm{Re}}{2h}y}\left(\frac{y}{h}e^{-\frac{\mathrm{Re}}{2h}y}+th\frac{\mathrm{Re}}{2}ch\frac{\mathrm{Re}}{2h}y-cth\frac{\mathrm{Re}}{2}sh\frac{\mathrm{Re}}{2h}y\right). \tag{2.4}$$

Мгновенный массовый расход Q можно получить интегрированием (2.4) по сечению канала

$$Q=e^{-\frac{V\mathrm{Re}}{4h}t}\left[\frac{32h}{V}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2n^2sh\mathrm{Re}/2}{\left(4\pi^2n^2+\mathrm{Re}^2\right)^2}\left(\frac{8Xh^2sh\mathrm{Re}/2}{4\pi^2n^2+\mathrm{Re}^2}-vUe^{-\frac{\mathrm{Re}}{2}}\right)e^{-\frac{v\pi^2n^2}{h^2}t}-\right.$$

$$\left.-\frac{8h}{V}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^2(2n+1)^2ch\mathrm{Re}/2}{\left(\pi^2(2n+1)^2+\mathrm{Re}^2\right)^2}\left(\frac{8Xh^2ch\mathrm{Re}/2}{\pi^2(2n+1)^2+\mathrm{Re}^2}+vUe^{-\frac{\mathrm{Re}}{2}}\right)e^{-\frac{v\pi^2(2n+1)^2}{4h^2}t}\right]+$$

$$+Uh\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}-\frac{e^{-\mathrm{Re}}}{sh\mathrm{Re}}\right)+\frac{2Xh^2}{V}\left(cth\mathrm{Re}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\right). \tag{2.5}$$

Если в решении (2.4) $t \to \infty$, то получим решение стационарной задачи, т.е.

$$v_x = \frac{Ush\mathrm{Re}(y+h)/2h}{sh\mathrm{Re}} e^{\mathrm{Re}(y-h)/2h} + \frac{Xh}{V} e^{\frac{\mathrm{Re}}{2h}y}\left(\frac{y}{h} e^{-\frac{\mathrm{Re}}{2h}y} + th\frac{\mathrm{Re}}{2} ch\frac{\mathrm{Re}}{2h}y - cth\frac{\mathrm{Re}}{2} sh\frac{\mathrm{Re}}{2h}y\right). \quad (2.6)$$

Соответственно для Q получим

$$Q = \frac{2Xh^3}{\nu}\left(\frac{cth\mathrm{Re}}{\mathrm{Re}} - \frac{1}{\mathrm{Re}^2}\right) + Uh\left(\frac{1}{\mathrm{Re}} - \frac{e^{-\mathrm{Re}}}{sh\mathrm{Re}}\right). \quad (2.7)$$

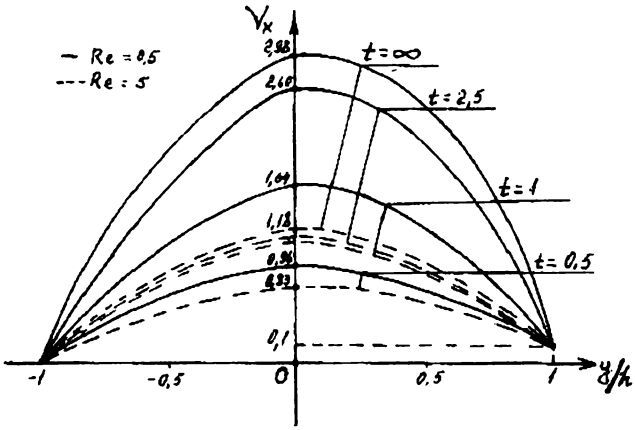

Рис. 1.

Из (2.6) видно, что если $U = 0$ и число Re мало $(\mathrm{Re} \to 0)$, то профиль продольных скоростей параболический, т.е.

