ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1,1995 Естественные науки

Математика

УДК 512.57

С.С. ДАВИДОВ

КОММУТАТИВНЫЕ ДИСТРИБУТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ С ДЕЛИМОЙ ОПЕРАЦИЕЙ

В монографии [1] описываются q - алгебры с нетривиальными сверхтождествами дистрибутивности. Бинарная алгебра $\langle Q,\Sigma\rangle$ называется q- алгеброй, если в Σ существует обратимая операция. В настоящей работе аналогичный результат доказывается для подпрямо-неразложимых алгебр $\langle Q;\Sigma\rangle$ с делимой операцией.

Определение 1. Алгебра $\langle Q;\Sigma\rangle$ называется- $\forall$ -сократимой (лево-сократимой), если из $X(x,a)=X(x,b)$ для каждого $X\in\Sigma$ следует $a=b$ (из $X(x,a)=X(x,b)$ следует $a=b$). Алгебра называется $\forall$ -сократимой (сократимой), если она лево- и право- $\forall$ - сократима (лево - и право - сократима).

Очевидно, что каждая сократимая алгебра является $\forall$ - сократимой.

Предложение 1. В каждой дистрибутивной идемпотентной алгебре выполняются сверхтождества

$$(i)\quad X[x,Y(y,x)]=Y[X(x,y),x];$$

$$(ii)\quad X[Y(x,x),Y(y,z)]=X[x,Y(y,z)]=Y[X(x,y),X(x,z)];$$

$$(iii)\quad X[Y(y,z),x]=X[Y(y,z),Y(x,x)]=Y[X(y,x),X(z,x)].$$

Доказательство. Очевидно.

Предложение 2. Дистрибутивная сократимая ($\forall$ -сократимая) алгебра идемпотентна.

Доказательство. $X[x,X(x,x)]=X[X(x,x),X(x,x)]$ для любого $X\in\Sigma$, поэтому $X(x,x)=x$ для любого $X\in\Sigma$.

Предложение 3. Дистрибутивная алгебра $\langle Q;\Sigma\rangle$ с сократимой операцией $A\in\Sigma$ удовлетворяет равенству

$$X[A(x,y),A(z,x)]=A[X(x,z),X(y,x)] \tag{1}$$

для любого $X\in\Sigma$ и любых $x,y,z\in Q$.

Доказательство. Так как A сократимая операция, то она идемпотентна и для любого $X\in\Sigma$ будет удовлетворять равенству

$$A[X(x,z),x]=X[x,A(z,x)] \tag{2}$$

$$\left(A[X(x,z),x]=X[A(x,x),A(z,x)]=X[x,A(z,x)]\right)$$

Далее,

$$X[A(x,y),A(z,x)]=A\{X[A(x,y),z],X[A(x,y),x]\}=$$
$$X\{A\{X[A(x,y),z],A(x,y)\},A\{X[A(x,y),z],x\}\}=$$
$$X\{X\{A(x,y),A[z,A(x,y)]\},A\{X[A(x,y),z],x\}\}=$$
$$X\{X\{A(x,y),A[z,A(x,y)]\},X\{A[A(x,y),x],A(z,x)\}\}=$$
$$X\{X\{A(x,y),A[A(z,x),A(z,y)]\},A\{X[A(x,y),A(z,x)],X[x,A(z,x)]\}\}=$$
$$X\{A\{X[A(x,y),A(z,x)],X[A(x,y),A(z,y)]\},A\{X[A(x,y),A(z,x)],A[X(x,z),x]\}\}=$$
$$X\{A\{X[A(x,y),A(z,x)],A[X(x,z),y]\},A\{X[A(x,y),A(z,x)],A[X(x,z),x]\}\}=$$
$$A\{X[A(x,y),A(z,x)],X\{A[X(x,z),y],A[X(x,z),x]\}\}=$$
$$A\{X[A(x,y),A(z,x)],A[X(x,z),X(y,x)]\}.$$

Таким образом
$$X[A(x,y),A(z,x)]=A\{X[A(x,y),A(z,x)],A[X(x,z),X(y,x)]\}, \qquad (3)$$
и поскольку A идемпотентная операция, то
$$X[A(x,y),A(z,x)]=A\{X[A(x,y),A(z,x)],X[A(x,y),A(z,x)]\}, \qquad (4)$$
поэтому
$$\begin{aligned} &A\{X[A(x,y),A(z,x)],A[X(x,z),X(y,x)]\}=\\ &=A\{X[A(x,y),A(z,x)],X[A(x,y),A(z,x)]\}, \end{aligned} \qquad (5)$$
после сокращения получим
$$A[X(x,z),X(y,x)]=X[A(x,y),A(z,x)]. .$$

Следствие 1. Каждая сократимая дистрибутивная алгебра удовлетворяет сверхтождеству
$$X[Y(x,y),Y(z,x)]=Y[X(x,z),X(y,x)]. \qquad (6)$$

Следствие 2. Каждая дистрибутивная $\forall$-сократимая алгебра $\langle Q;\Sigma\rangle$ удовлетворяет сверхтождеству (6).

Доказательство. Согласно предложению 2 алгебра $\langle Q;\Sigma\rangle$ будет идемпотентной, и в ней будут выполняться равенства (3), (4), (5) для всех $X, A\in\Sigma$, поэтому после сокращения получим (6).

Предложение 4. Каждая идемпотентная триабелевая алгебра - дистрибутивна. Доказательство. ([2], предложение 7).

Определение 2. Если $\langle Q;\Sigma\rangle$ - алгебра, $M\subseteq Q$, то через *S(M)* обозначим подалгебру $\langle Q;\Sigma\rangle$, порожденную подмножеством *M*.

Теорема 1. Пусть $\langle Q;\Sigma\rangle$ дистрибутивная алгебра $M\subseteq Q, M\neq\varnothing$, и в $\langle Q;\Sigma\rangle$ выполняется котождество $X[Y(x_1,x_2),Y(x_3,x_4)]=Y[X(x_1,x_3),X(x_2,x_4)]$ для всех $x_1,x_2,x_3,x_4\in M$. Тогда подалгебра *S(M)* абелева.

Доказательство. [2, лемма 2].

Следствие 3. Пусть $\langle Q;\Sigma\rangle$ - дистрибутивная идемпотентная алгебра и $a,b,c\in Q$. Тогда $S(a,b,c)$ абелева тогда и только тогда, когда

$$X\left[Y(a,b),Y(c,a)\right]=Y\left[X(a,c),X(b,a)\right],X\left[Y(b,a),Y(c,b)\right]=$$
$$Y\left[X(b,c),X(a,b)\right],X\left[Y(c,a),Y(b,c)\right]=Y\left[X(c,b),X(a,c)\right]$$
для всех $X,Y\in\Sigma$.

Доказательство. Если $S(a,b,c)$ абелева, то ясно, что выполняются требуемые равенства. Обратно, пусть $x_1,x_2,x_3\in\{a,b,c\}$. Нужно показать, что

$$X\left[Y(x_1,x_2),Y(x_3,x_4)\right]=Y\left[X(x_1,x_3),X(x_2,x_4)\right].$$

Если $x_2=x_3$, доказывать нечего. Если $x_1=x_4$, то утверждение следует из условия. В остальных случаях надо использовать предложение $1(ii,iii)$.

Теорема 2. Каждая дистрибутивная $\forall$ - сократимая (сократимая) алгебра триабелева.

Доказательство. Согласно предложению 2 алгебра $\langle Q;\Sigma\rangle$ идемпотентна. Нужно показать, что для любых $a,b,c\in Q$, $S(a,b,c)$ - абелева подалгебра. Согласно следствию 2 $\langle Q;\Sigma\rangle$ удовлетворяет сверхтождеству (6), и поэтому согласно следствию 3 получим, что $S(a,b,c)$ абелева.

Следствие 4. Следующие условия эквивалентны для $\forall$ - сократимой (сократимой) идемпотентной алгебры:

$(i)\langle Q;\Sigma\rangle$ - триабелева;

$(ii)\langle Q;\Sigma\rangle$ - дистрибутивна.

Доказательство. Следует из предложения 4 и теоремы 2.

Лемма 1. Пусть I - идеал алгебры $\langle Q;\Sigma\rangle$. Определим отношение r на $\langle Q;\Sigma\rangle$ следующим образом: $arb\Leftrightarrow a,b\in I$ или $a=b$. Тогда r - конгруэнция $\langle Q;\Sigma\rangle$.

Пусть

$$K(a,b)=\left\{x\in Q|X(a,x)=X(b,x),\ \ \forall x\in\Sigma\right\}.$$

Лемма 2. Пусть $\langle Q;\Sigma\rangle$ - коммутативная дистрибутивная алгебра и $K(a,b)\neq\varnothing$. Тогда $K(a,b)$ - идеал.

Доказательство. Пусть $c\in K(a,b)$ и $d\in Q$; надо показать, что $X(d,c)\in K(a,b)$ для любого $X\in\Sigma$. Имеем.

$$X\left[a,Y(a,c)\right]=X\left[a,Y(b,c)\right]=Y\left[X(a,b),X(a,c)\right]=$$
$$=Y\left[X(b,a),X(b,c)\right]=X\left[b,Y(a,c)\right]=X\left[b,Y(b,c)\right],$$

таким образом для любых $X,Y\in\Sigma$ имеем

$$X\left[a,Y(a,c)\right]=X\left[b,Y(b,c)\right].\tag{7}$$

Далее,

$$Y\left[a,X(d,c)\right]=X\left[Y(a,d),Y(a,c)\right]=Y\left\{X\left[a,Y(a,c)\right],X\left[d,Y(a,c)\right]\right\}=$$
$$Y\left\{X\left[b,Y(b,c)\right],X\left[d,Y(b,c)\right]\right\}=X\left[Y(b,d),Y(b,c)\right]=Y\left[b,X(d,c)\right].$$

Предложение 5. Пусть $\langle Q;\Sigma\rangle$ - подпрямо неразложимая коммутативная идемпотентная дистрибутивная алгебра. Тогда одно из следующих условий имеет место:

$(i)\langle Q;\Sigma\rangle\forall$ - сократимая алгебра;

$(ii)\langle Q;\Sigma\rangle$ содержит ноль z такой, что $H=\{a\in G\,/\,a\neq z\}$ подалгебра $\langle Q;\Sigma\rangle$ и $\langle H;\Sigma\rangle\forall$ - сократимая алгебра.

Доказательство. Мы можем предположить, что $\langle Q;\Sigma\rangle$ содержит, по крайней мере, два элемента. Тогда имеются $a,b\in Q$ такие, что $a\neq b$ и atb $(t=t_G$ - пересечение всех нетривиальных конгруэнций $\langle Q;\Sigma\rangle, t_G\neq\Delta_G$, так как $\langle Q;\Sigma\rangle$ подпрямо неразложима). Предположим сначала, что $K=K(a,b)\neq\varnothing$. Согласно лемме 2 K - идеал. Если K содержит, по крайней мере, два элемента, то $r\neq\Delta_G$, где r - конгруэнция, соответствующая K в смысле леммы 1 (т.е. $crd\Leftrightarrow c=d$, или $c,d\in K$). В этом случае мы имеем $t\subseteq r$ (т.к. t - пересечение всех конгруэнций), $a,b\in K$ (т.к. $atb\Rightarrow arb\Rightarrow a,b\in K$), $a=b$ (т.к. $a,b\in K(a,b)\Rightarrow a=X(a,a)=X(b,a)=X(b,b)=b$, что есть противоречие. Следовательно, $K=\{z\}$ - одноэлементное множество и, т.к. K - идеал, то z будет нулем $\langle Q;\Sigma\rangle$. Пусть $c\in Q$, $c\neq z$, $X\in\Sigma$. Тогда $L_{c,x}$ - эндоморфизм

$\langle Q;\Sigma\rangle$ (т.к. $L_{c,x}\left[Y(x,y)\right]=X\left[c,Y(x,y)\right]=Y\left[X(c,x),X(c,y)\right]=Y\left[L_{c,x}(x),L_{c,x}(y)\right]$).

Предположим, что $L_{c,x}$ для всех $X\in\Sigma$ не являются инъекциями. Тогда можно определить конгруэнцию s следующим образом: $usv\Leftrightarrow L_{c,x}(u)=L_{c,x}(v)$, $\forall X\in\Sigma$. Покажем, что это конгруэнция, т. е. если xsy, usv, то $Y(x,u)sY(y,v)$ или $L_{c,x}\left[Y(x,u)\right]=L_{c,x}\left[X(y,v)\right]$ для всех $X\in\Sigma$. Действительно,

$$L_{c,x}\left[Y(x,u)\right]=X\left[c,Y(x,u)\right]=Y\left[X(c,x),X(c,u)\right]=$$
$$Y\left[X(c,y),X(c,v)\right]=X\left[c,Y(y,v)\right]=L_{c,x}\left[Y(y,v)\right],$$

т. к. это верно для любых $X,Y\in\Sigma$, то s будет конгруэнцией. Причем s нетривиальна, т. к. все $L_{c,x}$ для $X\in\Sigma$ не являются инъекциями, поэтому $t\subseteq s\Rightarrow atb\Rightarrow asb$, т. е. $L_{c,x}(a)=L_{c,x}(b)$ для всех $X\in\Sigma$. Поэтому $X(c,a)=X(c,b)$ для всех $X\in\Sigma$, т. е. $c\in K(a,b)$ и $c=z$, что есть противоречие. Следовательно, хотя бы одно из отображений $L_{c,x}$ - инъекция, напр., пусть $L_{c,A}$ для $A\in\Sigma$ - инъекция. Тогда из соотношений $X(c,x)=X(c,y)$ для всех $X\in\Sigma$ следует, что $A(c,x)=A(c,y)$ или $L_{c,A}(x)=L_{c,A}(y)$, и т. к. $L_{c,A}$ - инъекция, то $x=y$. Таким образом получаем $\forall$-сократимость алгебры $\langle Q\setminus\{z\},\Sigma\rangle$. Если же $K=\varnothing$, то, повторяя предыдущие рассуждения, начиная с определения s, мы получим $\forall$-сократимость алгебры $\langle Q;\Sigma\rangle$.

Имеет место следующая теорема (T. Kepka [3], Theorem 2.6).

Теорема 3. Следующие условия эквивалентны для группоида $Q(A)$:

(i). $Q(A)$ - дистрибутивный делимый группоид;

(ii). Существует коммутативная лупа Муфанг $Q(\circ)$, и ее сюръективные эндоморфизмы f_A,g_A такие, что $f_A(a)\circ g_A(a)=a$, $a\circ f_A(a)\in N(Q(\circ))$ (ядро лупы $Q(\circ)$) и $A(a,b)=f_A(a)\circ g_A(b)$ для всех $a,b,\in Q$.

Из доказательства этой теоремы нам понадобятся следующие соотношения:

$$A(x,y)=R_Ax\circ L_Ay,\quad x\circ y=A(h_Ax,k_Ay),$$

где $R_Ax=R_{A,j}(x)=A(x,j)$, $L_Ax=L_{A,j}(x)=A(j,x)$, j - фиксированный элемент Q, являющийся единицей лупы $Q(\circ)$. Так как R_A,L_A сюръекции, то существуют отображения $h_A,k_A:Q\to Q$ такие, что $R_Ah_A=1=L_Ak_A$ и $h_A(j)=j=k_A(j)$. Далее, обозначим $R_{X,j}=R_X, L_{X,j}=L_X$ для любого $X\in\Sigma$.

Предложение 6. Каждая дистрибутивная алгебра с одной делимой операцией A идемпотентна.

Доказательство. Согласно дистрибутивности имеем

$$X[x, A(y,z)] = A[X(x,y), X(x,z)]..$$

Возьмем $y=x$, получим $X[x, A(x,z)] = A[X(x,x), X(x,z)]$.

Далее, $X[x, A(x,z)] = X[A(x,x), A(x,z)] = A[x, X(x,z)]$, поэтому

$$A[x, X(x,z)] = A[X(x,x), X(x,z)].$$

Согласно теореме 3 имеем $R_A x \circ L_A X(x,z) = R_A X(x,x) \circ L_A X(x,z)$, т. е. $R_A x = R_A X(x,x)$.

С другой стороны, имеем

$$A[X(x,y), z] = X[A(x,z), A(y,z)],$$

$$R_A X(x,y) \circ L_A z = X[R_A x \circ L_A z, R_A y \circ L_A z],$$

возьмем $z=j$, получим

$$R_A X(x,y) = X(R_A x, R_A y).$$

Поэтому согласно (8) получим

$$R_A x = X(R_A x, R_A x),$$

и так как R_A - сюръекция, то вместо $R_A x$ можем взять x, будем иметь $x = X(x,x)$.

Лемма 3. Пусть $\langle Q;\Sigma\rangle$ - дистрибутивная алгебра с одной делимой операцией, тогда $R_X R_Y = R_Y R_X, L_X L_Y = L_Y L_X, R_X L_Y = L_Y R_X$ для любых $X, Y \in \Sigma$.

Доказательство. Согласно предложению 6 каждая операция $X \in \Sigma$ идемпотентна, поэтому

$$R_X R_Y x = X[Y(x,j), j] = Y[X(x,j), X(j,j)] = Y[X(x,j), j] = R_Y R_X x;$$

$$L_X L_Y x = X[j, Y(j,x)] = Y[X(j,j), X(j,x)] = Y[j, X(j,x)] = L_Y L_X x;$$

$$R_X L_Y x = X[Y(j,x), j] = Y[X(j,j), X(x,j)] = Y[j, X(x,j)] = L_Y R_X x.$$

Лемма 4. Пусть $\langle Q;\Sigma\rangle$ - дистрибутивная алгебра с одной делимой операцией $A \in \Sigma$, тогда соответствующая этой операции коммутативная лупа Муфанг $Q(\circ)$ удовлетворяет равенствам $R_X(x \circ y) = R_X x \circ R_X y, L_X(x \circ y) = L_X x \circ L_X y$ для всех $x, y \in Q, X \in \Sigma$.

Доказательство. $R_X(x \circ y) = X[A(h_A x, k_A y), j] = A[X(h_A x, j), X(k_A y, j)] =$

$$A[R_X h_A x, R_X k_A y] = R_A R_X h_A x \circ L_A R_X k_A y = R_X R_A h_A x \circ R_X L_A k_A y = R_X x \circ R_X y.$$

$$L_X(x \circ y) = X[j, A(h_A x, k_A y)] = A[X(j, h_A x), X(j, k_A y)] = A[L_X h_A x, L_X k_A y] =$$

$$= R_A L_X h_A x \circ L_A L_X k_A y = L_X R_A h_A x \circ L_X L_A k_A y = L_X x \circ L_X y.$$

Предложение 7. Пусть $\langle Q;\Sigma\rangle$ - дистрибутивная алгебра с одной делимой операцией $A \in \Sigma$, удовлетворяющая равенству $X[A(x,y), A(z,x)] = A[X(x,z), X(y,x)]$ для любого $X \in \Sigma$ и любых $x, y, z \in Q$. Тогда все операции $X \in \Sigma$ связаны с коммутативной лупой Муфанг $Q(\circ)$, соответствующей операции A, следующим образом: $X(x,y) = R_X x \circ L_X y$.

Доказательто. Возьмем в равенстве

$$X[A(x,y), A(z,x)] = A[X(x,z), X(y,x)], \tag{9}$$

$x=j$, получим

$$X[A(j,y),A(z,j)]=A[X(j,z),X(y,j)],$$

$$X[L_A y,R_A z]=R_A X(j,z)\circ L_A X(y,j),$$

$$X(L_A y,R_A z)=R_A L_X z\circ L_A R_X y,$$

$$X(L_A y,R_A z)=R_X L_A y\circ L_X R_A z,$$

т. к. R_A, L_A - сюръекции, то мы можем взять вместо $R_A z, L_A y$ соответственно z,y. Получим $X(x,y)=R_X y\circ L_X z$.

Лемма 5. В дистрибутивной алгебре $\langle Q;\Sigma\rangle$ с делимой операцией $A\in\Sigma$, удовлетворяющей равенству (9), выполняются равенства

$$R_X Y(x,y)=Y(R_X x,R_X y),\ \ L_X Y(x,y)=Y(L_X x,L_x,y)$$

для всех $X,Y\in\Sigma$ и $x,y\in Q$.

