ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1987 Естественные науки

Математика

УДК 517.98

П. Э. МЕЛИК-АДАМЯН

ОПИСАНИЕ СПЕКТРОВ ОПЕРАТОРОВ ДИРАКА

В настоящей работе переносятся на бесконечномерный случай исследования работы [1] для одномерной системы Дирака. Приведено описание спектров самосопряженных расширений D_k оператора D_0 в зависимости от свойств граничных проекторов P_k, задающих такие расширения.

Пусть операторы J и T действуют в гильбертовом пространстве **H** и обладают свойствами

$$J^* = -J,\ J^2 = -I,\ T^* = T,\ T^2 = I,\ JT = -TJ, \qquad (0.1)$$

где I—единичный оператор. Тогда операторы $P_\pm = \frac{1}{2}(I \mp iJ)$ являются взаимно ортогональными проекторами на собственные подпространства $\mathbf{H}_\pm = P_\pm \mathbf{H}$ оператора J, то есть $P_+ + P_- = I$, $iP_+ - iP_- = J$. Предполагая, что $\dim \mathbf{H}_+ = \dim \mathbf{H}_-$, введем в рассмотрения частично изометрические операторы K с начальными подпространствами H_+ и конечными подпространствами $\mathbf{H}_-$, так что $K^*K = P_+$, $KK^* = P_-$, а операторы $P_k = \frac{1}{2}(I + K + K^*)$ являются ортопроекторами на подпространства $\mathbf{H}_k = P_k \mathbf{H}$, причем

$$JP_k + P_kJ = J \quad (P_kJP_k = 0). \qquad (0.2)$$

В гильбертовом пространстве $L_2(R_+, \mathbf{H})$ (**H**-значных векторных функций f(r), квадраты норм которых интегрируемы на неотрицательной полуоси R_+ действительной оси R) рассмотрим дифференциальное выражение

$$d[f] = J\frac{df(r)}{dr} - mTf(r),\ m > 0,\ 0 \leqslant r < \infty,$$

и пусть $D_{(0)}$—минимальный симметрический оператор, порожденный d[f]:

$$D_{(0)}f = d[f],\quad f \in D(D_{(0)}) = \{f \mid f,\ d[f] \in L_2(R_+, \mathbf{H}),\ f(0) = 0\}.$$

В работе [2] доказано, что множество $\{P_k\}$ и множество $\{D_k\}$ всех самосопряженных расширений оператора $D_{(0)}$ находятся во взаимно однозначном соответствии, которое устанавливается формулой

$$\mathring{D}_k f = d[f], \quad f \in D(D_k) = \{f \mid f,\ d[f] \in L_2(R_+, H),\ f(0) = \mathring{P}_k f(0)\}.$$

Операторы D_k называются операторами Дирака с массой $m>0$.

В § 1 настоящей работы приведено описание точечного спектра $\sigma_p(D_k)$ каждого из операторов D_k в зависимости от свойств граничных проекторов P_k, а в § 2 исследована абсолютно непрерывная часть спектра.

В случае, когда $\dim \mathbf{H}_\pm = 1$, такие исследования для системы Дирака с массой проводились в работе [1].

Ниже мы воспользуемся и блочно-матричной записью операторов как в представлении $\mathbf{H} = \mathbf{H}_+ \oplus \mathbf{H}_-$, так и в представлении $\mathbf{H} = \mathbf{H}_k \oplus \mathbf{H}_k^\perp$. Вектору $h \in \mathbf{H}$ сопоставив столбец $h = \begin{bmatrix} h_+ \\ h_- \end{bmatrix}$, $h_\pm = P_\pm h \in \mathbf{H}_\pm$, получим

$$J = \begin{bmatrix} I_+ & 0 \\ 0 & -I_- \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & T_+^* \\ T_+ & 0 \end{bmatrix}, \quad P_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_+ & K_+^* \\ K_+ & J_- \end{bmatrix}, \tag{0.3}$$

где $I_\pm$ — единичные операторы в $\mathbf{H}_\pm$, а операторы $T_+ = T\downarrow \mathbf{H}_+$ и $K_+ = K\downarrow \mathbf{H}_+$ изометрически отображают $\mathbf{H}_+$ на $\mathbf{H}_-$. Отсюда следует, что векторы $h_k = P_k h$ представимы в виде $h_k = \begin{bmatrix} h_{k+} \\ K_+ h_{k+} \end{bmatrix}$, $h_{k+} = P_+ h + K_+^* P_- h$, а переход к представлению $\mathbf{H} = \mathbf{H}_k \oplus \mathbf{H}_k^\perp$ осуществляется унитарным оператором

$$U_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_+ & K_+^* \\ -K_+ & I_- \end{bmatrix}.$$

§ 1. **Точечный спектр оператора Дирака.** Из общей теории спектрального анализа дифференциальных операторов известно (см. [3]), что множество неизолированных точек спектра самосопряженного расширения симметрического оператора не зависит от частного выбора расширения, в то время как точечный спектр σ_p (множество собственных значений) сильно зависит от граничных условий, определяющих такое расширение. В нашем случае граничные условия задаются проекторами P_k и оказывается, что множество $\sigma_p(D_k) \subset (-m, m)$ обусловлено перестановочностью оператоорв P_k и T. Из формул (0.3) следует, что условие $P_k T = T P_k$ равносильно соотношениям $K_+^* T_+ = T_+^* K_+$, $K_+ T_+^* = T_+ K_+^*$, а условие $P_k T \neq T P_k$ — соотношениям $K_+^* T_+ \neq T_+^* K_+$, $K_+ T_+^* \neq T_+ K_+^*$.

Теорема 1. Если $P_k T = T P_k$, то интервал $(-m, m)$ принадлежит резольвентному множеству оператора D_k.

Доказательство. Для функции $f \in \mathbf{D}(D_k)$ имеем

$$\| D_k f \|^2 = \int_0^\infty (Jf'(r) - mTf(r),\ Jf'(r) - mTf(r))dr = \| f' \|^2 + m^2 \| f \|^2, \tag{1.1}$$

поскольку из формул (0.1) интегрированием по частям получим

$$\int_0^\infty (Jf'(r),\ Tf(r))dr + \int_0^\infty (Tf(r),\ Jf'(r))dr = (Jf(r),\ Tf(r))|_0^\infty -$$

$$-\int_0^\infty (Jf(r),\ Tf'(r))dr+\int_0^\infty (Tf(r),\ Jf'(r))dr=-(JP_kf(0),\ TP_kf(0)),$$

а из условия $P_kT=TP_k$ и соотношения (0.2) следует, что

$$(JP_kf(0),\ TP_kf(0))=(P_kJP_kf(0),\ Tf(0))=0.$$

С другой стороны,

$$\|D_kf-\lambda f\|^2=\|D_kf\|^2-2\lambda(D_kf,f)+\lambda^2\|f\|^2\geqslant(\|D_kf\|-|\lambda|\|f\|)^2 \qquad (1.2)$$

и для $\lambda\in(-m,\ m)$ из формул (1.1) и (1.2) окончательно имеем

$$\|D_kf-\lambda f\|\geqslant\|D_kf\|-|\lambda|\|f\|=\sqrt{m^2\|f\|^2+\|f'\|^2}-$$

$$-|\lambda|\|f\|>(m-|\lambda|)\|f\|,$$

что и доказывает теорему.

Обозначим через $\mathscr{E}(r,\ \lambda)$ оператор Коши уравнения Дирака, то есть операторное решение задачи Коши

$$J\frac{d\mathscr{E}(r,\ \lambda)}{dr}-mT\mathscr{E}(r,\ \lambda)=\lambda\mathscr{E}(r,\ \lambda),\ \mathscr{E}(0,\ \lambda)=I.$$

Если $0<\lambda<m$, то, принимая обозначения

$$k(\lambda)=\sqrt{m^2-\lambda^2},\quad J(\lambda)=\frac{1}{k(\lambda)}(mT-\lambda I)J, \qquad (1.3)$$

верхнее уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d\mathscr{E}(r,\ \lambda)}{dr}=k(\lambda)J(\lambda)\mathscr{E}(r,\ \lambda),\ \mathscr{E}(0,\ \lambda)=I.$$

Легко видеть, что $J^2(\lambda)=I$, поэтому для операторов $P_\pm(\lambda)=\frac{1}{2}(I\pm J(\lambda))$ выполнены соотношения $P_\pm(\lambda)P_\mp(\lambda)=0$, $P_\pm^2(\lambda)=P_\pm(\lambda)$, $P_+(\lambda)-P_-(\lambda)=$ $=J(\lambda)$, откуда следует, что для оператора Коши имеем

$$\mathscr{E}(r,\ \lambda)=e^{k(\lambda)J(\lambda)r}=P_+(\lambda)e^{k(\lambda)r}+P_-(\lambda)e^{-k(\lambda)r}.$$

Рассмотрим оператор D_k, отвечающий граничному проектору P_k такому, что $P_kT\neq TP_k$, и пусть $f_0\in\mathbf{D}(D_k)$ является собственной функцией оператора D_k, отвечающей собственному значению $0<\lambda_0<m$. Поскольку $D_kf_0-\lambda_0f_0=0$, то из свойств операторной функции $\mathscr{E}(r,\ \lambda)$ имеем

$$f_0(r)=\mathscr{E}(r,\ \lambda_0)P_kf_0(0)=e^{k(\lambda_0)r}P_+(\lambda_0)h_0+e^{-k(\lambda_0)r}P_-(\lambda_0)h_0,$$

$$h_0=f_0(0)=P_kh_0\in\mathbf{H}_k.$$

Отсюда видно, что $f_0\in L_2(R_+,\mathbf{H})$ тогда и только тогда, когда выполнено условие $P_+(\lambda_0)h_0=0$, которое, учитывая формулы (0.3), представим в виде

$$\left\{\begin{bmatrix} I_+ & 0\\ 0 & I_-\end{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{m^2-\lambda_0^2}}\begin{bmatrix}\lambda_0I_+ & mT_+^*\\ -mT_+ & -\lambda_0I_-\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}h_{0+}\\ K_+h_{0+}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},$$

$$h_0 = \begin{vmatrix} h_{0+} \\ K_+ h_{0+} \end{vmatrix} \in \mathbf{H}_k.$$

Для компонент верхнего соотношения несложными преобразованиями получим

$$\left(1+\frac{\lambda_0}{\sqrt{m^2-\lambda_0^2}}\right)I_+ h_{0+} + \frac{m}{\sqrt{m^2-\lambda_0^2}} T_+^* K_+ h_{0+} = 0; \tag{1.4}$$

$$\left(-i+\frac{\lambda_0}{\sqrt{m^2-\lambda_0^2}}\right)I_+ h_{0+} + \frac{m}{\sqrt{m^2-\lambda_0^2}} K_+^* T_+ h_+ = 0.$$

Условия (1.4) равносильны, поскольку оператор $T_+^* K_+$ нормален.

Если $-m<\lambda_0<0$, то, полагая $k(\lambda_0)=-\sqrt{m^2-\lambda_0^2}$, приходим к условию $P_-(\lambda_0)h_0=P_+(|\lambda_0|)h_0=0$, откуда получим соотношения, совпадающие с (1.4).

Складывая и вычитая соотношения (1.4), получим

$$(\lambda_0 I_+ + mA_k)h_{0+}=0, \quad (\sqrt{m^2-\lambda_0^2}\, I_+ + mB_k)h_{0+}=0, \tag{1.5}$$

где

$$A_k=\frac{1}{2}(T_+^* K_+ + K_+^* T_+)=A_k^*, \quad B_k=\frac{1}{2i}(T_+^* K_+ - K_+^* T_+)=B_k^*, \quad A_k^2+B_k^2=I_+. \tag{1.6}$$

Если $\lambda \in R_{(m)}=R\setminus[-m, m]$, то, обозначая

$$k(\lambda)=\operatorname{sign}\lambda\sqrt{\lambda^2-m^2}, \quad J(\lambda)=\frac{1}{k(\lambda)}(mT-\lambda I)J,$$

получим $J^2(\lambda)=-I$. Тогда $P_\pm(\lambda)=\frac{1}{2}(I\mp iJ(\lambda))$, $J(\lambda)=iP_+(\lambda)-iP_-(\lambda)$ и для оператора Коши $\mathscr{E}(r, \lambda)$ получим

$$\mathscr{E}(r, \lambda)=P_+(\lambda)e^{ik(\lambda)r}+P_-(\lambda)e^{-ik(\lambda)r}.$$

Отсюда следует, что собственные значения оператора D_k не могут принадлежать множеству $R_{(m)}$. Если $\lambda=\pm m$, то $\mathscr{E}(r, \pm m)=I-m(T\mp I)Jr$, следовательно, и эти значения λ не принадлежат $\sigma_p(D_k)$.

Вышеприведенные рассуждения вместе с первой из формул (1.5) доказывают, что справедлива

Теорема 2. Точечный спектр $\sigma_p(D_k)$ оператора D_k принадлежит интервалу $(-m, m)$ и совпадает с множеством $(-m, m)\cap -m\sigma_p(A_k)$. Если $\lambda_0 \in \sigma_p(D_k)$, то соответствующей собственной функцией оператора D_k является функция $f_0(r)=e^{-|k(\lambda_0)|r}\begin{vmatrix} h_0 \\ K_+ h_0 \end{vmatrix}$, где $h_0 \in \mathbf{H}_+$ — собственный вектор оператора $-mA_k$, отвечающий собственному значению λ_0.

Теорему 2 можно дополнить в случае, когда пространство $\mathbf{H}$ предполагается конечномерным и $\dim \mathbf{H}_\pm = n<\infty$. Именно, если $P_k T\neq TP_k$, то действующий в конечномерном пространстве $\mathbf{H}_+$ ненулевой самосопряженный оператор A_k не является унитарным ($B_k\neq 0$), поэтому множество $\sigma_p(D_k)=(-m, m)\cap -m\sigma_p(A_k)$ всегда не пусто и состоит из не более, чем n точек. Поскольку в этом случае индексы дефекта оператора D_0 конечны ($d_\pm = n$), то из теоремы 1 следует, что дополнение $(-m, m) \setminus \sigma_p(D_k)$ точечного спектра является резольвентным множеством оператора D_k (см. [4]). Отметим, что в случае бесконечномерного $\mathbf{H}$ точечный спектр оператора D_k может отсутствовать и при условии $P_kT \neq TP_k$, поскольку самосопряженный оператор A_k может и не иметь собственных значений.

§ 2. Абсолютно непрерывная часть спектра оператора Дирака. Обозначим через $N_k(\lambda_0)$ — собственное подпространство оператора D_k, отвечающее собственному значению λ_0. Поскольку множество $\sigma_p(D_k)$ не более, чем счетно, то $\sigma_p(D_k) = \{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$. Пусть $P_k(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $P_k^{(s)}$ — ортопроекторы на подпространства $\mathbf{N}_k[n] = \bigoplus\limits_{j=1}^{n} N_k(\lambda_j)$ и $\mathbf{N}_k^{(s)} = \bigoplus\limits_{j=1}^{\infty} N_k(\lambda_j)$.

Каждое из подпространств $\mathbf{N}_k[n]$ приводит оператор D_k, поскольку очевидно $\mathbf{N}_k[n] \subset \mathbf{D}(D_k)$, а так как $\sigma_p(D_k) \in (-m, m)$, то $\|D_k f_n\| < m\|f_n$, $f_n \in \mathbf{N}_k[n]$. Покажем, что для оператора D_k приводящим является и подпространство $\mathbf{N}_k^{(s)}$. Пусть $D_k^{(s)} = \mathbf{D}(D_k) \cap \mathbf{N}_k^{(s)}$. Для доказательства приводимости достаточно установить равенство $D_k^{(s)} = P_k^{(s)}\mathbf{D}(D_k)$. Поскольку включение $D_k^{(s)} \subset P_k^{(s)}\mathbf{D}(D_k)$ очевидно, проверим $P_k^{(s)}\mathbf{D}(D_k) \subset D_k^{(s)}$. Пусть $f = P_k^{(s)}g$, $g \in \mathbf{D}(D_k)$. Так как последовательность проекторов $P_k(n)$ сильно сходится к проектору $P_k^{(s)}$, то $f_n \to f$, где $f_n = P_k(n)g \in \mathbf{D}(D_k)$. Но $f_n - f_{n+p} \in \mathbf{N}_k[n+p]$, поэтому $\|D_k(f_n - f_{n+p})\| < m\|f_n - f_{n+p}\|$, следовательно, сходится и последовательность $D_k f_n$. Из замкнутости оператора D_k окончательно имеем $f \in \mathbf{D}(D_k)$ и $D_k f \in \mathbf{N}_k^{(s)}$.

Пусть $L_2(R_+, \mathbf{H}) = \mathbf{N}_k^{(s)} \oplus \mathbf{N}_k^{(a)}$, $\mathbf{N}_k^{(a)} = (\mathbf{N}_k^{(s)})^\perp$ и $D_k^{(a)} = D_k \downarrow \mathbf{N}_k^{(a)}$. Для исследования спектра оператора $D_k^{(a)}$ оператор D_k будем рассматривать как возмущенный относительно канонического оператора C_k, получающегося из D_k при $m = 0$, то есть $D_k = C_k + mT$. Если через $\mathscr{E}_0(r, \lambda) = e^{-J\lambda r} = P_- e^{-i\lambda r} + P_+ e^{i\lambda r}$ обозначим оператор Коши канонического уравнения, то спектральное представление оператора C_k определится формулами

$$\begin{cases} \tilde{f}(t) = (\mathbf{F}f)(t) = \underset{R\to\infty}{l.i.m.} \displaystyle\int_0^R \Phi_k^*(r, t) f(r)\,dr, \quad f \in L_2(R_+, \mathbf{H}), \\ f(r) = (\mathbf{F}^{-1}\tilde{f})(r) = \underset{N\to\infty}{l.i.m.} \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-N}^{N} \Phi_k(r, t)\tilde{f}(t)\,dt, \quad \tilde{f} \in L_2(R, \mathbf{H}_k), \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\Phi_k(r, t) = \mathscr{E}_0(r, t)P_k$. Это означает, что оператор $\mathbf{F}$ изометрически отображает пространство $L_2(R_+, \mathbf{H})$, на $L_2(R, \mathbf{H}_k)$ так, что оператор C_k переходит в оператор умножения на независимую переменную

$$(\mathbf{F}C_k\mathbf{F}^{-1}\tilde{f})(t) = t\tilde{f}(t).$$

Найдем образ оператора T в $L_2(R, \mathbf{H}_k)$. Из формул (2.1) имеем

$$(\tilde{T}\tilde{f})(t) = (\mathbf{F}T\mathbf{F}^{-1}\tilde{f})(t) = \frac{1}{\pi} \underset{R\to\infty}{l.i.m.} \int_0^R \Phi_k^*(r, t) T \left[\underset{N\to\infty}{l.i.m.} \int_{-N}^{N} \Phi_k(r, s)\tilde{f}(s)\,ds \right] dr.$$

В силу изометричности отображений (2.1) достаточно рассмотреть функции $\tilde{f}(s)$ из плотного в $L_2(R, \mathbf{H}_k)$ линейного многообразия $L_2(R, \mathbf{H}_k)\cap L_1(R, \mathbf{H}_k)$. Для таких $\tilde{f}(s)$ верхнее соотношение примет вид

$$(\tilde{T}\tilde{f})(t)=\frac{1}{\pi} l.\underset{R\to\infty}{\mathrm{l.m.}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{R}[\Phi_k^*(r, t)T\Phi_k(r, s)dr]\tilde{f}(s)ds. \tag{2.2}$$

Перестановка порядка интегрирования здесь законна, поскольку операторная функция $\Phi_k^*(r, t)T\Phi_k(r, s)$ интегрируема по Бохнеру на полосе $(0\leqslant r\leqslant R, -\infty<s<\infty)$. Из свойств оператора Коши $\mathscr{E}_0(r, \lambda)$ и формул (0.1) имеем

$$\mathscr{E}_0^*(r, t)T\mathscr{E}_0(r, s)=\frac{1}{t+s}\frac{d}{dr}[\mathscr{E}_0^*(r, t)TJ\mathscr{E}_0(r, s)],$$

поэтому

$$\int_0^R\Phi_k^*(r, t)T\Phi_k(r, s)dr=\frac{1}{t+s}P_k[\mathscr{E}_0^*(R, t)TJ\mathscr{E}_0(R, s)-TJ]P_k. \tag{2.3}$$

Выражение в квадратных скобках можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{i}P_k\,[(e^{i(t+s)R}-1)P_+-(e^{-i(t+s)R}-1)P_-]TP_k$$

и из формулы (2.3) получить

$$\int_0^R\Phi_k^*(r, t)T\Phi_k(r, s)dr=\frac{1}{2i}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\frac{1}{t+s+i\varepsilon}+\frac{1}{t+s-i\varepsilon}\right)P_k[(e^{i(t+s)R}-1)P_+-$$

$$-(e^{-i(t+s)R}-1)P_-]TP_k.$$

Отсюда, обращаясь к формуле (2.2) и принимая обозначения

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(s)ds}{s+t\pm i\varepsilon}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(s)ds}{s+t\pm i0},$$

получим

$$(\tilde{T}\tilde{f})(t)=\frac{1}{2\pi i}\underset{R\to\infty}{l.\mathrm{i.m}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{s+t+i0}+\frac{1}{s+t-i0}\right)P_k[e^{i(s+t)R}P_+-$$

$$-e^{-i(s+t)R}P_-+iJ]TP_k\tilde{f}(s)ds. \tag{2.4}$$

Обозначим через $H_2^{\pm}(R, \mathbf{H}_k)$ пространства функций $\tilde{f}^{\pm}(t)$ вида

$$f^{\pm}(t)=\int_0^{\infty}e^{\pm its}f(s)ds,\quad f(s)\in L_2(R_+, \mathbf{H}_k).$$

и пусть $\Pi^{\pm}$—взаимно ортогональные проекторы в $L_2(R, \mathbf{H}_k)$ на подпространства $H_2^{\pm}(R, \mathbf{H}_k)$, задаваемые формулами

$$(\Pi^{\pm}\tilde{f})(t)=\pm\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{f}(s)ds}{s-(t\pm i0)},\quad \tilde{f}(s)\in L_2(R, \mathbf{H}_k). \tag{2.5}$$

Отсюда нетрудно убедиться в справедливости соотношений

$$\begin{gathered}\underset{R\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\pm i(s-t)R}}{s-(t\pm i0)}\tilde{f}(s)ds=\pm\tilde{f}(t),\\ \underset{R\to\infty}{l.i.m.}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\mp i(s-t)R}}{s-(t\pm i0)}\tilde{f}(s)ds=0,\quad \tilde{f}(s)\in L_2(R, \mathbf{H}_k).\end{gathered} \tag{2.6}$$

Обращаясь к (2.4) и пользуясь формулами (2.5) и (2.6), получим

$$(\tilde{T}\tilde{f})(t)=P_kTP_k\tilde{f}(-t)+P_kiJTP_k[(\Pi^{+}-\Pi^{-})\tilde{f}](-t).$$

Если от представления $\mathbf{H}=\mathbf{H}_{+}\oplus\mathbf{H}_{-}$ перейти к представлению $\mathbf{H}=\mathbf{H}_k\oplus\oplus\mathbf{H}_k^{\perp}$, то из формул (0.3) и (1.6) окончательно имеем

$$(\tilde{T}\tilde{f})(t)=A_k\tilde{f}(-t)+iB_k[(\Pi^{+}-\Pi^{-})\tilde{f}](-t).$$

Этим доказана

Теорема 3. В спектральном представлении оператора C_k образом оператора D_k является оператор

$$(\tilde{D}_k\tilde{f})(t)=t\tilde{f}(t)+m\{A_k\tilde{f}(-t)+iB_k[(\Pi^{+}-\Pi^{-})\tilde{f}](-t)\}, \tag{2.7}$$

действующий в пространстве $L_2(R, \mathbf{H}_k)$.

Несложный подсчет показывает, что F-образами собственных функций оператора D_k вида $f_0(r)=e^{-ik(\lambda_0)ir}\mathbf{h}_0$ $(h_0\in\mathbf{H}_k)$ являются собственные функции оператора $\tilde{D}_k$ вида $\tilde{f}_0(t)=\dfrac{k(\lambda_0)}{k^2(\lambda_0)+t^2}h_0$, так что F-образом подпространства $N_k^{(s)}$ является подпространство $L_2^{(s)}(R, \mathbf{H}_k)$ (минимальное подпространство в $L_2(R, \mathbf{H}_k)$, содержащее собственные функции оператора $\tilde{D}_k$), очевидно, приводящее оператор $\tilde{D}_k$. Пусть $L_2^{(a)}(R,\mathbf{H}_k)=(L_2^{(s)}(R, \mathbf{H}_k))^{\perp}$, $\tilde{D}_k^{(a)}=D(\tilde{D}_k)\cap L_2^{(a)}(\mathbf{R}, \mathbf{H}_k)$, $\tilde{D}_k^{(a)}=\tilde{D}_k|D_k^{(a)}$.

В пространстве $L_2(R, \mathbf{H}_k)$ рассмотрим операторы $J[f(t)]=f(-t)$ и $Q=\Pi^{+}-\Pi^{-}$. Очевидно, что

$$J^*=J,\ J^2=I,\ Q^*=Q,\ Q^2=I \tag{2.8}$$

и, кроме того, оператор J антиперестановочен как с оператором Q, так и с оператором умножения на независимую переменную, то есть

$$JQ=-QJ,\ J[tf(t)]=-tJ[f(t)]. \tag{2.9}$$

Обозначим $s=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+m^2}}$. Так как $|s|<1$, то действующие в $L_2(R, \mathbf{H}_k)$

операторы $I \pm sQ$ положительны и пусть $Q_{\pm} = \sqrt{I \pm sQ}$ —положительные квадратные корни этих операторов. Используя соотношения (2.8), (2.9) и (1.6), можно проверить, что действующий в $L_2(R, \mathbf{H}_k)$ оператор

$$Z = \frac{1}{2}\{Q_+(I-QJ) - Q_-[A_k(I+QJ) - iB_kQ(I-QJ)]\}$$

унитарен. Пусть $\hat{D}_k = Z\tilde{D}_k$, $\hat{D}_k^{(a)} = Z\tilde{D}_k^{(a)}$. Очевидно, что $\hat{D}_k^{(a)} = Z\tilde{D}_k^{(a)}Z^* = Z\tilde{D}_kZ^* \downarrow \hat{D}_k^{(a)}$. Снова воспользовавшись соотношениями (2.8), (2.9), (1.6), можно убедиться в справедливости формулы

$$\hat{D}_k^{(a)} = Z\tilde{D}_k^{(a)}Z^* = \sqrt{t^2+m^2}\, J \downarrow L_2^{(a)}(R, \mathbf{H}_k). \tag{2.10}$$

Отождествим пространство $L_2(R, \mathbf{H}_k)$ с пространством $L_2(R^+, \mathbf{H}_k \oplus \mathbf{H}_k)$ двухкомпонентных векторных функций $\tilde{F}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{f}_+(t) \\ \tilde{f}_-(t) \end{bmatrix}$, $t \geqslant 0$ с помощью формулы $\tilde{f}_{\pm}(t) = \tilde{f}(\pm t)$, $t > 0$, $\tilde{f}(t) \in L_2(R, \mathbf{H}_k)$. Тогда образом оператора $\hat{D}_k^{(a)}$ будет действующий в $L_2(R_+, \mathbf{H}_k \oplus \mathbf{H}_k)$ оператор

$$D_k^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{t^2+m^2}\, I \\ \sqrt{t^2+m^2}\, I & 0 \end{bmatrix} \downarrow L_2^{(a)}(R_+, \mathbf{H}_k \oplus \mathbf{H}_k).$$

Очевидно, что

$$UD_k^{(a)}U^* = \begin{bmatrix} \sqrt{t^2+m^2}\, I & 0 \\ 0 & -\sqrt{t^2+m^2}\, I \end{bmatrix}, \text{ где } U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I & I \\ -I & I \end{bmatrix}, \quad U^* = U^{-1}.$$

Отсюда, возвращаясь в пространство $L_2(R, \mathbf{H}_k)$, окончательно получаем, что оператор $D_k^{(a)}$ унитарно эквивалентен оператору умножения на функцию $\operatorname{sign} t\sqrt{t^2+m^2}$, то есть оператору $\bar{D}_k^{(a)} = \operatorname{sign} t\sqrt{t^2+m^2}\, I$ в $L_2^{(a)}(R, \mathbf{H}_k)$.

Из полученной формулы видно, что интервал $(-m, m)$ является резольвентным множеством оператора $D_k^{(a)}$, поскольку оператор

$$R(\lambda, \bar{D}_k^{(a)}) = (\lambda I - \bar{D}_k^{(a)})^{-1} = \frac{1}{\lambda^2 - (t^2+m^2)}(\lambda + \operatorname{sign} t\sqrt{t^2+m^2})I,$$

$$\lambda \in (-m, m)$$

ограничен.

Для вычисления спектральной функции оператора $\bar{D}_k^{(a)}$ воспользуемся формулой (см. [3])

$$E((a, b)) = \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int^{b-\delta} [R(\lambda - i\varepsilon, \bar{D}_k^{(a)}) - R(\lambda + i\varepsilon, \bar{D}_k^{(a)})]\, d\lambda.$$

Следуя выкладкам, приведенным в [3], получим

$$E((a,\ b))=\begin{cases}\chi(\sqrt{a^2-m^2},\quad \sqrt{b^2-m^2}),\ m<a<b,\\ \chi(-\sqrt{a^2-m^2},\ -\sqrt{b^2-m^2},\ a<b<-m,\end{cases}$$

где $\chi(\alpha,\ \beta)$—характеристическая функция интервала $(\alpha\ ,\beta)$. Этим доказана

Теорема 4. В области $R_{(m)}$ спектр оператора $D_k^{(a)}$ абсолютно непрерывен.

Кафедра высшей математики
физического факультета

Поступила 3.09.1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Titchmarsh E. C.* Some eigenfunction expansion formulae.—Proc. London Math. Soc., 1961, № 41, v. 11.
2. *Мелик-Адамян Ф. Э.* О канонических дифференциальных операторах в гильбертовом пространстве.—Изв. АН Арм. ССР. (Мат.), 1977, т. 12, № 6.
3. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. М.: Мир, 1966, т. 2.
4. *Бирман М. Ш. Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Изд-во ЛГУ, 1980.

Ամփոփում

Այստեղ Դիրակի միաչափ համակարգի վերաբերյալ [1] աշխատանքի հետազոտությունները ընդհանրացվում են անվերջ չափանի դեպքի համար։ Բերված է D_0 օպերատորի D_k ինքնահամալուծ ընդլայնումների սպեկտրների նկարագրությունը՝ կախված այդպիսի ընդլայնումները որոշող P_k եզրային պրոյեկտորների հատկություններից։

Summary

In the present paper the investigations of the parer [1] on one-dimensional Dirac system are generalized for the infinite-dimensional case. The description of spectra of selfadjoint extensions D_k of the operator D_0 is given depending on the properties of boundary projectors P_k which determine such extensions.