$v_x = \dfrac{Xh^2}{2\nu}\left(1 - \dfrac{y^2}{h^2}\right)$ и максимальная скорость будет равна $v_x = \dfrac{Xh^2}{2\nu}$. И еще надо отметить, что при $U = 0$ и $\mathrm{Re} \to 0$, т.е. при отсутствии отсасывания жидкости решение (2.4) совпадает с решением, приведенным в [6]. Из (2.4) также видно, что при больших значениях Re, $\mathrm{Re} \to \infty$, $v_x \to 0$.

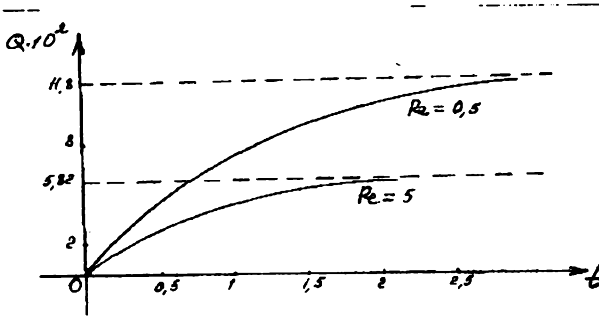

Рис. 2.

3. Для конкретной задачи, например, $\nu = 3 \cdot 10^{-4} м^2/сек$, $h = 3 \cdot 10^{-2} м$, $U = 0{,}1 м/сек$, $X = 2 м/сек^2$, по формулам (2.4) и (2.5) при разных значениях $\mathrm{Re}(\mathrm{Re} = 0{,}5;\ \mathrm{Re} = 5)$ построим законы изменения v_x и Q с первой приближенностью (рис. 1,2) т.е. в соответствующих суммах выражений (2.4) и (2.5), сохраняя лишь первые два слагаемых.

Из рис. 1 видно, что увеличение Re приводит к уменьшению скорости v_x и с возрастанием времени профили мгновенной скорости переходят в пределе почти в параболический профиль, в частности при $U = 0$ они переходят в пределе точно в параболический профиль.

Из рис. 2 видно, что с увеличением числа Re величина массового расхода уменьшается и - наоборот. Видно также, что для конкретного числа Re с возрастанием t величина массового расхода возрастает, стремясь к определенному значению.

Кафедра теоретической механики *Поступила 1.07.1996.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.:Наука, 1974, 711с.
2. **Тарг С.М.** Основные задачи теории ламинарных течений. М.: Госизд-во технико-теоретич. лит., 1951, 420 с.
3. **Слезкин Н.А.** Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955, 519 с.
4. **Бабаджанян Г.А.** Течение вязкой жидкости в прямоугольном канале с пористыми стенками. - Изв. АН Арм. ССР, 1965, т. XVIII, № 2.
5. **Бабаджанян Г.А., Мнацаканян Р.Ж.** Течение жидкости в канале с движущейся пористой стенкой. - Изв. АН Арм. ССР, 1989, т. 42, № 4.
6. **Карслоу Х.С., Егер Д.К.** Операционные методы в прикладной математике. М.: Изд-во ИЛ, 1948, 290с.

Ռ.Ժ. ՄՆԱՑԱԿԱՆՅԱՆ

ՄԱԾՈՒՑԻԿ ՀԵՂՈՒԿԻ ՈՉ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՀՈՍՔԸ ՇԱՐԺՎՈՂ ՊԱՏՈՎ ԾԱԿՈՏԿԵՆ ՀԱՐԹ ԽՈՂՈՎԱԿՈՒՄ

Ամփոփում

Ուսումնասիրված են շարժվող պատով ծակոտկեն հարթ խողովակում զանգվածային ուժի ազդեցությամբ մածուցիկ հեղուկի ոչ ստացիոնար հոսքի փոփոխման օրենքները տարբեր ռեյնոլդսների համար:

Ստացված արդյունքներից հետևում է, որ ժամանակը մեծացնելիս ակնթարթային արագության փոփոխման օրենքը հարթ խողովակի վերին պատի արագության արժեքի ճշտությամբ ձգտում է պարաբոլային օրենքի, իսկ շարժման քանակը Ռեյնոլդսի թվի յուրաքանչյուր արժեքի դեպքում ընդունում է որոշակի սահմանային արժեք: