ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1,1995 Естественные науки

Математика

УДК 517.95

Г.Г.КАЗАРЯН

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЭКЛУНДА И ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

В статье изучается нелинейное эволюционное уравнение, связанное с гиперболическими уравнениями, удовлетворяющими принципу Гюйгенса.

Проводится Пенлеве анализ, строится преобразование Бэклунда, с помощью группового анализа строятся также группы симметрий, относительно которых уравнение инвариантно.

1.В работе [1] доказано,что для уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + q(x)u = 0$$

выполняется принцип Гюйгенса тогда и только тогда, когда функция $q(x)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} &q_{xx} + 3q^2 = 0, \\ &3q_{xxxx} + 20qq_{xx} + 15q_x^2 = 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

С первым уравнением связано известное уравнение Кортевега де Фриза

$$q_t = (q_{xx} + 3q^2)_x .$$

В работе [2] построено и изучено нелинейное эволюционное уравнение

$$q_t = \frac{13}{5} q_{xxxxx} + 20qq_{xxx} + 34q_x q_{xx} + 48q^2 q_x \qquad (2)$$

связанное со вторым уравнением системы (1).

Правую часть уравнения (2) представим в виде

$$\frac{13}{5}\left[q_{xxxxx} + 10qq_{xxx} + 20q_x q_{xx} + 30q^2 q_x\right] - 6\left[qq_{xxx} + 3q_x q_{xx} + 5q^2 q_x\right] . \qquad (3)$$

Первое слагаемое непосредственно связано с третьим уравнением в иерархии уравнений Кортевега де Фриза , которое достаточно хорошо изучено [3]. Целью настоящей работы является изучение уравнения, связанного со вторым слагаемым в представлении (3).

$$q_t = qq_{xxx} + 3q_x q_{xx} + 5q^2 q_x . \qquad (4)$$

Проводится Пенлеве анализ и строится преобразование Бэклунда, т.е.преобразование между двумя решениями уравнения (4). Строятся также группы преобразований, относительно которых уравнение (4) инвариантно.

2.Анализ Пенлеве для уравнения (4) заключается в поиске общего решения уравнения (4) в окрестности многообразия

$$\Phi(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \tag{5}$$

в виде

$$q = \Phi^{\alpha} \sum_{\upsilon=0}^{\infty} q_{\upsilon} \Phi^{\upsilon},$$

где $\Phi(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, $q_{\upsilon} = q_{\upsilon}(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ аналитические по (t, x) функции в окрестности многообразия (5). Подставив функцию $q(t, x)$ в уравнение (4), получим значения α : $\alpha = -2$ и рекуррентные соотношения для определения коэффициентов q_{υ} как функции от предыдущих коэффициентов:

$$\begin{gathered} \Phi_x^5 (\upsilon + 1)(\upsilon - 6)(\upsilon - 10) q_{\upsilon} = F(q_{\upsilon-1}, \dots, q_0, \Phi_t, \Phi_x, \Phi_{xx} \dots), \\ \upsilon = 0, 1, 2, \dots \end{gathered} \tag{6}$$

При этом резонансные значения (значения, для которых q_{υ} невозможно определить из (6), равны $\upsilon = -1, 6, 10$, а $q_0 = -6\Phi_x^2$. С целью избежания громоздких вычислений для доказательства того, что уравнение (4) обладает свойством Пенлеве [4], преобразование Бэклунда будем искать в виде

$$q = -6\frac{\Phi_x^2}{\Phi^2} + \frac{q_1}{\Phi} + q_2. \tag{7}$$

Подставляя функцию q в уравнение (4) и приравнивая коэффициенты при различных степенях Ф к нулю, после некоторых преобразований, получаем

$$\begin{gathered} q_0 = -6\Phi_x^2, \quad q_1 = 6\Phi_{xx} \\ q_2 = \frac{3}{2}\frac{\Phi_{xx}}{\Phi_x} - 2\frac{\Phi_{xxx}}{\Phi_{xx}} \end{gathered} \tag{8}$$

$$F_j(q_0, q_1, q_2, q_{0x}, q_{1x}, \dots) = 0, \qquad j = 1,2,3,4,5, \tag{9}$$

где функции F_j зависят от q_0, q_1, q_2 и их производных, при этом F_5 имеет вид:

$$-q_{2t} + q_2 q_{2xxx} + 3q_{2x} q_{2xx} + 5q_2^2 q_{2x} = 0. \tag{10}$$

Подставляя (8) в (9) и (10), получим пять уравнений (которые называются уравнениями Пенлеве-Бэклунда), зависящих только от производных функции Ф:

$$\frac{\partial}{\partial x}\{\Phi, x\}=0,$$

$$\frac{\Phi_t}{\Phi_x}+9\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\Phi, x\}-3\{\Phi, x\}^2+42\frac{\Phi_{xx}}{\Phi_x}\frac{\partial}{\partial x}\{\Phi, x\}=0,$$

$$2\frac{\Phi_{xt}}{\Phi_x}+\frac{\Phi_{xx}\Phi_t}{\Phi_x^2}-9\frac{\Phi_{xx}}{\Phi_x}\{\Phi, x\}^2+Q_1\left[\frac{\partial}{\partial x}\{\Phi, x\},\frac{\partial}{\partial x}\{\Phi, x\}^2,\dots,\frac{\Phi_t}{\Phi_x},\left(\frac{\Phi_t}{\Phi_x}\right)_x,\dots\right]=0,$$

$$-6\frac{\Phi_{xxt}}{\Phi_x}+18\{\Phi, x\}^3+27\frac{\Phi_{xx}^2}{\Phi_x^2}\{\Phi, x\}^2+$$

$$+Q_2\left[\frac{\partial}{\partial x}\{\Phi, x\},\frac{\partial}{\partial x}\{\Phi, x\}^2,\dots,\frac{\Phi_t}{\Phi_x},\left(\frac{\Phi_t}{\Phi_x}\right)_x,\dots\right]=0,$$

$$3\frac{\Phi_t}{\Phi_x}\frac{\Phi_{xx}}{\Phi_x}\left[\{\Phi, x\}+\frac{1}{2}\frac{\Phi_{xx}^2}{\Phi_x^2}\right]-9\frac{\Phi_{xx}}{\Phi_x}\{\Phi, x\}^3-\frac{9}{2}\frac{\Phi_{xx}^3}{\Phi_x^3}\{\Phi, x\}^2+$$

$$+Q_2\left[\frac{\partial}{\partial x}\{\Phi, x\},\frac{\partial}{\partial x}\{\Phi, x\}^2,\dots,\frac{\Phi_t}{\Phi_x},\left(\frac{\Phi_t}{\Phi_x}\right)_x,\dots\right]=0,$$

где $\{\Phi, x\}=\frac{\Phi_{xxx}}{\Phi_x}-\frac{3}{2}\frac{\Phi_{xx}^2}{\Phi_x^2}$ называется производной Шварца функции Φ [4], а Q_1, Q_2, Q_3 гладкие функции , такие, что $Q_j(0,0,\dots,0)=0$ $j=1,2,3$

Заметим, что последние три уравнения являются простыми следствиями первых двух, т.е. множество уравнений Пенлеве-Бэклунда состоит из следующих двух уравнений:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\{\Phi, x\}=0,\\ &\frac{\Phi_t}{\Phi_x}=3\{\Phi, x\}^2\end{aligned}\tag{11}$$

В работе [1] показано, что множество решений системы (11) непусто а это значит, что с учетом уравнения (10) (7) действительно является преобразованием Бэклунда.

3. Проведем групповой анализ уравнения (4) [5]. Пусть G однопараметрическая группа преобразований в пространстве $(t, x, \dot{q})$ с инфинитезимальным оператором

$$X=\xi_1(t,x,q)\frac{\partial}{\partial t}+\xi_2(t,x,q)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(t,x,q)\frac{\partial}{\partial q}\tag{12}$$

Известно [5], что для того чтобы уравнение (4) было инвариантным относительно группы G с инфинитезимальным оператором (12), необходимо и достаточно, чтобы

$$\underset{3}{X}F\Big|_{F=0}=0,\tag{13}$$

где

$$F(t,x,q,q_t,q_x,q_{xx},q_{xxx}) \equiv -q_t + q\cdot q_{xxx} + 3q_x q_{xx} + 5q^2 q_x,$$

а

$$\underset{3}{X} = \xi_1 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial q} + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial q_t} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial q_x} + \zeta_{22} \frac{\partial}{\partial q_{xx}} + \zeta_{222} \frac{\partial}{\partial q_{xxx}} \quad (14)$$

инфинитезимальный оператор продолженной группы $\underset{3}{G}$. Уравнение (13) является определяющим уравнением [5] группы, при этом $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_{222}$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \eta_t + \eta_q \cdot q_t - (\xi_{1t} + \xi_{1q}\cdot q_t)q_t - (\xi_{2t} + \xi_{2q}\cdot q_t)q_x,\\
\zeta_2 &= \eta_x + \eta_q \cdot q_x - (\xi_{1x} + \xi_{1q}\cdot q_x)q_t - (\xi_{2x} + \xi_{2q}\cdot q_x)q_x,\\
\zeta_{22} &= \zeta_{2x} + \zeta_{2q}\cdot q_{xt} - (\xi_{1x} + \xi_{1q}\cdot q_x)q_{xt} - (\xi_{2x} + \xi_{2q}\cdot q_x)q_{xx},\\
\zeta_{222} &= \zeta_{22x} + \zeta_{22q}\cdot q_x - (\xi_{1x} + \xi_{1q}\cdot q_x)q_{xxt} - (\xi_{2x} + \xi_{2q}\cdot q_x)q_{xxx}.
\end{aligned} \quad (15)$$

Определяющее уравнение (13) принимает вид

$$(q_{xxx}\cdot\eta + 10qq_x\cdot\eta + q\zeta_{222} + 3q_x\zeta_{22} + 3q_{xx}\zeta_2 + 5q^2\zeta_2 - \zeta_1)\Big|_{F=0} = 0. \quad (16)$$

Подставляя значения $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_{22}, \zeta_{222}$ из формулы (15) и приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях производных функции q, получим

$$\begin{aligned}
&\xi_{1x} = 0, \qquad \xi_{1q} = 0, \qquad \xi_{2q} = 0,\\
&\eta - 3q\cdot\xi_{2x} + q\cdot\xi_{1t} = 0, \quad 3q\cdot\eta_{xq} - 3q\cdot\xi_{2xx} + 3\eta_x = 0,\\
&3q\cdot\eta_{qq} - 9\xi_{2x} + 3\xi_{1t} + 3\eta_q = 0,\\
&q\cdot\eta_{qqq} + 3\eta_{qq} = 0, \qquad 3q\cdot\eta_{xqq} + 6\eta_{xq} - 3\xi_{2xx} = 0,\\
&-q\xi_{2xxx} + 3\eta_{xx} + 10q\cdot\eta - 5q^2\xi_{2x} + 5q^2\xi_{1t} + 3q\eta_{xxq} + \xi_{2t} = 0,\\
&\eta_{xxx} + 5q^2\cdot\eta_x - \eta_t = 0.
\end{aligned} \quad (17)$$

Из уравнений (16) получаем

$$\xi_1 = 5\alpha t + \beta, \qquad \xi_2 = \alpha x + \gamma, \qquad \eta = -2\alpha q, \quad (18)$$

где α, β, γ – произвольные постоянные.

Таким образом уравнение (4) допускает три линейно независимых оператора

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_3 = 5t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - 2q\frac{\partial}{\partial q}.$$

которые служат базисом алгебры Ли [5], т.к.коммутаторы базисных векторов удовлетворяют условиям

$$[X_1, X_2] = 0, \qquad [X_1, X_3] = 5X_1, \qquad [X_2, X_3] = X_2$$

Из теоремы Ли [5] следует, что соответствующие однопараметрические группы симметрий имеют вид

а) сдвиг по времени

$$G_0 : (t, x, q) \to (t + a, x, q) \ ,$$

б) сдвиг по пространству

$$G_1 : (t, x, q) \to (t, x + a, q) \ ,$$

в) растяжения

$$G_2 : (t, x, q) \to (t \cdot e^{5a}, x \cdot e^{a}, q \cdot e^{-2a})$$

Кафедра прикладного анализа

Поступила 21.11.1995

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kazarian G.G., Oganesian A.O.** – Countemp. Math. Anal., 1994, v.29, N5, P.64-73.
2. **Kazarian G.G.,Oganesian A.O.** – Theory of Functions and applications, Collection of works Dedicated to the memory of M. M. Djrbashian. Yerevan, Louys, 1995 p. 83-86.
3. **Додд. Р., Эйлбек Дж. и др.** Солитоны и нелинейные волновые уравнения. Academic Press Inf., Москва, Мир, 1988.
4. **Weiss J.**- J. Math. Phis., June 1983, 24(6), p.1405-1413
5. **Ибрагимов Н.Х.** Группы преобразований в математической физике М.Наука, 1983.

Գ.Գ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

ԲԵԿԼՈՒՆԴԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ԽՄԲԱՅԻՆ ԱՆԱԼԻԶԸ ՄԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է երրորդ կարգի ոչ գծային հավասարում՝ կապված Հյուգենսի սկզբունքին բավարարող հիպերբոլական հավասարումների հետ:

Անց է կացվում Պենլևեի անալիզ, կառուցվում է Բեկլունդի ձևափոխություն, խմբային անալիզի միջոցով կառուցվում են նաև սիմետրիաների խմբեր, որոնց նկատմամբ հավասարումն ինվարիանտ է: