ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ　　1, 1982　　Естественные науки

Математика

УДК 519.6

М. Д. ГРИГОРЯН, С. А. АЮНЦ

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Настоящая статья посвящена решению трех конкретных задач оптимального управления, которые являются обобщениями задачи Бушау.

Здесь даются полный синтез и обоснование существования решений этих задач.

Пусть имеется объект, совершающий прямолинейное движение под воздействием внешней силы, которую можно изменять в заданных пределах. Требуется остановить объект в определенном положении в кратчайшее время с минимальной затратой ресурсов на формирование управляющего воздействия.

Задача формализуется следующим образом:

$$\text{I.}\quad \int_0^T (1+\varepsilon|u|)dt \to \inf, \quad \ddot{x}=u, \quad |u|\leqslant 1,$$

$$x(0)=x_0, \quad \dot{x}(0)=v_0,$$

$$\varepsilon\geqslant 0, \quad T\text{—свободно}, \quad x(T)=\dot{x}(T)=0.$$

При $\varepsilon=0$ она переходит в классическую задачу оптимального быстродействия.

Формализованную выше задачу I так же, как и следующие далее II и III, будем решать применением принципа Лагранжа для задач оптимального управления [1—3].

Приступим к решению задачи I.

Введя фазовые координаты $x_1=x$, $x_2=\dot{x}$, переходим к следующей задаче:

$$\int_0^T (1+\varepsilon|u|)dt \to \inf \quad \begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=u,\end{cases} \tag{1}$$

$$\left|\begin{array}{l} x_1(0)=x_0, \quad x_2(0)=v_0,\\ x_1(T)=x_2(T)=0,\end{array}\right.$$

$\varepsilon\geqslant 0$, T—свободно.

Составим функцию Лагранжа

$$\bar{L}(x_1(\cdot),\ x_2(\cdot),\ u(\cdot),\ \hat{p}_1(\cdot),\ \hat{p}_2(\cdot),\ \hat{\lambda}_0,\ \hat{\lambda}_1,\ \hat{\lambda}_2,\ \hat{\mu}_1,\ \hat{\mu}_2) = \int_0^T L dt + l,$$

где

$$L(t,\ x_1,\ x_2,\ u) = \hat{\lambda}_0(1+\varepsilon|u|) + \hat{p}_1(\dot{x}_1 - x_2) + \hat{p}_2(\dot{x}_2 - u),$$

$$l(x_1(0),\ x_2(0),\ x_1(T), x_2(T)) = \hat{\lambda}_1(x_1(0) - x_0) + \hat{\lambda}_2(x_2(0) - v_0) + \hat{\mu}_1 x_1(T) + \\ + \hat{\mu}_2 x_2(T).$$

Уравнения Эйлера для функции L имеют вид

$$\dot{\hat{p}}_1 = 0, \tag{2}$$

$$-\dot{\hat{p}}_2 - \hat{p}_1 = 0. \tag{3}$$

Выпишем условия трансверсальности

$$\hat{p}_1(0) = \hat{\lambda}_1,\quad \hat{p}_2(0) = \hat{\lambda}_2,\quad \hat{p}_1(\hat{T}) = -\hat{\mu}_1,\quad \hat{p}_2(\hat{T}) = -\hat{\mu}_2, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial L}{\partial T}\right|_{T=\hat{T}} = \hat{\lambda}_0(1 + \varepsilon|\hat{u}(\hat{T})|) + \hat{\mu}_1\dot{\hat{x}}_1(\hat{T}) + \hat{\mu}_2\dot{\hat{x}}_2(\hat{T}) = 0. \tag{5}$$

Если допустить, что $\hat{\lambda}_0 = 0$, то из условия минимальности по u

$$\hat{\lambda}_0\varepsilon|u| - \hat{p}_2(t)u \to \inf,\ |u| \leqslant 1, \tag{6}$$

имеем $\hat{u}(t) = \operatorname{sign}\hat{p}_2(t)$. Из (5) и граничных условий следует, что $\hat{\mu}_2\hat{u}(\hat{T}) = 0$. Из условий трансверсальности (4) получим

$$\hat{u}(\hat{T})\hat{p}_2(\hat{T}) = \hat{p}_2(\hat{T})\operatorname{sign}\hat{p}_2(\hat{T}) = |\hat{p}_2(\hat{T})| = 0, \text{ т. е. } \hat{p}_2(\hat{T}) = 0.$$

Но ввиду (2) и (3) $\hat{p}_2(t) = c(t - \hat{T})$, и $\hat{p}_2(t)$ не меняет знак в интервале $[0, \hat{T}]$. Заметим, что $c \neq 0$, в противном случае все множители Лагранжа были бы равны нулю. Значит, $\hat{u}(t) \equiv 1$ или $\hat{u}(t) \equiv -1$. Следовательно, если $(x_0, v_0) \bar{\in} \Gamma$, где

$$\Gamma = \left\{(x_1,\ x_2),\quad \begin{array}{l} x_1 = x_2^2/2,\quad x_2 \leqslant 0, \\ x_1 = -x_2^2/2,\ x_2 > 0, \end{array}\right\}$$

то $\hat{\lambda}_0 = 1$, ибо если $\hat{\lambda}_0 = 0$ и $(x_0, v_0) \bar{\in} \Gamma$, то $(\hat{u}(t),\ \hat{x}(t))$ — недопустимая пара.

Из (2) и (3) следует, что $\hat{p}_2(t) = at + b$, а из (4) и (5) имеем

$$1 + \varepsilon|\hat{u}(\hat{T})| - \hat{p}_2(\hat{T})\hat{u}(\hat{T}) = 0. \tag{7}$$

Условие минимальности по u при $\hat{\lambda}_0 = 1$ имеет вид

$$\varepsilon|u| - \hat{p}_2(t)u \to \inf, \quad |u| \leqslant 1,$$

откуда

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } |\hat{p}_2(t)| \leqslant \varepsilon, \\ \operatorname{sign}\hat{p}_2(t) & \text{при } |\hat{p}_2(t)| > \varepsilon. \end{cases}$$

Из условия (7) имеем $\hat{u}(\hat{T}) \neq 0$, поэтому $\hat{u}(\hat{T}) = \operatorname{sign}\hat{p}_2(\hat{T})$ и, следовательно, $|\hat{p}_2(\hat{T})| = 1+\varepsilon$.

Возможны два симметричных варианта:

а) $\hat{p}_2(\hat{T}) = 1+\varepsilon$ или б) $\hat{p}_2(\hat{T}) = -(1+\varepsilon)$

в зависимости от начальных условий (x_0, v_0).

Рассмотрим случай а).

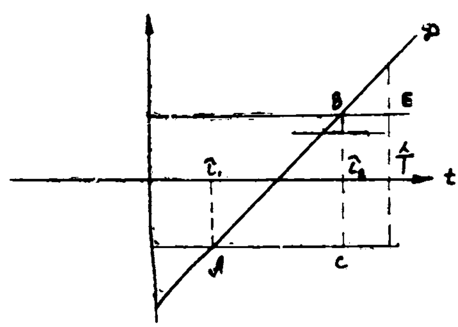

Рис. 1.

На рис. 1 через τ_1 и τ_2 обозначены моменты переключения. Управление в этом случае имеет вид

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -1 & 0 \leqslant t < \tau_1, \\ 0 & \tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2, \\ 1 & \tau_2 < t \leqslant \hat{T}. \end{cases}$$

При $u=-1$ семейство траекторий в фазовой плоскости (x_1, x_2) есть $x_1 = -x_2^2/+c$, а при $u=1$ есть $x_1 = x_2^2/2+c$. При $u=0$ получаются прямые, параллельные оси x_1.

Из подобия треугольников ABC и BDE (рис. 1) имеем

$(\hat{T}-\tau_2)/(\tau_2-\tau_1) = 1/2\varepsilon$.

Ввиду постоянства скорости x_2 в промежутке $[\tau_1, \tau_2]$ $x_1(\tau_2) - x_1(\tau_1) = x_2(\tau_2)(\tau_2-\tau_1)$. **(8)**

Из уравнений движения (1) на $[\tau_2, \hat{T}]$, где управление равно 1, получим $x_2(\tau_2) = \tau_2 - \hat{T}$, $x_1(\tau_2) = (\hat{T}-\tau_2)^2/2$.

Далее, используя (8), найдем

$$x_1(\tau_1)=x_1(\tau_2)-x_2(\tau_2)(\tau_2-\tau_1)=\frac{(\hat{T}-\tau_2)^2}{2}+2\varepsilon(\hat{T}-\tau_2)^2=$$

$$=\frac{1+4\varepsilon}{2}x_2^2(\tau_1).$$

Следовательно, в случае а) линия переключения от управления $u=-1$ к $u=0$ есть кривая $x_1=(1+4\varepsilon)x_2^2/2$, $x_2\leqslant 0$. Легко убедиться, что вторая линия переключения от 0 к 1 есть кривая $x_1=x_2^2/2$, $x_2\leqslant 0$.

Анализируя случай б), окончательно приходим к следующей картине (рис. 2).

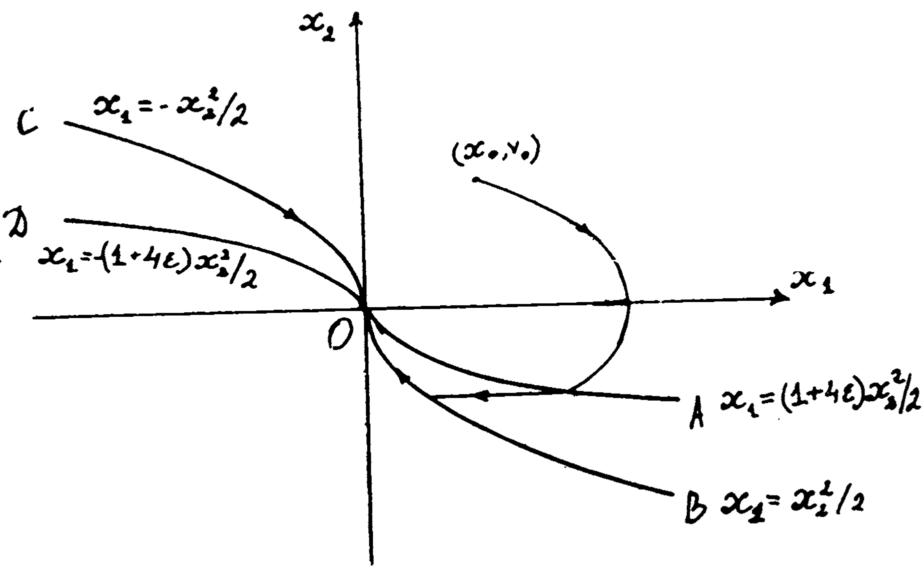

Рис. 2.

Выпишем функцию синтеза для задачи 1.

$$u(x_1,x_2)=\begin{cases}0, & \text{если } (x, x_2) \text{ находится на линии AOD или между AOD и BOC.}\\ -1 & \text{„ „ выше линии AOC и на дуге CO.}\\ 1 & \text{„ „ ниже линии BOC и на дуге BO.}\end{cases}$$

Заметим, что при $\varepsilon=0$ кривая AOD совпадает с кривой Г, что полностью соответствует задаче оптимального быстродействия.

Рассмотрим теперь следующую задачу:

$$\text{II}\quad \int_0^T(1+\varepsilon u^2)dt\to\inf,\quad \ddot{x}=u,\quad |u|\leqslant 1,\quad x(0)=x_0,\quad \dot{x}(0)=v_0,$$

$$\varepsilon\geqslant 0,\quad T-\text{свободно},\qquad x(T)=\dot{x}(T)=0.$$

«Техническое» содержание задачи II то же самое, что и в задаче I.

После введения фазовых координат, легко увидеть, что здесь уравнения Эйлера и условия трансверсальности те же самые, что и в I, кроме условия стационарности по T, которое имеет вид

$$\left.\frac{\partial L}{\partial T}\right|_{T=\hat{T}} = \hat{\lambda}_0(1+\varepsilon\hat{u}^2(\hat{T})) + \hat{\mu}_1\dot{\hat{x}}_1(\hat{T})+\hat{\mu}_2\dot{\hat{x}}_2(\hat{T})=0. \tag{9}$$

Как и в задаче I, можно убедиться, что при $(x_0, v_0) \bar{\in} \Gamma$ $\hat{\lambda}_0$ равно единице.

Используя принцип минимума, уравнение Эйлера и полагая $\hat{\lambda}_0=1$, находим вид оптимального управления:

$$\hat{u}(t)=\begin{cases} \hat{p}_2(t)/2\varepsilon, & \text{если } |\hat{p}_2(t)|\leqslant 2\varepsilon; \\ \operatorname{sign}\hat{p}_2(t), & \text{если } |\hat{p}_2(t)|>2\varepsilon, \end{cases} \tag{10}$$

где $\hat{p}_2(t)=at+b$. С помощью граничных условий и условий трансверсальности выражение (9) преобразуется к

$$1+\varepsilon[\hat{u}(\hat{T})]^2-\hat{p}_2(\hat{T})\hat{u}(\hat{T})=0. \tag{11}$$

Из (10) и (11) для $\hat{p}_2(\hat{T})$ следует возможность двух вариантов:

1) $|\hat{p}_2(\hat{T})|=1+\varepsilon$ или 2) $\hat{p}_2(\hat{T})=2\varepsilon\hat{u}(\hat{T})$.

Причем, используя (10), в варианте 1) получим $\varepsilon<1$, а с учетом (10) и ограничения $|u|\leqslant 1$ для варианта 2) будем иметь $\varepsilon\geqslant 1$.

Рассмотрим вариант 1) $|\hat{p}_2(\hat{T})|=1+\varepsilon$.

Здесь возможно два симметричных случая: а) $\hat{p}_2(\hat{T})=1+\varepsilon$; б) $\hat{p}_2(\hat{T})=-(1+\varepsilon)$.

В случае а) нетрудно убедиться, что управление, выраженное через моменты переключения, выглядит так:

$$\hat{u}(t)=\begin{cases} -1 & 0\leqslant t<\tau_1, \\ \dfrac{2}{\tau_2-\tau_1}(t-\tau_1), & \tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2, \\ 1 & \tau_2<t\leqslant\hat{T}. \end{cases}$$

Соответствующее решение уравнений (1) на интервале $[\tau_1, \tau_2]$ имеет вид

$$x_2(t)=\frac{2}{\tau_2-\tau_1}\frac{(t-\tau_1)^2}{2}-(t-\tau_1)+x_2(\tau_1),$$

$$x_1(t)=\frac{1}{\tau_2-\tau_1}(t-\tau_1)^3-\frac{(t-\tau_1)^2}{2}+x_2(\tau_1)(t-\tau_1)+x_1(\tau_1),$$

откуда имеем

$$x_2(\tau_2)=x_2(\tau_1), \tag{12}$$

$$x_1(\tau_2)=-\frac{1}{6}(\tau_2-\tau_1)^2+x_2(\tau_1)(\tau_2-\tau_1)+x_2(\tau_1). \tag{13}$$

Учитывая соотношения (12) и (13), получаем уравнение кривой переключения от управления $u=-1$ к $u=(at+b)/2\varepsilon$,

$$x_1=\varphi(\varepsilon)x_2^2, \quad \text{где} \quad \varphi(\varepsilon)=\frac{\delta\varepsilon^2}{3(\varepsilon-1)^2}+\frac{4\varepsilon}{1-\varepsilon}+\frac{1}{2}.$$

Таким образом, объединяя два симметричных случая а), б), при $0<\varepsilon<1$ получаем такую фазовую картину (рис. 3).

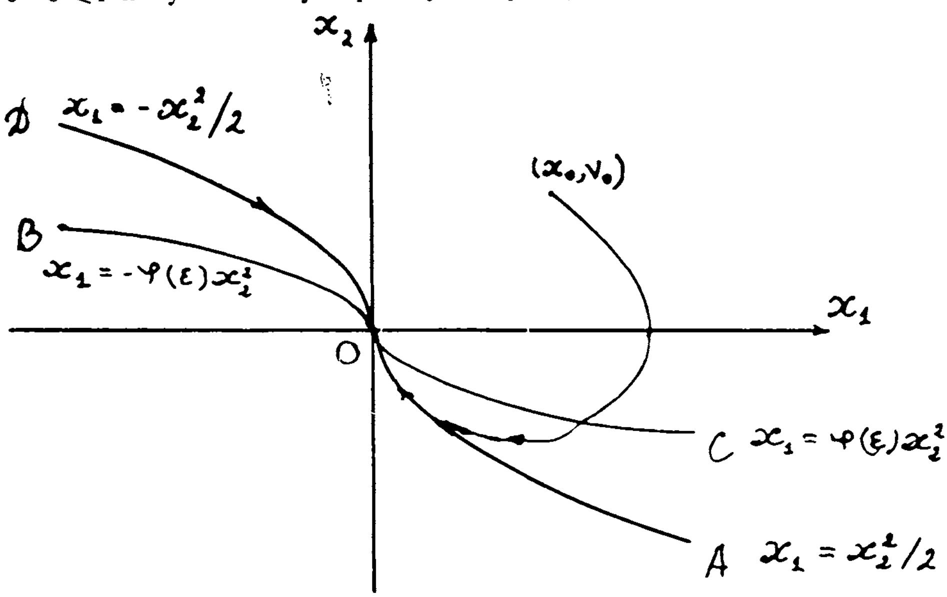

Рис. 3.

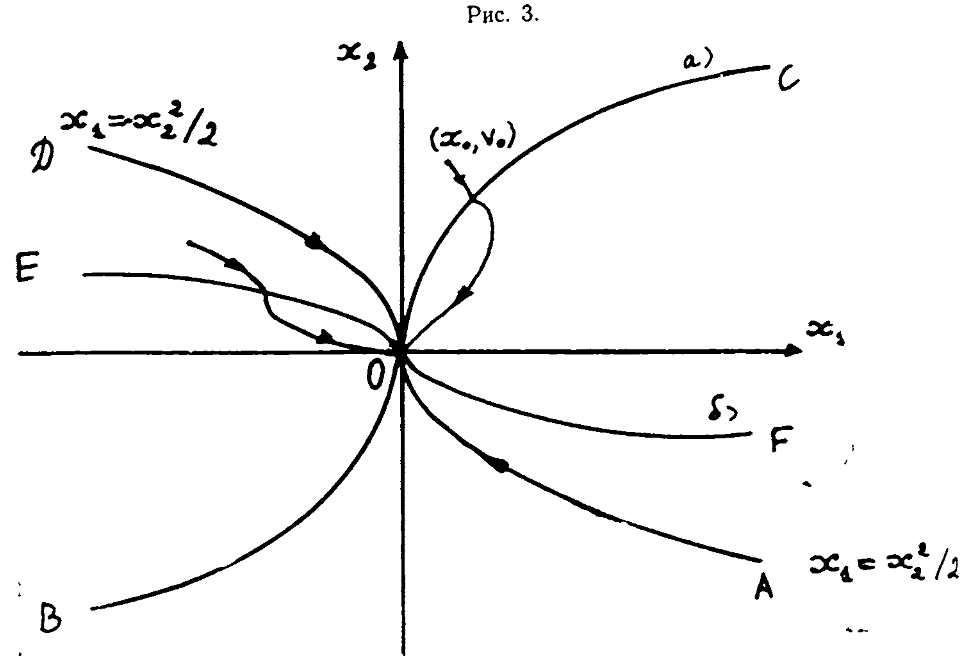

Рис. 4.

Выше линии DOC и на дуге DO управление равно -1, а ниже линии AOB и на дуге AO—1. И наконец между линиями DOC и AOB и на BOC управление равно $(at+b)/2\varepsilon$. Заметим, что постоянные a и b можно выразить через x_0 и v_0.

При $\varepsilon=1$ линия переключения $x_1=\varphi(\varepsilon)x_2^2$ совпадает с осью x_1. Синтез при $1<\varepsilon<4$ имеет следующий вид (рис. 4).
Уравнения кривых а), б) соответственно есть

$$\text{а) } x_1=-\frac{2}{3}\frac{(\varepsilon-2\sqrt{\varepsilon})}{(\sqrt{\varepsilon}-1)}x_2^2 \quad x_2\geqslant 0; \quad \text{б) } x_1=\frac{2}{3}\frac{(\varepsilon+2\sqrt{\varepsilon})}{(\sqrt{\varepsilon}+1)^2}x_2^2 \quad x_2\leqslant 0,$$

при $x_2\leqslant 0$ ($\geqslant$) знаки правых частей меняются на обратные. Оптимальное управление равно -1 вверх от линии EOC, 1—вниз от линии BOF и $(at+b)/2\varepsilon$—между линиями EOC и BOF. При $\varepsilon=4$ кривая а) совпадает с осью x_2.

Когда $4<\varepsilon<9$, фазовая картина принимает следующий вид (рис. 5).

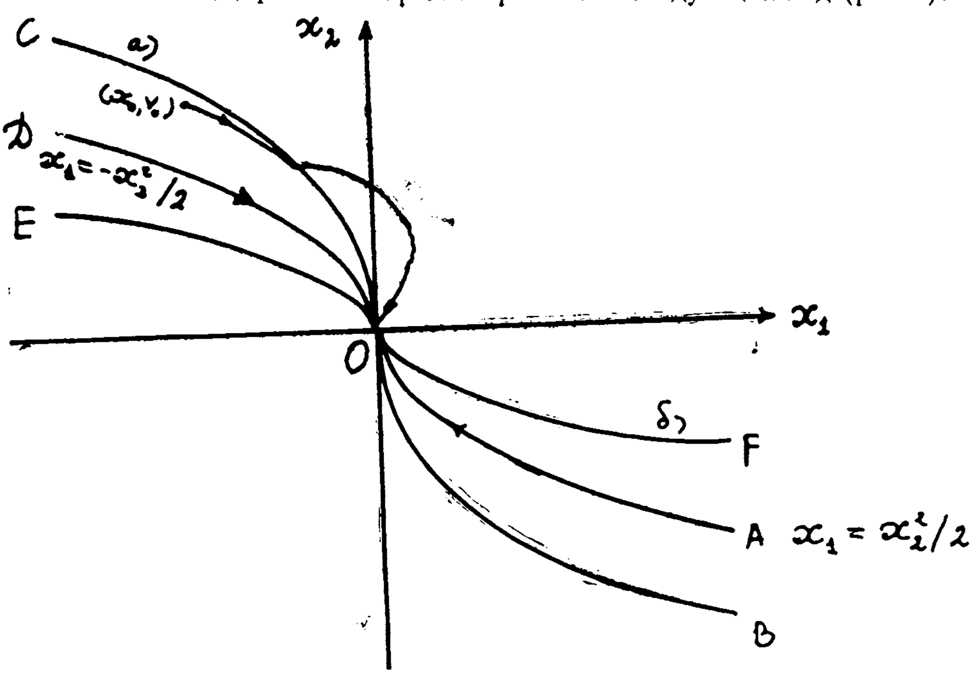

Рис. 5.

Управление равно -1 между CO и EO, 1—между FO и BO. Выше FOC и ниже BOE управление равно $(at+b)/2\varepsilon$. При $\varepsilon=9$ кривая а) совпадает с Г (см. рис. 5) и для любой точки $(x_0, v_0) \ni Г$ существуют две допустимые траектории, соответствующие управлениям $\hat{u}(t)\equiv 1$ или $\hat{u}(t)\equiv -1$ и $\hat{u}(t)=\dfrac{at+b}{2\varepsilon}$, которые удовлетворяют принципу минимума. Как показывают расчеты, значение функционала на обеих кривых одно и то же. Случай $\varepsilon>9$ остается открытым, когда $(x_0, v_0)\in Г$, если же $(x_0, v_0) \bar{\in} Г$, ответ задачи однозначен.

Перейдем к решению задачи III.

$$\text{III} \quad \int_0^T (1+\varepsilon\dot{x}^2)dt\to\inf, \quad \ddot{x}=u, \quad |u|\leqslant 1, \quad x(0)=x_0, \quad \dot{x}(0)=v_0,$$

$\varepsilon \geqslant 0$, T—свободно, $x(T)=\dot{x}(T)=0$.

Решение задачи III обеспечивает минимальность затрат энергии на формирование управляющего воздействия и времени переходного процесса.

После замены переменных III сводится к следующей задаче:

$$\int_0^T (1+\varepsilon x_2^2)dt \to \inf, \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad |u| \leqslant 1, \quad \begin{matrix} x_1(0)=x_0, & x_2(0)=v_0, \\ x_1(T)=x_2(T)=0. \end{matrix}$$

$\varepsilon \geqslant 0$, T—свободно,

Уравнения Эйлера имеют вид

$$\dot{\hat{p}}_1 = 0, \quad \dot{\hat{p}}_2 - \hat{p}_1 + 2\varepsilon\hat{\lambda}_0 x_2 = 0. \tag{14}$$

Условие стационарности по T:

$$\hat{\lambda}_0(1+\varepsilon\hat{x}_2^2(\hat{T})) + \hat{\hat{\mu}}_1\hat{x}_2(\hat{T}) + \hat{\mu}_2\hat{u}(\hat{T}) = 0. \tag{15}$$

Условие минимальности по u:

$$-\hat{p}_2(t)\hat{u}(t) \leqslant -\hat{p}_2(t)u \text{ при } |u| \leqslant 1.$$

Из (14) и (1) следует

$$\hat{u}(t) = \operatorname{sign}\hat{p}_2(t). \tag{16}$$

Можно считать, что $\hat{\lambda}_0 = 1$, когда $(x_0, v_0) \bar{\in} \Gamma$. Из условий (1), (14), (16) имеем

$$\ddot{\hat{p}}_2 = 2\varepsilon\operatorname{sign}\hat{p}_2. \tag{17}$$

Будем искать глобальные решения уравнения (17) на отрезке $[0, \hat{T}]$ и соответствующие им по (16) оптимальные управления. Из (15) следует $|\hat{p}_2(\hat{T})| = 1$. Возможны два симметричных варианта:

1) $\hat{p}_2(\hat{T}) = 1$, 2) $\hat{p}_2(\hat{T}) = -1$.

Рассмотрим вариант 1).

В окрестности точки $\hat{T}$ $\hat{p}_2(t)$ имеет вид

$$\hat{p}_2(t) = \varepsilon(t-\hat{T})^2 + B(t-\hat{T}) + 1.$$

Введя обозначение $t-\hat{T}=z$, рассмотрим квадратное уравнение

$$\varepsilon z^2 + Bz + 1 = 0, \quad z = (-B \pm \sqrt{B^2 - 4\varepsilon})/2\varepsilon.$$

При $B < 2\sqrt{\varepsilon}$ $\hat{p}_2(t) > 0$ и, следовательно, $\hat{u}(t) \equiv 1$.

Ближайший к $\hat{T}$ нуль функции $\hat{p}_2(t)$ обозначим через τ. Если $B \geqslant 2\sqrt{\varepsilon}$, то можно показать, что он удален от $\hat{T}$ не более, чем на $1/\sqrt{\varepsilon}$. Левее точки τ надо уже решать уравнение $\ddot{y} = -2\varepsilon$ с начальными условиями $y(\tau)=0$, $\dot{y}(\tau)=\hat{p}(\tau)$. Если $B>2\sqrt{\varepsilon}$, то глобальное решение (17) имеет ровно один нуль. Если же $B=2\sqrt{\varepsilon}$, то левее точки $\tau=T-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ надо решать уравнение $\ddot{y}=0$ с начальными условиями $y(\tau)=\dot{y}(\tau)=0$, решение которого—тождественный нуль.

Пусть на отрезке $\left[t_1, \hat{T}-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$ $\hat{p}_2(t)$ равно нулю, причем $t_1 \neq 0$.

На интервале $[0, t_1]$ $\hat{p}_2(t)$ можно продолжить как решение уравнения $\ddot{y}=2\varepsilon$ с начальными условиями $y(t_1)=\dot{y}(t_1)=0$ или же $\ddot{y}=-2\varepsilon$ $y(t_1)=\dot{y}(t_1)=0$. Теперь выпишем всевозможные управления, полученные нами:

$$\hat{u}(t)\equiv 1; \quad \hat{u}(t)=\begin{cases} -1 & 0\leqslant t\leqslant\tau, \\ 1 & \tau<t\leqslant\hat{T}, \text{ причем } |\tau-\hat{T}|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}; \end{cases}$$

$$\hat{u}(t)=\begin{cases} -1 & 0\leqslant t\leqslant t_1, \\ 0 & t_1<t<\hat{T}-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \\ 1 & \hat{T}-1/\sqrt{\varepsilon}\leqslant t\leqslant\hat{T}; \end{cases} \qquad \hat{u}(t)=\begin{cases} 1 & 0\leqslant t<t_1 \\ 0 & t_1<t<\hat{T}-1/\sqrt{\varepsilon}, \\ 1 & \hat{T}-1/\sqrt{\varepsilon}\leqslant t\leqslant\hat{T}. \end{cases}$$

Линия переключения управления есть

$$x_2=-\sqrt{2}x_1, \quad 0\leqslant x_1\leqslant 1/2\varepsilon \text{ и } x_2=-1/\sqrt{\varepsilon}, \quad x_1\geqslant 1/2\varepsilon.$$

Учитывая симметричный вариант, в фазовой плоскости окончательно получим такую картину.

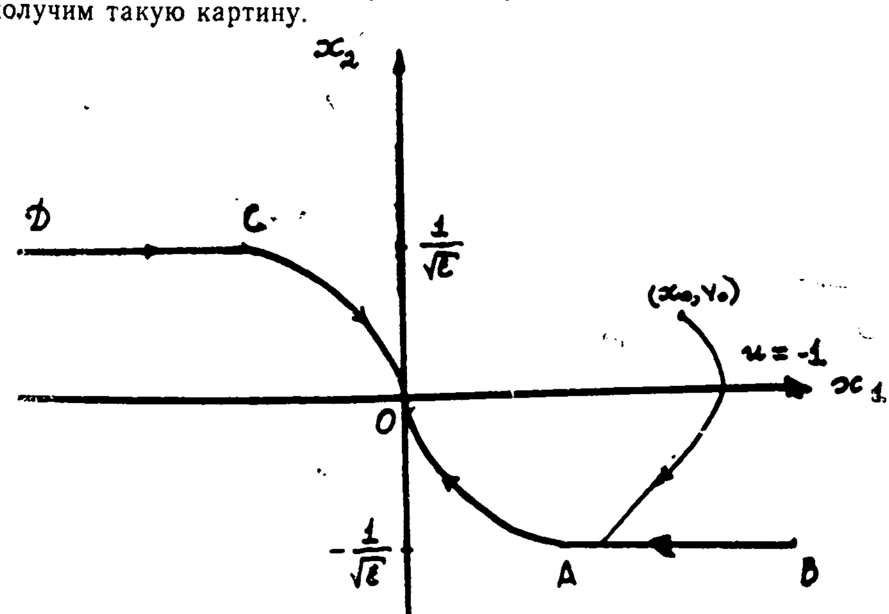

Рис. 6.

Функция синтеза задачи III имеет следующий вид:

$$u(x_1, x_2)=\begin{cases} -1 & \text{выше линии ДСОАВ и на СО,} \\ 1 & \text{ниже линии ДСОАВ и на АО.} \\ 0 & \text{на линиях ДС и АВ.} \end{cases}$$

Приведем доказательство существования решения для задачи II. Обозначим

$$I(x(\cdot), T)=\int_0^T(1+\varepsilon\ddot{x}^2)dt.$$

Существует функция $\bar{x}(\cdot)$, определенная на отрезке $(0, \bar{T})$ и удовлетворяющая условиям

$$|\ddot{\bar{x}}|\leqslant 1,\ \bar{x}(0)=x_0,\quad \dot{\bar{x}}(0)=v_0,\quad \bar{x}(\bar{T})=\dot{\bar{x}}(\bar{T})=0.$$

Рассмотрим семейство функций W, определенных на $[0, \bar{T}]$ и обладающих такими свойствами:

1. $|\ddot{x}|\leqslant 1,\quad x(0)=x_0,\quad \dot{x}(0)=v_0;$

2. $\exists T\in[0, \bar{T}]$ такое, что $x(t)=\dot{x}(t)=0,\ \forall t\in[T, \bar{T}]$.

Семейство W компактно в пространстве $C([0, \bar{T}])$. Это следует из равностепенной непрерывности и равномерной ограниченности W (теорема Арцела, см. [4]).

Обозначим через $(x_n(\cdot), T_n)$ минимизирующую последовательность для нашего функционала, то есть

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{T_n}(1+\varepsilon\ddot{x}_n^2)dt=\mu=\inf I(x(\cdot),T).$$

Доопределим нулем $x_n(\cdot)$ на $[T_n, \bar{T}]$. Тогда $x_n(\cdot)\in W$. В силу компактности W существует подпоследовательность $x_{n_k}(\cdot)$, равномерно сходящаяся к $\hat{x}(\cdot)$, причем $\hat{x}(\cdot)\in W$, так как W замкнуто. Пусть $[0, \hat{T}]$—носитель $\hat{x}(\cdot)$. Покажем, что

$$\int_0^{\hat{T}}(1+\varepsilon\ddot{\hat{x}}^2)dt\leqslant\lim_{k\to\infty}\int_0^{T_{n_k}}(1+\varepsilon\ddot{x}_{n_k}^2)dt=\mu.$$

Легко доказать, что

$$\hat{T}\leqslant\lim_{k\to\infty}T_{n_k}. \qquad (18)$$

Убедимся, что если $x_{n_k}(\cdot)$ равномерно сходится к $\hat{x}(\cdot)$, то $\ddot{x}_{n_k}(\cdot)$ сходится слабо в $L_2([0, \bar{T}])$ к $\ddot{\hat{x}}(\cdot)$. Надо показать, что

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{\bar T}\ddot{x}_{n_k}(t)g(t)dt=\int_0^{\bar T}\ddot{\hat{x}}(t)g(t)dt,\quad \forall g(t)\in L_2([0,\bar T]).\tag{19}$$

Но поскольку класс бесконечно дифференцируемых функций всюду плотен в $L_2([0, T])$, достаточно (19) доказать для $\forall g(t)\in C^\infty([0, \bar T])$. Имеем

$$\int_0^{\bar T}\ddot{x}_{n_k}(t)g(t)dt=-v_0g(0)+x_0\dot g(0)+\int_0^{\bar T}x_{n_k}(t)\ddot g(t)dt.\tag{20}$$

Поскольку $x_{n_k}(\cdot)\rightrightarrows\hat x(\cdot)$, то, переходя в (20) к пределу, получаем

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{\bar T}\ddot{x}_{n_k}(t)g(t)dt=-v_0g(0)+x_0\dot g(0)+\int_0^{\bar T}\hat x(t)\ddot g(t)dt=\int_0^{\bar T}\ddot{\hat x}(t)g(t)dt.$$

С другой стороны, легко доказать следующее предложение.

Норма в банаховом пространстве полунепрерывна снизу относительно слабой сходимости, т. е. $\|x\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|x_n\|$, где $x_n\to x$ слабо.

И поэтому

$$\int_0^{\bar T}\ddot{x}^2dt\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\int_0^{\bar T}\ddot{x}^2_{n_k}dt.\tag{21}$$

Из (18) и (21) следует, что для $\forall\delta>0$ $\exists N$, что для $n_k>N$

$$\int_0^{\hat T}(1+\varepsilon\ddot{\hat x}^2)dt=\hat T+\varepsilon\int_0^{\hat T}\ddot{\hat x}^2dt\leqslant T_{n_k}+\delta+\varepsilon\int_0^{T_{n_k}}\ddot{x}^2_{n_k}dt+\delta=$$

$$=\int_0^{T_{n_k}}(1+\varepsilon\ddot{x}^2_{n_k})dt+2\delta\underset{k\to\infty}{\to}\mu+2\delta.$$

В силу произвольности δ имеем

$$\int_0^{\hat T}(1+\varepsilon\ddot{\hat x}^2)dt\leqslant\mu$$

и, следовательно,

$$\int_0^{\hat T}(1+\varepsilon\ddot{\hat x}^2)dt=\mu.$$

Таким образом, очевидно, что $(\hat{x}(\cdot), \hat{T})$——решение нашей задачи.

Подобно вышеизложенному, можно доказать существование решений для задач I и III.

В заключение авторы выражают благодарность проф. В. М. Тихомирову за постановку задач и внимание к работе.

Кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа

Поступила 6.07.1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
2. **Тихомиров В. М., Алексеев В. М., Фомин С. Ф.** Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
3. **Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
4. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.

Մ. Դ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Ս. Ա. ԱՅՈՒՆՑ

ՕՊՏԻՄԱԼ ՂԵԿԱՎԱՐՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄ

Ամփոփում

Օպտիմալ արագագործունեության կամ Բուշաուի խնդիրը կողմնորոշիչ դեր խաղաց օպտիմալ ղեկավարման տեսության ստեղծման համար։

Սույն հոդվածում լուծվում են օպտիմալ ղեկավարման երեք խնդիրներ, որոնք հանդիսանում են Բուշաուի խնդրի ընդհանրացումը։

Այդ խնդիրները լուծվում են օպտիմալ ղեկավարման խնդիրների համար Լագրանժի սկզբունքի կիրառման եղանակով։ Տրվում է լուծումների լրիվ սինթեզը և գոյության հիմնավորումը։