Доказательство.

$$R_X Y(x,y)=R_X(R_Y x\circ L_Y y)=R_X R_Y x\circ R_X L_Y y=R_Y R_X x\circ L_Y R_X y=Y(R_X x,R_X y);$$

$$L_X Y(x,y)=L_X(R_Y x\circ L_Y y)=L_X R_Y x\circ L_X L_Y y=R_Y L_X x\circ L_Y L_X y=Y(L_X x,L_X y).$$

Теорема 4. Следующие условия эквивалентны:

(i). $\langle Q;\Sigma\rangle$ - коммутативная дистрибутивная алгебра с делимой операцией $A\in\Sigma$, удовлетворяющая равенству (9);

(ii) Существует коммутативная лупа Муфанг $Q(\circ)$, и система ее эндоморфизмов $\{f_X\}$ такая, что $f_X f_Y=f_Y f_X$, $a=f_X a\circ f_X a$ и $X(a,b)=f_X a\circ f_X b$ для всех $a,b\in Q$ и $X,Y\in\Sigma$.

Доказательство. $(i)\rightarrow(ii)$. Следует из предложений 6, 7 и лемм 3, 4, 5 $(ii)\Rightarrow(i)$.

Коммутативность очевидна. Покажем дистрибутивность:

$$X[x,Y(y,z)]=f_X x\circ f_X(f_Y y\circ f_Y z)=f_X(f_Y x\circ f_Y x)\circ f_X(f_Y y\circ f_Y z)=$$

$$(f_X f_Y x\circ f_X f_Y x)\circ(f_X f_Y y\circ f_X f_Y z)=$$

$$=(f_X f_Y x\circ f_X f_Y y)\circ(f_X f_Y x\circ f_X f_Y z)=Y[X(x,y),X(x,z)],$$

т.к. $f_X f_Y=f_Y f_X$ и $Q(\circ)$ - коммутативная лупа Муфанг. Аналогично показывается (9).

Теорема 5. Следующие условия эквивалентны:

(i). $\langle Q;\Sigma\rangle$ - подпрямо-неразложимая коммутативная дистрибутивная алгебра с делимой операцией;

(ii) Существует коммутативная лупа Муфанг $Q(\circ)$, и система ее гомоморфизмов $\{f_X\}$ такая, что $f_X f_Y=f_Y f_X$, $a=f_X a\circ f_X a$ и $X(a,b)=f_X a\circ f_X b$ для всех $a,b\in Q$ и $X,Y\in\Sigma$.

Доказательсто. Рассмотрим подпрямо-неразложимую коммутативную дистрибутивную алгебру с одной делимой операцией. Согласно предложению 6 она идемпотентна, согласно предложению 5 алгебра $\langle Q;\Sigma\rangle$ $\forall$-сократима (или $\langle Q\setminus\{\circ\};\Sigma\rangle$ $\forall$-сократима), согласно теореме 2 она будет триабелевой, в частности она удовлетворяет равенству (9), следовательно, для такой алгебры справедлива теорема 4.

Кафедра высшей алгебры и геометрии *Поступила 12.07.1994*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мовсисян Ю. М.** Сверхтождества и сверхмногообразия в алгебрах. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1990, 232 с.
2. **Мовсисян Ю. М., Давидов С. С.** Об алгебрах со сверхтождествами дистрибутивности. - Межвузовский сб. научных трудов, Математика, Ереван, 1985, N 3, с. 5-26.
3. **Kepka T.** Distributive division groupoids,- Math. Nachr. 1979, v. 876 p. 103-107.

Ս. Ս. ԴԱՎԻԴՈՎ

ԲԱԺԱՆԵԼԻ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅԱՄԲ ՏԵՂԱՓՈԽԵԼԻ ԲԱՇԽԱԿԱՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎՆԵՐ

Ամփոփում

[1] մենագրությունում նկարագրվում են այնպիսի q-հանրահաշիվներ, որոնք բավարարում են բաշխական գերնույնություններին: $\langle Q;\Sigma\rangle$ հանրահաշիվը կոչվում է q-հանրահաշիվ, եթե Σ-ն ունի հակադարձելի գործողություն: Ներկայացված աշխատանքում համանման արդյունք է ապացուցվում բաժանելի գործողություն ունեցող ենթաուղիղ չվերլուծվող հանրահաշիվների համար: